JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

OU

RECUEIL MENSUEL

DE MÉMOIRES SUR LES DIVERSES PARTIES DES MATHÉMATIQUES;

Publié

PAR JOSEPH LIOUVILLE,

Membre de l'Institut, professeur d'Analyse à l'École Polytechnique.

20761

TOME CINQUIÈME.

ANNÉE 1840.

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES, ETC.,

QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1840

QA
1
J684
t.5

20761
c.1

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

Mémoire sur la propagation et la polarisation du mouvement dans un milieu élastique indéfini, cristallisé d'une manière quelconque; par M. *Blanchet*..... 1

Addition à la Note sur le principe fondamental de la théorie des équations algébriques; par *J. Liouville*..... 31

Note sur les transcendantes elliptiques de 1re et de 2me espèce, considérées comme fonctions de leur module; par *le même*..... 34

Démonstration de deux propositions de M. *Cauchy*, par M. *Terquem*..... 37

Note sur la théorie de l'engrenage de White, par M. *Delaunay*..... 38

Sommation de quelques séries; par M. *Lebesgue*..... 42

Extrait d'une lettre de M. *Lejeune-Dirichlet* à M. *Liouville*..... 72

Note sur la détermination du nombre des racines réelles ou imaginaires d'une équation numérique comprises entre les limites données. — Théorèmes de Rolle, de Budan ou de Fourier, de Descartes, de Sturm et de Cauchy; par M. *Moigno*..... 75

Mémoire sur les inclinaisons respectives des orbites de Jupiter, Saturne et Uranus; sur les mouvements des intersections de ces orbites; par M. *Le Verrier*..... 93

Note sur l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x dx}{(1+x^2)^n}$; par M. *Catalan*..... 108

Note sur l'évaluation de l'aire de l'ellipsoïde à trois axes inégaux; par M. *Lobatto*. 115

Mémoire sur les forces centrifuges développées dans le mouvement des corps qui roulent; par M. *Paul Breton*..... 120

Note sur les engrenages de White; par M. *Olivier*..... 146

Méthode simple et nouvelle pour la détermination complète des sommes alternées formées avec les racines primitives des équations binomes; par M. *Cauchy*..... 154

Sur la sommation de certaines puissances d'une racine primitive d'une équation binome, et en particulier, des puissances qui offrent pour exposants les résidus cubiques inférieurs au module donné; par *le même*..... 169

Note sur un théorème de Fermat; par M. *Lebesgue*..... 184

Note sur une formule de M. Cauchy; par *le même*..... 186

Observations sur un Mémoire de M. *Paul Breton*; par M. *Delaunay*..... 189

Sur l'irrationnalité du nombre $e = 2,718\ldots$; par *J. Liouville*..... 192

Addition à la Note sur l'irrationnalité du nombre e; par *J. Liouville*..... 193

Mémoire d'analyse indéterminée, démontrant que l'équation $x^7 + y^7 = z^7$ est impossible en nombres entiers; par M. *Lamé*..... 195

Pages.
Rapport sur le Mémoire précédent, par M. *Cauchy* 211
Extrait d'une Lettre adressée à M. Liouville par M. *Stern* 216
Sur les variations séculaires des éléments elliptiques des sept planètes principales : Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter, Saturne et Uranus; par M. *Le Verrier* 220
Note sur un théorème de Mécanique; par M. *Delaunay* 255
Problème de combinaisons; par M. *Catalan* 264
Note sur une certaine suite de fractions ordinaires; par M. *Stouvenel* 265
Démonstration de l'impossibilité de résoudre l'équation $x^7 + y^7 + z^7 = 0$ en nombres entiers; par M. *Lebesgue* 276
Sur la limite de $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$, m étant un entier positif qui croît indéfiniment; par *J. Liouville* 280
Résolution de l'équation du second degré à une inconnue par les fractions continues; par M. *Lebesgue* 281
Sur quelques formules pour le changement de la variable indépendante; par *J. Liouville* 311
Mémoire sur les coordonnées curvilignes; par M. *Lamé* 313
Addition à la Note sur l'équation $x^7 + y^7 + z^7 = 0$; par M. *Lebesgue* 348
Lettre adressée à M. le Président de l'Académie des Sciences; par M. *Jacobi* 350
Note de l'Éditeur à l'occasion de cette Lettre 351
Sur les conditions de convergence d'une classe générale de series; par *J. Liouville* 356
Sur l'équation $Z^{2n} - Y^{2n} = 2x^n$; par *le même* 360
Mémoire sur les inégalités séculaires des éléments des planètes; par M. *Binet* 361
Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace, et de la variation des coordonnées provenant de ces déplacements considérés indépendamment des causes qui peuvent les produire; par M. *Rodrigues* 380
Mémoire sur les transcendantes elliptiques de 1re et de 2me espèce, considérées comme fonctions de leur module; par *J. Liouville* 441
Solution nouvelle du problème de l'attraction d'un ellipsoïde hétérogène sur un point extérieur; par M. *Chasles* 465
Tables des matières contenues dans les tomes, I, II, III, IV et V 489
Table des matières par noms d'Auteurs 497

ERRATA.

Pages.	Lignes	
43,	14,	*au lieu de* $\Sigma \cos i^2 \frac{2h\pi}{p}$, *lisez* $\Sigma \cos \frac{i^2+1}{2} \cdot \frac{2h\pi}{p}$
44,	3,	*au lieu de* an 1808—1811, *lisez* ann. 1808—1811
45,	9, 11,	*au lieu de* $\theta a . \theta(\varphi a) . \theta(\varphi^2 a) \ldots$, *lisez* $\theta b . \theta(\varphi b) . \theta(\varphi^2 b \ldots$
48,	3,	*au lieu de* q^{+m}, *lisez* q^{-m}
49,	13, 17,	*au lieu de* $\sin \frac{p-1}{2} \cdot \frac{2h\pi}{p}$, *lisez* $\sin \frac{p-1}{2} \cdot \frac{h\pi}{p}$
49,	18,	*au lieu de* $\sin \frac{p-1}{2} \cdot \frac{h\pi}{h}$, *lisez* $\sin \frac{p-1}{2} \cdot \frac{h\pi}{p}$
50,	3,	*au lieu de* $\sin \frac{p}{h\pi}$, *lisez* $\sin \frac{h\pi}{p}$
50,	7 en rem.,	*au lieu de* $\sin \frac{p-1}{p} \cdot \frac{\pi}{2}$, *lisez* $\sin \frac{p-1}{2} \cdot \frac{\pi}{p}$
51,	6,	*au lieu de* de quotients, *lisez* des quotients
52,	2,	*au lieu de* $(kp'+2i+1)$, *lisez* $(kp'+2i'+1)$
52,	13,	*au lieu de* $(kq'+1)$, *lisez* $(kp'+1)$
54,	11,	*au lieu de* $(-1)^{h+i \cdot q}$, *lisez* $(-1)^{\overline{h+i \cdot q}}$
55,	dernière,	*au lieu de* deux valeurs $\pm 0 \pm \sqrt{p}$. Or les valeurs, *lisez* trois valeurs $0, \pm \sqrt{p}$. Or la valeur
56,	1,	*supprimez* $+0$
56,	1,	*au lieu de* répondent, *lisez* répond
56,	3,	*au lieu de* des valeurs, *lisez* la valeur
58,	7,	*au lieu de* $f(z) = 2$, *lisez* $f(1) = 2$
59,	dernière,	*au lieu de* l'équation (u), *lisez* l'équation (v)
60,	15,	*au lieu de* l'équation (u), *lisez* l'équation (v)
60,	2 en rem.,	*au lieu de* l'equation (s), *lisez* l'equation (v)
61,	12,	*au lieu de* $= -1$, *lisez* $= (-1)^h = -1$
62,	1,	*au lieu de* $1 + q^{-3}, \ldots, 1 + q^{-(p-1)}$, *lisez* $1 - q^{-3}, \ldots, 1 - q^{-(p-1)}$
62,	9,	*au lieu de* $1 \pm q q'$, *lisez* $1 \pm q^{-q'}$
62,	10,	*au lieu de* $-(-1)^{\frac{p-1}{2}} \sqrt{-1}$, *lisez* $= -(-1)^{\frac{p-1}{2}} \sqrt{-1}$
62,	12,	*au lieu de* $\sin \frac{2h\pi}{p} . \sin 2 . \frac{2h}{p} \ldots$, *lisez* $\sin \frac{2h\pi}{2p} . \sin 2 . \frac{2h\pi}{2p} \ldots$
62,	13,	*au lieu de* $\sin \frac{p}{2} \cdot \frac{2h\pi}{p}$, *lisez* $\sin \frac{p}{2} \cdot \frac{2h\pi}{2p}$
63,	1,	*au lieu de* $x^2 - 2x \cos \frac{2\pi}{p} - 1$, *lisez* $x^2 - 2x \cos \frac{2\pi}{p} + 1$
63,	4,	*au lieu de* $\sin^2 . \frac{p}{2} - 1 \frac{\pi}{p}$, *lisez* $\sin^2 . \left(\frac{p}{2} - 1\right) \frac{\pi}{p}$
63,	10,	*au lieu de* $p = 4q + 1$, *lisez* $2p = 8p'' + 4$
63,	16,	*au lieu de* $p = 4q - 1$, *lisez* $p = 8p''$
66,	4,	*au lieu de* $\left(\frac{mp}{2}\right)$, *lisez* $\left(\frac{mh}{p}\right)$
66,	12,	*au lieu de* $\left(\frac{m - h.h}{p}\right)$, *lisez* $\left(\frac{m - \frac{1}{2} h}{p}\right)$
67,	1 et 6,	*au lieu de* au, *lisez* aux

Pages	Lignes.	
69,	6,	*au lieu de* $\sin a.\frac{2\pi}{p}$, *lisez* $\sin^3 a.\frac{2\pi}{}$
69,	7,	*au lieu de* $\sin^3 a.\frac{2\pi}{p}$, *lisez* $\sin^4 a.\frac{2\pi}{p}$
69.	8,	*au lieu de* $\sin^4 a.\frac{2\pi}{p}$, *lisez* $\sin^5 a.\frac{2\pi}{p}$
69,	9,	*au lieu de* $\sin^4 a.\frac{2\pi}{p}$, *lisez* $\sin^4 a.\frac{2\pi}{p}$
69,	4 en rem.,	*au lieu de* -19.17, *lisez* $-19.\sqrt{17}$
70,	9,	*au lieu de* je n'ai, *lisez* je n'en ai
70.	11,	*au lieu de* $\pi \operatorname{cotang} a\frac{2\pi}{p}$, *lisez* $\pi \operatorname{cotang} a.\frac{2\pi}{p} = \operatorname{cotang} a.\frac{2\pi}{p}.\operatorname{cotang} a'\frac{2\pi}{p}.\operatorname{cotang} a''\frac{2\pi}{p}\ldots$
111,	dernière,	*au lieu de* $i < 2$, *lisez* $i < n$
76,	en rem.,	*au lieu de* infini, *lisez* nul
112,	2 en rem.,	*supprimez* $\frac{1}{\Gamma(n)}$ *dans l'équation* (9)
113,	3,	*même correction pour l'équation* (10)
113,	13,	*même correction pour l'équation* (12)
113,	15,	*au lieu de* $\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n-\frac{1}{2})$, *lisez* $\frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n-\frac{1}{2})}{\Gamma(n)}$
355,	3 en rem.,	*au lieu de* Or on voit dans la Mécanique analytique (t. II, p. 108). *lisez* Or en se bornant au cas ordinaire des forces inversement proportionnelles au carré des distances, on sait depuis Euler
355,	dernière,	*au lieu de* cherchées, *lisez* qu'Euler a données aussi, mais qui sont plus cachées,
355,	dernière,	*au lieu de* se déduiront donc, *lisez* se déduiront donc immédiatement.

JOURNAL
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

MÉMOIRE
SUR LA PROPAGATION ET LA POLARISATION DU MOUVEMENT
DANS UN MILIEU ÉLASTIQUE INDÉFINI,
CRISTALLISÉ D'UNE MANIÈRE QUELCONQUE;

PAR M. P.-H. BLANCHET,
Professeur de Physique au Collége royal de Henri IV. [*]

1. M. Poisson, dans un de ses beaux Mémoires, a traité complétement la propagation du mouvement dans un milieu élastique, homogène, non cristallisé : je me propose ici d'interpréter les intégrales dans toute la généralité de la question. L'étude des lois du mouvement dans un milieu homogène, élastique, indéfini, cristallisé d'une manière quelconque, n'est peut-être pas indigne de l'attention des géomètres.

J'intègre par une méthode connue [**]; mais j'en tire un parti nouveau pour mettre les intégrales sous une forme qui n'a été donnée nulle part. Les résultats sont parfaitement symétriques.

[*] Ce Mémoire a été présenté à l'Académie des Sciences, le 6 août 1838. Voyez le rapport de M. Sturm, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, tome VII, page 113.

[**] Employée avec élégance par M. Cauchy, dans ses leçons au Collége de France.

2. Les équations générales du mouvement, que nous voulons considérer, sont (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, tome X, page 578) :

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} + \dfrac{dP_1}{dx} + \dfrac{dP_2}{dy} + \dfrac{dP_3}{dz} = 0, \\ \dfrac{d^2\eta}{dt^2} + \dfrac{dQ_1}{dx} + \dfrac{dQ_2}{dy} + \dfrac{dQ_3}{dz} = 0, \\ \dfrac{d^2\zeta}{dt^2} + \dfrac{dR_1}{dx} + \dfrac{dR_2}{dy} + \dfrac{dR_3}{dz} = 0, \end{cases}$$

dans lesquelles nous avons pris $\rho = 1$. Nous avons aussi remplacé u, v, w, par ξ, η, ζ. On a

$$(2)\quad P_1 = R_3, \quad Q_1 = R_2, \quad P_2 = Q_3.$$

Les quantités P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3, R_1, R_2, R_3 se réduisent à six, qui sont toutes de la forme

$$(3)\quad T = A\frac{d\xi}{dx} + B\frac{d\eta}{dy} + C\frac{d\zeta}{dz} + D\left(\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}\right) + E\left(\frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz}\right) + F\left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right).$$

Nous supposerons le corps homogène et partout à la même température, de telle sorte que les 36 coefficients tels que A, B, C, etc., seront constants ainsi que la densité ρ, que nous avons pu prendre égale à 1 par cette raison.

3. Pour intégrer les équations (1), prenons d'abord

$$(4)\quad \begin{cases} \xi = Ue^{(ux + vy + wz)\sqrt{-1}}, \\ \eta = Ve^{(ux + vy + wz)\sqrt{-1}}, \\ \zeta = We^{(ux + vy + wz)\sqrt{-1}}; \end{cases}$$

U, V, W sont des fonctions de t; u, v, w sont indépendants des variables x, y, z, t.

On a évidemment

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{d\xi}{dx} = u\xi\sqrt{-1}, & \dfrac{d\xi}{dy} = v\xi\sqrt{-1}, & \dfrac{d\xi}{dz} = w\xi\sqrt{-1}, \\ \dfrac{d\eta}{dx} = u\eta\sqrt{-1}, & \dfrac{d\eta}{dy} = v\eta\sqrt{-1}, & \dfrac{d\eta}{dz} = w\eta\sqrt{-1}, \\ \dfrac{d\zeta}{dx} = u\zeta\sqrt{-1}, & \dfrac{d\zeta}{dy} = v\zeta\sqrt{-1}, & \dfrac{d\zeta}{dz} = w\zeta\sqrt{-1}. \end{cases}$$

Par la substitution de ces valeurs, une quantité de la forme (3) deviendra

$$(6)\qquad T = \left[\begin{array}{l} (Au + Fv + Ew)\xi \\ + (Fu + Bv + Dw)\eta \\ + (Eu + Dv + Cw)\zeta \end{array}\right]\sqrt{-1},$$

ou, pour abréger,

$$(7)\qquad T = (T'\xi + T''\eta + T'''\zeta)\sqrt{-1},$$

si l'on pose

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{l} T' = Au + Fv + Ew, \\ T'' = Fu + Bv + Dw, \\ T''' = Eu + Dv + Cw. \end{array}\right.$$

On aura

$$(9)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dT}{dx} = Tu\sqrt{-1} = -(T'\xi + T''\eta + T'''\zeta)u, \\ \dfrac{dT}{dy} = Tv\sqrt{-1} = -(T'\xi + T''\eta + T'''\zeta)v, \\ \dfrac{dT}{dz} = Tw\sqrt{-1} = -(T'\xi + T''\eta + T'''\zeta)w. \end{array}\right.$$

Si l'on fait les calculs analogues pour les quantités P_1, Q_1, R_1, P_2, Q_2, R_2, etc., on aura

$$(10)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} = -(\mathfrak{L}_1\xi + \mathfrak{R}_2\eta + \mathfrak{Q}_3\zeta), \\ \dfrac{d^2\eta}{dt^2} = -(\mathfrak{R}_1\xi + \mathfrak{M}_2\eta + \mathfrak{P}_3\zeta), \\ \dfrac{d^2\zeta}{dt^2} = -(\mathfrak{Q}_1\xi + \mathfrak{P}_2\eta + \mathfrak{N}_3\zeta), \end{array}\right.$$

en désignant les coefficients de ξ, η, ζ, par $-\mathfrak{L}_1$, $-\mathfrak{M}_2$, $-\mathfrak{N}_3$, $-\mathfrak{R}_1$, $-\mathfrak{P}_2$, $-\mathfrak{Q}_3$, $-\mathfrak{Q}_1$, $-\mathfrak{R}_2$, $-\mathfrak{P}_3$. Toutes ces quantités sont des polynomes entiers homogènes du second degré en u, v, w.

Si maintenant nous multiplions respectivement les trois équations (10) par $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, et si nous les ajoutons, après avoir posé

$$(11)\qquad \frac{\mathfrak{L}_1\mathfrak{A} + \mathfrak{R}_1\mathfrak{B} + \mathfrak{Q}_1\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}} = \frac{\mathfrak{R}_2\mathfrak{A} + \mathfrak{M}_2\mathfrak{B} + \mathfrak{P}_2\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{Q}_3\mathfrak{A} + \mathfrak{P}_3\mathfrak{B} + \mathfrak{N}_3\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}} = \mathfrak{s}^2$$

et

$$(12)\qquad \mathfrak{s} = \mathfrak{A}\xi + \mathfrak{B}\eta + \mathfrak{C}\zeta,$$

nous aurons

$$\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2} + s^2\mathfrak{z} = 0; \tag{13}$$

on en tire par l'intégration

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_0 \cos st + \mathfrak{z}_1 \frac{\sin st}{s}, \tag{14}$$

en désignant par $\mathfrak{z}_0$ et $\mathfrak{z}_1$ les valeurs initiales de $\mathfrak{z}$ et de $\frac{d\mathfrak{z}}{dt}$ pour $t = 0$.

Les équations (11) donnent

$$\left\{\begin{array}{l} (\mathcal{L}_1 - s^2)\mathcal{A} + \mathcal{R}_1\mathcal{B} + \mathcal{Q}_1\mathcal{C} = 0, \\ \mathcal{R}_2\mathcal{A} + (\mathcal{M}_2 - s^2)\mathcal{B} + \mathcal{P}_2\mathcal{C} = 0, \\ \mathcal{Q}_3\mathcal{A} + \mathcal{P}_3\mathcal{B} + (\mathcal{N}_3 - s^2)\mathcal{C} = 0. \end{array}\right. \tag{15}$$

On tire des deux premières

$$\mathcal{A} = \frac{-\mathcal{C}[\mathcal{Q}_1(\mathcal{M}_2 - s^2) - \mathcal{R}_1\mathcal{P}_2]}{(\mathcal{L}_1 - s^2)(\mathcal{M}_2 - s^2) - \mathcal{R}_1\mathcal{R}_2},$$
$$\mathcal{B} = \frac{-\mathcal{C}[\mathcal{P}_2(\mathcal{L}_1 - s^2) - \mathcal{Q}_1\mathcal{R}_2]}{(\mathcal{L}_1 - s^2)(\mathcal{M}_2 - s^2) - \mathcal{R}_1\mathcal{R}_2},$$

et par suite

$$\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{P}_2\mathcal{R}_1 - \mathcal{Q}_1(\mathcal{M}_2 - s^2)} = \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{Q}_1\mathcal{R}_2 - \mathcal{P}_2(\mathcal{L}_1 - s^2)} = \frac{\mathcal{C}}{(\mathcal{L}_1 - s^2)(\mathcal{M}_2 - s^2) - \mathcal{R}_1\mathcal{R}_2}, \tag{16}$$

substituant dans la troisième les quantités proportionnelles à $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, on aura, pour déterminer s^2,

$$\left\{\begin{array}{r} (\mathcal{L}_1 - s^2)(\mathcal{M}_2 - s^2)(\mathcal{N}_3 - s^2) - \mathcal{P}_2\mathcal{P}_3(\mathcal{L}_1 - s^2) - \mathcal{Q}_1\mathcal{Q}_3(\mathcal{M}_2 - s^2) \\ - \mathcal{R}_1\mathcal{R}_2(\mathcal{N}_3 - s^2) + \mathcal{R}_1\mathcal{P}_2\mathcal{Q}_3 + \mathcal{Q}_1\mathcal{R}_2\mathcal{P}_3 \end{array}\right\} = 0. \tag{17}$$

Cette équation est du troisième degré en s^2, elle aura trois racines s'^2, s''^2, s'''^2, qui donneront pour $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, trois systèmes de valeurs $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$, $\mathcal{A}''$, $\mathcal{B}''$, $\mathcal{C}''$, $\mathcal{A}'''$, $\mathcal{B}'''$, $\mathcal{C}'''$, et par suite trois valeurs de $\mathfrak{z}$:

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{z}' = \mathcal{A}'\xi + \mathcal{B}'\eta + \mathcal{C}'\zeta, \\ \mathfrak{z}'' = \mathcal{A}''\xi + \mathcal{B}''\eta + \mathcal{C}''\zeta, \\ \mathfrak{z}''' = \mathcal{A}'''\xi + \mathcal{B}'''\eta + \mathcal{C}'''\zeta. \end{array}\right. \tag{18}$$

En désignant par ξ_0, η_0, ζ_0, ξ_1, η_1, ζ_1, les valeurs initiales tirées des ex-

pressions (4) quand on fait $t = 0$ dans U, V, W, on aura pour les valeurs initiales des $\mathfrak{z}$ et des $\frac{d\mathfrak{z}}{dt}$:

$$(19)\quad \begin{cases} \mathfrak{z}'_0 = \mathfrak{A}'\xi_0 + \mathfrak{B}'\eta_0 + \mathfrak{C}'\zeta_0, \\ \mathfrak{z}''_0 = \mathfrak{A}''\xi_0 + \mathfrak{B}''\eta_0 + \mathfrak{C}''\zeta_0, \\ \mathfrak{z}'''_0 = \mathfrak{A}'''\xi_0 + \mathfrak{B}'''\eta_0 + \mathfrak{C}'''\zeta_0, \end{cases}$$

$$(20)\quad \begin{cases} \mathfrak{z}'_1 = \mathfrak{A}'\xi_1 + \mathfrak{B}'\eta_1 + \mathfrak{C}'\zeta_1, \\ \mathfrak{z}''_1 = \mathfrak{A}''\xi_1 + \mathfrak{B}''\eta_1 + \mathfrak{C}''\zeta_1, \\ \mathfrak{z}'''_1 = \mathfrak{A}'''\xi_1 + \mathfrak{B}'''\eta_1 + \mathfrak{C}'''\zeta_1, \end{cases}$$

et, en vertu de l'équation (14),

$$(21)\quad \begin{cases} \mathfrak{z}' = \mathfrak{z}'_0 \cos s't + \mathfrak{z}'_1 \dfrac{\sin s't}{s'}, \\ \mathfrak{z}'' = \mathfrak{z}''_0 \cos s''t + \mathfrak{z}'_1 \dfrac{\sin s''t}{s''}, \\ \mathfrak{z}''' = \mathfrak{z}'''_0 \cos s'''t + \mathfrak{z}'''_1 \dfrac{\sin s'''t}{s'''}. \end{cases}$$

D'ailleurs, des équations (18), on tire, par l'élimination, des expressions de la forme

$$(22)\quad \begin{cases} \xi = a'\mathfrak{z}' + a''\mathfrak{z}'' + a'''\mathfrak{z}''', \\ \eta = b'\mathfrak{z}' + b''\mathfrak{z}'' + b'''\mathfrak{z}''', \\ \zeta = c'\mathfrak{z}' + c''\mathfrak{z}'' + c'''\mathfrak{z}'''; \end{cases}$$

et comme ces valeurs doivent rendre identiques les équations (18), on en conclura les conditions suivantes :

$$(23)\quad \begin{cases} a'\mathfrak{A}' + b'\mathfrak{B}' + c'\mathfrak{C}' = 1, \\ a''\mathfrak{A}'' + b''\mathfrak{B}'' + c''\mathfrak{C}'' = 1, \\ a'''\mathfrak{A}''' + b'''\mathfrak{B}''' + c'''\mathfrak{C}''' = 1, \end{cases}$$

$$(24)\quad \begin{cases} \mathfrak{A}'a'' + \mathfrak{B}'b'' + \mathfrak{C}'c'' = 0, \\ \mathfrak{A}'a''' + \mathfrak{B}'b''' + \mathfrak{C}'c''' = 0, \\ \mathfrak{A}''a' + \mathfrak{B}''b' + \mathfrak{C}''c' = 0, \\ \mathfrak{A}''a''' + \mathfrak{B}''b''' + \mathfrak{C}''c''' = 0, \\ \mathfrak{A}'''a' + \mathfrak{B}'''b' + \mathfrak{C}'''c' = 0, \\ \mathfrak{A}'''a'' + \mathfrak{B}'''b'' + \mathfrak{C}'''c'' = 0. \end{cases}$$

Si l'on substituait les valeurs de $\mathfrak{z}'$, $\mathfrak{z}''$, $\mathfrak{z}'''$ des équations (18) dans les équations (22), on devrait aussi avoir des identités, d'où l'on conclurait encore

$$(25)\quad \begin{cases} a'\mathfrak{B}' + a''\mathfrak{B}'' + a'''\mathfrak{B}''' = 0, \\ a'\mathfrak{C}' + a''\mathfrak{C}'' + a'''\mathfrak{C}''' = 0, \\ b'\mathfrak{A}' + b''\mathfrak{A}'' + b'''\mathfrak{A}''' = 0, \\ b'\mathfrak{C}' + b''\mathfrak{C}'' + b'''\mathfrak{C}''' = 0, \\ c'\mathfrak{A}' + c''\mathfrak{A}'' + c'''\mathfrak{A}''' = 0, \\ c'\mathfrak{B}' + c''\mathfrak{B}'' + c'''\mathfrak{B}''' = 0. \end{cases}$$

$$(26)\quad \begin{cases} a'\mathfrak{A}' + a''\mathfrak{A}'' + a'''\mathfrak{A}''' = 1, \\ b'\mathfrak{B}' + b''\mathfrak{B}'' + b'''\mathfrak{B}''' = 1, \\ c'\mathfrak{C}' + c''\mathfrak{C}'' + c'''\mathfrak{C}''' = 1. \end{cases}$$

Si l'on prend les valeurs de $\mathfrak{x}'_0$, $\mathfrak{x}''_0$, $\mathfrak{x}'''_0$, $\mathfrak{x}'_1$, $\mathfrak{x}''_1$, $\mathfrak{x}'''_1$, dans les équations (19) et (20) pour les substituer dans les équations (21), et si l'on substitue ensuite les expressions de $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{x}''$, $\mathfrak{x}'''$, dans les équations (22), on aura

$$(27)\quad \begin{cases} \xi = (a'\mathfrak{A}'\cos s't + a''\mathfrak{A}''\cos s''t + a'''\mathfrak{A}'''\cos s'''t)\xi_0 + \left(a'\mathfrak{A}'\dfrac{\sin s't}{s'} + a''\mathfrak{A}''\dfrac{\sin s''t}{s''} + a'''\mathfrak{A}'''\dfrac{\sin s'''t}{s'''}\right)\xi_1 \\ \quad + (a'\mathfrak{B}'\cos s't + a''\mathfrak{B}''\cos s''t + a'''\mathfrak{B}'''\cos s'''t)\eta_0 + \left(a'\mathfrak{B}'\dfrac{\sin s't}{s'} + a''\mathfrak{B}''\dfrac{\sin s''t}{s''} + a'''\mathfrak{B}'''\dfrac{\sin s'''t}{s'''}\right)\eta_1 \\ \quad + (a'\mathfrak{C}'\cos s't + a''\mathfrak{C}''\cos s''t + a'''\mathfrak{C}'''\cos s'''t)\zeta_0 + \left(a'\mathfrak{C}'\dfrac{\sin s't}{s'} + a''\mathfrak{C}''\dfrac{\sin s''t}{s''} + a'''\mathfrak{C}'''\dfrac{\sin s'''t}{s}\right)\zeta_1. \\ \eta = (b'\mathfrak{A}'\cos s't + b''\mathfrak{A}''\cos s''t + b'''\mathfrak{A}'''\cos s'''t)\xi_0 + \left(b'\mathfrak{A}'\dfrac{\sin s't}{s'} + b''\mathfrak{A}''\dfrac{\sin s''t}{s''} + b'''\mathfrak{A}'''\dfrac{\sin s'''t}{s'''}\right)\xi_1 \\ \quad + (b'\mathfrak{B}'\cos s't + b''\mathfrak{B}''\cos s''t + b'''\mathfrak{B}'''\cos s'''t)\eta_0 + \left(b'\mathfrak{B}'\dfrac{\sin s't}{s'} + b''\mathfrak{B}''\dfrac{\sin s''t}{s''} + b'''\mathfrak{B}'''\dfrac{\sin s'''t}{s'''}\right)\eta_1 \\ \quad + (b'\mathfrak{C}'\cos s't + b''\mathfrak{C}''\cos s''t + b'''\mathfrak{C}'''\cos s'''t)\zeta_0 + \left(b'\mathfrak{C}'\dfrac{\sin s't}{s'} + b''\mathfrak{C}''\dfrac{\sin s''t}{s''} + b'''\mathfrak{C}'''\dfrac{\sin s'''t}{s}\right)\zeta_1. \\ \zeta = (c'\mathfrak{A}'\cos s't + c''\mathfrak{A}''\cos s''t + c'''\mathfrak{A}'''\cos s'''t)\xi_0 + \left(c'\mathfrak{A}'\dfrac{\sin s't}{s'} + c''\mathfrak{A}''\dfrac{\sin s''t}{s''} + c'''\mathfrak{A}'''\dfrac{\sin s'''t}{s}\right)\xi_1 \\ \quad + (c'\mathfrak{B}'\cos s't + c''\mathfrak{B}''\cos s''t + c'''\mathfrak{B}'''\cos s'''t)\eta_0 + \left(c'\mathfrak{B}'\dfrac{\sin s't}{s'} + c''\mathfrak{B}''\dfrac{\sin s''t}{s''} + c'''\mathfrak{B}'''\dfrac{\sin s'''t}{s}\right)\eta_1 \\ \quad + (c'\mathfrak{C}'\cos s't + c''\mathfrak{C}''\cos s''t + c'''\mathfrak{C}'''\cos s'''t)\zeta_0 + \left(c'\mathfrak{C}'\dfrac{\sin s't}{s'} + c''\mathfrak{C}''\dfrac{\sin s''t}{s''} + c'''\mathfrak{C}'''\dfrac{\sin s'''t}{s''}\right)\zeta_1. \end{cases}$$

Si l'on fait $t = 0$, les conditions initiales sont remplies en vertu des équations de conditions (25) et (26).

4. Pour former les valeurs de ξ, η, ζ, on peut mettre tant de termes qu'on voudra de même forme, même une infinité de termes, tous les éléments d'intégrales définies propres à représenter les valeurs initiales de ξ, η, ζ, $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$, pour $t = 0$.

On pourra donc écrire :

$$
(28)\quad
\begin{cases}
\xi = \dfrac{1}{8\pi^3}\displaystyle\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int e^{[u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)]\sqrt{-1}}\Big[(a'\mathfrak{A}'\cos s't+a''\mathfrak{A}''\cos s''t+a'''\mathfrak{A}'''\cos s'''t)\,f_1(\lambda,\mu,\nu) \\
\qquad +(a'\mathfrak{B}'\cos s't+a''\mathfrak{B}''\cos s''t+a'''\mathfrak{B}'''\cos s'''t)\,f_2(\lambda,\mu,\nu) \\
\qquad +(a'\mathfrak{C}'\cos s't+a''\mathfrak{C}''\cos s''t+a'''\mathfrak{C}'''\cos s'''t)\,f_3(\lambda,\mu,\nu) \\
\qquad +\left(a'\mathfrak{A}'\dfrac{\sin s't}{s'}+a''\mathfrak{A}''\dfrac{\sin s''t}{s''}+a'''\mathfrak{A}'''\dfrac{\sin s'''t}{s'''}\right)\mathfrak{f}_1(\lambda,\mu,\nu) \\
\qquad +\left(a'\mathfrak{B}'\dfrac{\sin s't}{s'}+a''\mathfrak{B}''\dfrac{\sin s''t}{s''}+a'''\mathfrak{B}'''\dfrac{\sin s'''t}{s'''}\right)\mathfrak{f}_2(\lambda,\mu,\nu) \\
\qquad +\left(a'\mathfrak{C}'\dfrac{\sin s't}{s'}+a''\mathfrak{C}''\dfrac{\sin s''t}{s''}+a'''\mathfrak{C}'''\dfrac{\sin s'''t}{s'''}\right)\mathfrak{f}_3(\lambda,\mu,\nu)\Big]\,du\,dv\,dw\,d\lambda\,d\mu\,d\nu. \\[2ex]
\eta = \dfrac{1}{8\pi^3}\displaystyle\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int e^{[u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)]\sqrt{-1}}\Big[(b'\mathfrak{A}'\cos s't+b''\mathfrak{A}''\cos s''t+b'''\mathfrak{A}'''\cos s'''t)\,f_1(\lambda,\mu,\nu) \\
\qquad +(b'\mathfrak{B}'\cos s't+b''\mathfrak{B}''\cos s''t+b'''\mathfrak{B}'''\cos s'''t)\,f_2(\lambda,\mu,\nu) \\
\qquad +(b'\mathfrak{C}'\cos s't+b''\mathfrak{C}''\cos s''t+b'''\mathfrak{C}'''\cos s'''t)\,f_3(\lambda,\mu,\nu) \\
\qquad +\left(b'\mathfrak{A}'\dfrac{\sin s't}{s'}+b''\mathfrak{A}''\dfrac{\sin s''t}{s''}+b'''\mathfrak{A}'''\dfrac{\sin s'''t}{s'''}\right)\mathfrak{f}_1(\lambda,\mu,\nu) \\
\qquad +\left(b'\mathfrak{B}'\dfrac{\sin s't}{s'}+b''\mathfrak{B}''\dfrac{\sin s''t}{s''}+b'''\mathfrak{B}'''\dfrac{\sin s'''t}{s'''}\right)\mathfrak{f}_2(\lambda,\mu,\nu) \\
\qquad +\left(b'\mathfrak{C}'\dfrac{\sin s't}{s'}+b''\mathfrak{C}''\dfrac{\sin s''t}{s''}+b'''\mathfrak{C}'''\dfrac{\sin s'''t}{s'''}\right)\mathfrak{f}_3(\lambda,\mu,\nu)\Big]\,du\,dv\,dw\,d\lambda\,d\mu\,d\nu, \\[2ex]
\zeta = \dfrac{1}{8\pi^3}\displaystyle\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int e^{[u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)]\sqrt{-1}}\Big[(c'\mathfrak{A}'\cos s't+c''\mathfrak{A}''\cos s''t+c'''\mathfrak{A}'''\cos s'''t)\,f_1(\lambda,\mu,\nu) \\
\qquad +(c'\mathfrak{B}'\cos s't+c''\mathfrak{B}''\cos s''t+c'''\mathfrak{B}'''\cos s'''t)\,f_2(\lambda,\mu,\nu) \\
\qquad +(c'\mathfrak{C}'\cos s't+c''\mathfrak{C}''\cos s''t+c'''\mathfrak{C}'''\cos s'''t)\,f_3(\lambda,\mu,\nu) \\
\qquad +\left(c'\mathfrak{A}'\dfrac{\sin s't}{s'}+c''\mathfrak{A}''\dfrac{\sin s''t}{s''}+c'''\mathfrak{A}'''\dfrac{\sin s'''t}{s'''}\right)\mathfrak{f}_1(\lambda,\mu,\nu) \\
\qquad +\left(c'\mathfrak{B}'\dfrac{\sin s't}{s'}+c''\mathfrak{B}''\dfrac{\sin s''t}{s''}+c'''\mathfrak{B}'''\dfrac{\sin s'''t}{s'''}\right)\mathfrak{f}_2(\lambda,\mu,\nu) \\
\qquad +\left(c'\mathfrak{C}'\dfrac{\sin s't}{s'}+c''\mathfrak{C}''\dfrac{\sin s''t}{s''}+c'''\mathfrak{C}'''\dfrac{\sin s'''t}{s'''}\right)\mathfrak{f}_3(\lambda,\mu,\nu)\Big]\,du\,dv\,dw\,d\lambda\,d\mu\,d\nu.
\end{cases}
$$

Toutes les intégrales sont prises de $-\infty$ à $+\infty$.

5. On peut facilement vérifier que ces formules satisfont aux équations (1). En effet, à cause de l'exponentielle commune, si l'on substitue pour ξ, η, ζ leurs valeurs, les quantités $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{N}_3$, $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}_3$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$, se reproduiront, et les termes affectés de $\cos s't$ disparaîtront, si l'on a

$$29 \qquad \begin{cases} a's'^2 = \mathfrak{L}_1 a' + \mathfrak{R}_2 b' + \mathfrak{Q}_3 c', \\ b's'^2 = \mathfrak{R}_1 a' + \mathfrak{M}_2 b' + \mathfrak{P}_3 c', \\ c's'^2 = \mathfrak{Q}_1 a' + \mathfrak{P}_2 b' + \mathfrak{N}_3 c'. \end{cases}$$

Or, les équations (15) doivent être satisfaites par les quantités $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, s'; on aura donc

$$30 \qquad \begin{cases} \mathfrak{L}_1 \mathfrak{A}' + \mathfrak{R}_1 \mathfrak{B}' + \mathfrak{Q}_1 \mathfrak{C}' = \mathfrak{A}' s'^2, \\ \mathfrak{R}_2 \mathfrak{A}' + \mathfrak{M}_2 \mathfrak{B}' + \mathfrak{P}_2 \mathfrak{C}' = \mathfrak{B}' s'^2, \\ \mathfrak{Q}_3 \mathfrak{A}' + \mathfrak{P}_3 \mathfrak{B}' + \mathfrak{N}_3 \mathfrak{C}' = \mathfrak{C}' s'^2. \end{cases}$$

Si l'on multiplie respectivement par a', b', c', et si l'on a égard à la première des conditions (23), on trouve, en ajoutant

$$(31)\quad (\mathfrak{L}_1 a' + \mathfrak{R}_2 b' + \mathfrak{Q}_3 c')\mathfrak{A}' + (\mathfrak{R}_1 a' + \mathfrak{M}_2 b' + \mathfrak{P}_3 c')\mathfrak{B}' + (\mathfrak{Q}_1 a' + \mathfrak{P}_2 b' + \mathfrak{N}_3 c')\mathfrak{C}' = s'^2.$$

On a aussi

$$32 \qquad \begin{cases} \mathfrak{L}_1 \mathfrak{A}'' + \mathfrak{R}_1 \mathfrak{B}'' + \mathfrak{Q}_1 \mathfrak{C}'' = \mathfrak{A}'' s''^2, \\ \mathfrak{R}_2 \mathfrak{A}'' + \mathfrak{M}_2 \mathfrak{B}'' + \mathfrak{P}_2 \mathfrak{C}'' = \mathfrak{B}'' s''^2, \\ \mathfrak{Q}_3 \mathfrak{A}'' + \mathfrak{P}_3 \mathfrak{B}'' + \mathfrak{N}_3 \mathfrak{C}'' = \mathfrak{C}'' s''^2. \end{cases}$$

Multipliant respectivement par a', b', c', ajoutant et ayant égard à la troisième des conditions (24), on trouve

$$(33)\quad (\mathfrak{L}_1 a' + \mathfrak{R}_2 b' + \mathfrak{Q}_3 c')\mathfrak{A}'' + (\mathfrak{R}_1 a' + \mathfrak{M}_2 b' + \mathfrak{P}_3 c')\mathfrak{B}'' + (\mathfrak{Q}_1 a' + \mathfrak{P}_2 b' + \mathfrak{N}_3 c')\mathfrak{C}'' = 0.$$

de même on trouvera

$$(34)\quad (\mathfrak{L}_1 a' + \mathfrak{R}_2 b' + \mathfrak{Q}_3 c')\mathfrak{A}''' + (\mathfrak{R}_1 a' + \mathfrak{M}_2 b' + \mathfrak{P}_3 c')\mathfrak{B}''' + (\mathfrak{Q}_1 a' + \mathfrak{P}_2 b' + \mathfrak{N}_3 c')\mathfrak{C}''' = 0.$$

Si maintenant on multiplie les équations (31), (33), (34), respectivement par a', a'', a''', et si l'on ajoute; en vertu de la première des équations (26) et des deux premières des équations (25), on aura

$$\mathfrak{L}_1 a' + \mathfrak{R}_2 b' + \mathfrak{Q}_3 c' = a' s'^2.$$

C'est la première des équations (29). On démontrera sans peine les autres. On voit par là que a', b', c', comme $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, satisfont à des

équations de même forme que les équations (15), mais qui ne sont pas les équations (15).

On obtiendra des résultats analogues pour a'', b'', c'', a''', b''', c'''.

Il suit de là que les rapports des quantités a', b', c', sont déterminés comme ceux des quantités $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$; mais ces quantités elles-mêmes ne le sont pas. En effet, si dans les équations de condition (23) on fait varier $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, dans un certain rapport, il faudra que a', b', c', varient dans un rapport inverse. Il en sera de même pour $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{B}''$, $\mathfrak{C}''$ et a'', b'', c'', pour $\mathfrak{A}'''$, $\mathfrak{B}'''$, $\mathfrak{C}'''$ et a''', b''', c'''; et alors toutes les équations de condition (24) seront aussi satisfaites. Admettons que toutes ces quantités soient réelles, comme on le verra plus tard;

On peut, si l'on veut, fixer les valeurs de toutes ces quantités en prenant

$$(35)\quad a'^2+b'^2+c'^2=1,\quad a''^2+b''^2+c''^2=1,\quad a'''^2+b'''^2+c'''^2=1.$$

On peut concevoir une droite menée par l'origine, de manière à faire avec les axes coordonnés des angles dont les cosinus soient a', b', c', et deux autres droites déterminées comme la première par les valeurs de a'', b'', c'', a''', b''', c'''. On aura ainsi trois nouveaux axes, obliques en général.

Remarquons maintenant que s', s'', s''', en vertu de l'équation (17) et de la composition des coefficients $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{Q}_3$, $\mathfrak{R}_3$, $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{T}_2$, sont des fonctions homogènes du premier degré en u, v, w. En vertu des équations (35) et d'équations telles que les équations (29), a', b', c', a'', b'', c'', a''', b''', c''', sont des fonctions homogènes de degré nul. Il en est de même des quantités $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{B}''$, $\mathfrak{C}''$, $\mathfrak{A}'''$, $\mathfrak{B}'''$, $\mathfrak{C}'''$. De plus, à cause des équations (35), les quantités a', b', c', a'', etc., ne seront jamais infinies; il en sera de même de $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{A}''$, etc.; car, si par exemple $\mathfrak{A}'$ était infini, $\mathfrak{B}'$ et $\mathfrak{C}'$ le seraient en même temps à cause de leurs rapports constants avec $\mathfrak{A}'$, et a', b', c' seraient simultanément nuls, à cause de la première des équations (23), et ne pourraient satisfaire à la première des équations (35).

6. On peut vérifier que les expressions (28) satisfont aux conditions initiales, pourvu que $f_1(x, y, z)$, $f_2(x, y, z)$, $f_3(x, y, z)$, $\mathrm{f}_1(x, y, z)$, $\mathrm{f}_2(x, y, z)$, $\mathrm{f}_3(x, y, z)$ soient les valeurs de ξ, η, ζ, $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ pour $t=0$

En effet, si l'on pose $t = 0$ dans les formules (28), les sinus deviennent nuls; les cosinus prennent la valeur 1. Dans la valeur de ξ le coefficient de $f_1(\lambda, \mu, \nu)$ devient égal à 1; les coefficients des autres fonctions s'évanouissent en vertu des équations de condition (23) et (24). Donc, d'après la formule de Fourier étendue à trois variables, ξ se réduit à $f_1(x, y, z)$, qui est sa valeur initiale. Il est facile de voir que $\frac{d\xi}{dt}$ se réduit à $f_1(x, y, z)$, parce que les sinus et cosinus se changent en cosinus et sinus par la différentiation. La vérification est la même pour η et ζ.

7. Cela posé, pour interpréter les expressions (28) dans leur état général, nous observerons que les diverses parties des intégrales sont de la forme

$$(36)\qquad \frac{1}{8\pi^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu))\sqrt{-1}}\,\omega\cos st\, f(\lambda, \mu, \nu)\, du\, dv\, dw\, d\lambda\, d\mu\, d\nu,$$

ou

$$(37)\qquad \frac{1}{8\pi^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu))\sqrt{-1}}\,\omega\frac{\sin st}{s} f(\lambda, \mu, \nu)\, du\, dv\, dw\, d\lambda\, d\mu\, d\nu;$$

cette dernière revient à

$$(38)\qquad \frac{1}{8\pi^3}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu))\sqrt{-1}}\,\omega\cos st\, f(\lambda, \mu, \nu)\, du\, dv\, dw\, d\lambda\, d\mu\, d\nu\, dt$$

Il suffit donc de considérer d'abord l'intégrale (36) dans laquelle $f(\lambda, \mu, \nu)$ désigne une fonction quelconque des variables λ, μ, ν; s et ω des fonctions homogènes de u, v, w: la première du premier degré, la seconde de degré nul.

Posons

$$(39)\qquad \begin{cases} x - \lambda = \alpha\rho = \rho\cos\varpi, \\ y - \mu = \beta\rho = \rho\sin\varpi\cos\theta, \\ z - \nu = \gamma\rho = \rho\sin\varpi\sin\theta; \end{cases}$$

ρ sera le rayon vecteur mené du point (x, y, z) au point dont les coordonnées sont λ, μ, ν; $\varpi + \pi$ sera l'angle qu'il fait avec l'axe des x; θ l'angle que fait avec le plan des x, y, le plan qui passe par l'axe des x et par le rayon vecteur; α, β, γ, désigneront les cosinus des angles du rayon vecteur avec les axes des x, des y, des z, pris en signes contraires.

Transformons encore les quantités u, v, w, regardées comme les coordonnées rectangulaires d'un point en d'autres coordonnées rectangulaires, et remplaçons

$$(40)\quad \begin{cases} u \text{ par } \alpha u + \alpha' v + \alpha'' w, \\ v \text{ par } \beta u + \beta' v + \beta'' w, \\ w \text{ par } \gamma u + \gamma' v + \gamma'' w. \end{cases}$$

La quantité $u(x-\lambda) + v(y-\mu) + w(z-\nu)$ deviendra ρu. En désignant pour abréger par $\chi(\rho)$ ce que devient $f(\lambda, \mu, \nu)$, nous aurons

$$(41)\quad f(x-\alpha\rho,\ y-\beta\rho,\ z-\gamma\rho) = \chi(\rho),$$

et l'intégrale (36) prendra la forme

$$(42)\quad \frac{1}{8\pi^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tu\sqrt{-1}}\,\omega\cos st\,\chi(\rho)\,\rho^2\,du\,d\rho\,d\varphi\,d\theta\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta,$$

dans laquelle ω et s seront des fonctions homogènes en u, v, w, de même degré qu'avant la transformation.

Soient maintenant

$$(43)\quad v = pu,\quad w = qu,\quad dv = udp,\quad dw = udq;$$

on aura, à cause de l'homogénéité selon le signe de u,

$$(44)\quad s = \pm nu,\quad \omega = m;\qquad [*]$$

n et m désigneront des fonctions de p et q seulement. L'intégrale deviendra

$$(45)\quad \frac{1}{8\pi^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tu\sqrt{-1}}\,m\cos unt\,\chi(\rho)\,\rho^2 u^2\,dp\,dq\,du\,d\rho\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta.$$

---

[*] A cause de la forme des quantités $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{P}_1$.... , par la transformation indiquée, ce sera le facteur u^2 qui deviendra commun à tous les termes. Par suite, d'après l'équation (17), s sera véritablement de la forme $n(u^2)^{\frac{1}{2}}$. On devra donc prendre $+nu$ quand u sera positif, $-nu$ s'il est négatif. De même, à cause des équations (35), ω, qui représente des quantités de la forme $a\mathfrak{A}$, $a\mathfrak{B}$, sera de la forme $m(u^2)^0 = m$, dans tous les cas.

On peut se débarrasser du facteur u^2 en écrivant sous la forme

$$46 \quad \frac{-1}{8\pi^3}\frac{d^2}{dt^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iu\sqrt{-1}}\, m\cos(unt)\,\chi\left(\frac{\rho^2}{n^2}\right) du\,d\rho\,dq\,d\theta\,\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta;$$

on a

$$e^{iu\sqrt{-1}} = \cos\rho u + \sqrt{-1}\,.\,\sin\rho u,$$

$$e^{iu\sqrt{-1}}\cos(unt) = \cos\rho u\cos unt + \sqrt{-1}\,\sin\rho u\cos unt.$$

$$\cos\rho u\cos unt = \frac{\cos u(\rho - nt) + \cos u(\rho + nt)}{2}.$$

La partie imaginaire disparaîtra de l'intégrale parce que u entre $-\infty$ et $+\infty$ donnera pour $\sin u$ des valeurs égales et de signes contraires. Les éléments de l'intégrale multipliée par $\sqrt{-1}$ se détruiront deux à deux, et l'on aura, au lieu de l'intégrale (46), la somme de ces deux autres :

$$47 \quad -\frac{d^2}{dt^2}\frac{1}{16\pi^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cos u(\rho - nt)\frac{m\rho^2}{n^2}\chi\left(\frac{\rho^2}{n^2}\right) du\,d\rho\,dq\,d\theta\,\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta,$$

$$48 \quad -\frac{d^2}{dt^2}\frac{1}{16\pi^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cos u(\rho + nt)\frac{m\rho^2}{n^2}\chi\left(\frac{\rho^2}{n^2}\right) du\,d\rho\,dq\,d\theta\,\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta.$$

Si dans la première, nous considérons seulement les intégrations relatives à u et à ρ, nous aurons par la formule de Fourier,

$$49 \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cos u(\rho - nt)\frac{\rho^2}{n^2}\chi\left(\frac{\rho^2}{n^2}\right) du\,d\rho = t^2\chi(nt),$$

et l'intégrale (47) deviendra

$$50 \qquad -\frac{d^2}{dt^2}\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} t^2 m\chi(nt)\,d\rho\,dq\,\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta.$$

Si dans l'intégrale (49) on remplace $\rho - nt$ par $\rho + nt$ sous le signe cos, elle s'évanouit, parce que la valeur $\rho = -nt$ n'est pas comprise entre les limites de l'intégration par rapport à ρ. Ainsi l'intégrale (48) disparaît, et l'intégrale (50) représente toute la valeur de l'intégrale (46). Il faut réduire encore l'intégrale quadruple.

8. Pour y parvenir, observons que les racines s'^2, s''^2, s'''^2 de l'équa-

tion (17) doivent être réelles et positives pour toutes les valeurs de u, v, w; autrement, la propagation n'aurait pas lieu; car les cosinus et sinus de l'un des arcs $s't$, $s''t$, $s'''t$, se transformeraient en exponentielles réelles et croîtraient indéfiniment avec le temps; par suite les quantités ξ, η, ζ, ne resteraient pas très petites, ce qui est contraire aux conditions de la mise en équation. Si donc nous laissons s^2 pour désigner l'une quelconque des trois racines, nous aurons

$$(51) \qquad s = F(u, v, w),$$

et la fonction F prendra une valeur réelle pour toute valeur de u, v, w; par la transformation $v = pu$, $w = qu$, nous aurons

$$(52) \qquad s = \pm uF(1, p, q), \quad n = F(1, p, q);$$

donc

$$(53) \qquad nt = tF(1, p, q), \qquad nt = F(t, tp, tq).$$

Observons encore que si l'on regarde u, v, w, comme les coordonnées rectangulaires d'un même point de l'espace, et si l'on fait la quantité s constante, l'équation (51) représente une surface qu'un rayon vecteur mené de l'origine ne peut rencontrer qu'en un point; car si l'on prend $u = a\tau$, $v = b\tau$, $w = c\tau$, on aura

$$(54) \qquad s = \tau F(a, b, c), \quad \tau = \frac{s}{F(a, b, c)}.$$

Il n'y aura qu'une valeur de τ pour chaque système de valeurs de a, b, c.

Toutes les surfaces ainsi comprises dans l'équation (51) sont semblables entre elles; et en vertu de l'équation (54) il en peut passer une par chaque point de l'espace; car il existera toujours une valeur de s convenable pour que τ devienne le rayon vecteur de tel point qu'on voudra dans la direction déterminée par les cosinus a, b, c.

On peut remarquer aussi que s a une valeur finie pour des valeurs finies de u, v, w. Il suffit pour s'en convaincre de considérer la forme de l'équation (17). Donc, $F(a, b, c)$ n'aura jamais une valeur infinie.

D'après ces considérations, les surfaces comprises dans l'équation (51) peuvent entrer dans un système de coordonnées et servir à transformer les intégrales. Nous pouvons concevoir que chaque point de l'espace soit déterminé : 1° par une surface comprise dans l'équation (51), pour

une certaine valeur de s qui sera l'une des coordonnées; 2° par un plan perpendiculaire à l'axe des u; 3° par une coordonnée quelconque prise dans ce plan. En effet, la coordonnée s et la coordonnée u détermineront une ligne courbe, et la troisième coordonnée déterminera un point sur cette ligne courbe.

Entre quelles limites ces coordonnées devront-elles varier pour étendre une intégrale triple à tous les points de l'espace? Si l'on regarde d'abord comme constantes les coordonnées u et s, la troisième coordonnée, quelle qu'elle soit, devra varier entre des limites telles qu'elles donnent tous les points de la courbe d'intersection; si l'on fait varier ensuite la coordonnée u, on aura toutes les intersections de la surface par un plan perpendiculaire aux u, et cette coordonnée devra être comprise entre les valeurs qui déterminent parmi ces plans, les deux plans tangents extrêmes; on devrait encore partager l'intégrale pour toutes les valeurs de u qui rendraient le plan tangent à la surface des u, v, w. On aura ainsi tous les points de cette surface. Enfin, en faisant passer s de 0 à ∞, la surface passera par tous les points de l'espace [*].

On pourrait encore s'y prendre autrement. Après avoir obtenu tous les points de la courbe d'intersection par la variation de la troisième coordonnée, on pourrait faire varier s; alors la courbe s'agrandirait ou se rétrécirait dans son plan. Elle se réduirait en général à un point, si la valeur de s était une de celles qui correspondent au contact. Pour $s = \infty$, elle s'étendrait à l'infini; il faudrait donc faire varier s depuis la plus petite valeur qui donne un contact jusqu'à ∞; on devrait aussi, dans certains cas, partager l'intégrale pour les contacts intermédiaires s'il y avait solution de continuité. Enfin, il faudrait faire varier u de $-\infty$ à ∞ pour que le plan parcourût tout l'espace.

Si nous faisons $u = t$, nous aurons

$$s = F(t, v, w). \tag{55}$$

Si nous reprenons $v = tp$, $w = tq$, nous aurons

$$nt = F(t, tp, tq) = F(t, v, w); \tag{56}$$

---

[*] Cette manière de prendre les limites se rapporterait à une autre méthode pour traiter la question. J'ai préféré la deuxième dans la suite du Mémoire, parce qu'elle mène un peu plus rapidement au même résultat que la première.

et si nous remplaçons nt par s, pour abréger, l'intégrale (56) deviendra

$$(57)\qquad -\frac{d^2}{dt^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\omega\chi\, s\, dv\, dw \sin\varpi\, d\varpi\, d\theta.$$

v et ϖ sont composées comme précédemment, excepté que u est remplacé par t.

Or, on peut concevoir que v et w soient deux coordonnées rectangulaires qui déterminent tous les points du plan dont l'équation est $u = t$. Pour transformer l'intégrale, on peut déterminer autrement la position de ces points. Nous imaginerons qu'on prenne s pour l'une des coordonnées. Chaque valeur de s déterminera une courbe dont l'équation sera $s = F(t, v, w)$, et qui sera l'intersection du plan $u = t$ avec la surface $s = F(u, v, w)$. La portion du plan $u = t$ comprise entre deux courbes correspondantes à s et à $s + ds$, sera la différentielle de l'aire de la courbe correspondante à la valeur de s que l'on considère. Soit cette aire représentée par σ, sa différentielle sera $\frac{d\sigma}{ds}ds$. Cette portion de surface infiniment petite sera partagée par la seconde coordonnée, quelle qu'elle soit, en parties que nous pouvons représenter par $\delta\frac{d\sigma}{ds}ds$. Tel sera l'élément différentiel de la surface du plan $u = t$. Cet élément devra remplacer $dv\, dw$. L'intégration relative à s devra s'étendre depuis la plus petite valeur de s pour laquelle la surface donnée par l'équation (51) touche le plan $u = t$, jusqu'à $s = \infty$. La plus petite valeur que l'on puisse donner à s satisfera en général aux conditions

$$(58)\qquad \frac{ds}{dv} = 0,\quad \frac{ds}{dw} = 0,$$

qui donneront pour v et w, et par suite pour s, des valeurs proportionnelles à t; on aura donc une expression de la forme $s = Nt$ pour la plus petite valeur de s. D'ailleurs l'intégration qui se rapporte à δ doit être étendue à tout le contour de la courbe dont l'équation est

$$(59)\qquad s = F(t, v, w),$$

dans le plan $u = t$.

L'intégrale (57) deviendra ainsi

$$(60)\qquad -\frac{d^2}{dt^2}\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{Nt}^{\infty}\int\varpi\chi\, s\,\delta\frac{d\sigma}{ds}ds \sin\varpi\, d\varpi\, d\theta;$$

ω est maintenant une fonction homogène de degré nul de t, s, et de la coordonnée à laquelle se rapporte la caractéristique δ.

Soit maintenant l'intégrale définie

$$61 \qquad \int \omega \delta \frac{d\sigma}{ds} = \varphi(t, s),$$

$\varphi(t,s)$ sera une fonction homogène du premier degré en t et en s. L'intégrale (60) deviendra

$$62 \qquad -\frac{d^2}{dt^2}\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{Nt}^{\infty}\chi(s)\varphi(t, s)\,ds\,\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta.$$

Si l'on effectue la double différentiation indiquée, et si, pour abréger, on pose

$$63 \qquad \frac{d\varphi(t,s)}{dt} = \varphi'(t, s), \qquad \frac{d^2\varphi(t,s)}{dt^2} = \varphi''(t, s);$$

si, de plus, on observe que les principes de l'homogénéité donnent

$$64 \qquad \varphi(t, Nt) = t\varphi(1, N), \quad \varphi'(t, Nt) = \varphi'(1, N), \quad \varphi''(t, Nt) = \frac{1}{t}\varphi''(1, N),$$

on trouvera, au lieu de l'intégrale (62), l'expression

$$65 \quad \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}N\left[t\frac{d\chi(Nt)}{dt}\varphi(1,N) + \chi(Nt)\varphi(1,N) + \chi(Nt)\varphi'(1,N) - \int_{Nt}^{\infty}\frac{1}{N}\chi(s)\varphi''(t,s)\,ds\right]\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta.$$

Si l'on fait $s = ts'$, on aura

$$66 \qquad \int_{Nt}^{\infty}\chi(s)\varphi''(t, s)\,ds = \int_{N}^{\infty}\chi(ts')\varphi''(1, s')\frac{ds'}{t},$$

et par suite l'intégrale (65) sera remplacée par la somme des quatre intégrales suivantes :

$$67 \quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}Nt\varphi(1, N)\frac{d}{dt}\chi(Nt)\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta \\ &+\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}N\varphi(1, N)\chi(Nt)\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta \\ &+\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}N\varphi'(1, N)\chi(Nt)\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta \\ &-\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_N^{\infty}\frac{1}{t}\chi(ts')\varphi''(1, s')\,ds'\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta. \end{aligned}\right.$$

Telle est la réduction de l'intégrale (36).

9. L'intégrale (38) à laquelle se ramène l'intégrale (37), ne sera pas plus difficile à obtenir. On aura un résultat de même forme que l'intégrale (65) qu'il faudra multiplier par dt, et intégrer depuis o jusqu'à t. Il suffira donc de faire la même opération sur chacune des intégrales (67).

10. Nous allons maintenant examiner les intégrales dans le cas où l'ébranlement initial aurait été circonscrit dans une certaine portion de l'espace autour de l'origine des coordonnées, et où le temps t serait devenu très grand [*].

Pour introduire cette condition dans le calcul, nous concevrons que les fonctions arbitraires s'évanouissent toutes les fois que les variables se rapporteront à un point situé hors des limites de l'ébranlement primitif. Ainsi $f(x, y, z)$, par exemple, aura une valeur très petite entre ces limites et nulle au-delà.

Si pour savoir quels sont les points de l'espace en mouvement apres le temps t, nous prenons les expressions de $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$, les intégrales de la forme (67) y donneront des intégrales de la forme

$$(68)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{N}t\varphi(1, \mathrm{N})\frac{d^2}{dt^2}\chi(\mathrm{N}t)\sin\varpi\, d\varpi\, d\theta,\\
&\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{N}\varphi(1, \mathrm{N})\frac{d.}{dt}\chi(\mathrm{N}t)\sin\varpi\, d\varpi\, d\theta,\\
&\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{N}\varphi'(1, \mathrm{N})\frac{d.}{dt}\chi(\mathrm{N}t)\sin\varpi\, d\varpi\, d\theta,\\
-&\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{\mathrm{N}}^{\infty}\frac{1}{t}\frac{d.}{dt}\chi(ts')\varphi''(1, s')\,ds'\sin\varpi\, d\varpi\, d\theta,\\
+&\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{\mathrm{N}}^{\infty}\frac{1}{t^2}\chi(ts')\varphi''(1, s')\,ds'\sin\varpi\, d\varpi\, d\theta.
\end{aligned}\right.$$

D'après la remarque du n° **9**, l'intégrale (37) ou (38) donnera des expressions analogues. Il y aura seulement une différentiation de moins par rapport au temps.

---

[*] A proprement parler, c'est la quantité $\mathrm{N}t$ que l'on regarde comme très grande et comparable à une très grande distance r de l'origine à un point (x, y, z). Il sera aisé de s'en apercevoir.

Si nous nous bornons à la partie la plus considérable de ces expressions, à celle qui contient le temps en facteur, nous aurons à considérer seulement des expressions de la forme

$$(69)\qquad \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{N}t\,\varphi(1, \mathrm{N})\,\frac{d^2}{dt^2}\chi(\mathrm{N}t)\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta,$$

ou

$$(70)\qquad \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{N}t\,\varphi(1, \mathrm{N})\,\frac{d}{dt}\chi(\mathrm{N}t)\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta;$$

or, d'après l'équation (41), la fonction

$$(71)\qquad \chi(\mathrm{N}t) = f(x-\alpha\mathrm{N}t,\ y-\beta\mathrm{N}t,\ z-\gamma\mathrm{N}t).$$

Elle n'aura de valeur qu'autant que les quantités $x-\alpha\mathrm{N}t$, $y-\beta\mathrm{N}t$, $z-\gamma\mathrm{N}t$, considérées comme trois coordonnées λ, μ, ν, seront comprises entre les limites de l'ébranlement primitif; mais après la transformation des λ, μ, ν en ρ, ϖ et θ, les valeurs de ρ, ϖ et θ doivent être comprises entre des limites qui se rapportent à la même partie de l'espace pour que la fonction $\chi(\rho)$ ne soit pas nulle. D'après cela, si pour des valeurs attribuées à ϖ et θ de manière à ce que le rayon vecteur traverse la partie de l'espace où s'est fait l'ébranlement primitif, la quantité $\mathrm{N}t$ ne se trouve pas égale au rayon vecteur ρ d'un point de cette partie de l'espace, l'expression $\chi(\mathrm{N}t)$ aura une valeur nulle; donc l'intégrale (69) sera nulle aussi si la surface dont l'équation est

$$(72)\qquad \rho = \mathrm{N}t$$

ne rencontre pas la partie de l'espace primitivement ébranlée.

Elle n'aura de valeur sensible que pour les éléments correspondants aux points de cette surface, compris dans le lieu de l'ébranlement initial.

Or, d'après la transformation, ρ exprime la distance du point x, y, z, au point λ, μ, ν; donc, réciproquement, pour tous les points de l'espace qui ne seront pas à une distance d'un des points λ, μ, ν, égale à $\mathrm{N}t$, l'élément de l'intégrale relatif aux valeurs correspondantes de ϖ et θ sera nul.

Il suit de là que pour connaître les points de l'espace en mouvement après le temps t, il faut déplacer la surface $\rho = Nt$ parallèlement à elle-même, de manière que l'origine du rayon vecteur ρ se promène dans toute la portion de l'espace où l'ébranlement initial a eu lieu. Il y aura une surface enveloppe extérieure et une surface enveloppe intérieure à la surface $\rho = Nt$, dans ses diverses positions, et les points de l'espace non compris entre ces deux surfaces enveloppes seront en repos, si, d'ailleurs, d'autres intégrales que l'intégrale (69) ne donnent rien pour ces points.

La propagation se fera donc suivant une onde et les dimensions des surfaces limites de cette onde croîtront évidemment avec le temps.

La vitesse de propagation de l'onde sera constante dans chaque direction, du moins tant qu'on ne considérera que l'intégrale (69). Elle changera, au contraire, avec la direction, à cause de la variabilité de N.

On pourra appliquer des raisonnements semblables à toutes les parties des expressions (28); ainsi la propagation du mouvement par une onde n'est pas douteuse.

11. Occupons-nous maintenant des coefficients $\varphi(1, N)$.

La fonction $\varphi(t, s)$ est donnée par l'équation (59),

$$(73) \qquad \int \omega \delta \frac{d\sigma}{ds} = \varphi(t, s).$$

Quand le temps t est très grand, un point x, y, z où l'ébranlement est parvenu, est très loin de l'origine des coordonnées. Les valeurs de ϖ et θ diffèrent très peu des valeurs Π et Θ qui se rapportent à la direction du rayon vecteur r mené de l'origine au point x, y, z. Par suite, ω diffère peu de la valeur Ω, qui est ce que devient ω quand on y remplace ϖ et θ par Π et Θ.

De plus, observons que nous voulons calculer $\varphi(t, s)$ pour y faire ensuite $s = Nt$. En vertu des équations (58), cette valeur répond en général au cas où le plan $u = t$ serait tangent à la surface $s = F(u, v, w)$; car, à cause des équations citées, $\frac{du}{dv}$ et $\frac{du}{dw}$ seraient nuls. Donc il nous suffit de considérer le cas où la surface s un peu différente, donnerait pourtant une section très petite. Les points de contact de cette section

seraient très rapprochés les uns des autres [*], et par conséquent Ω varierait très peu pour ces différents points; donc on peut faire sortir Ω de l'intégrale qui se rapporte à la caractéristique δ en lui donnant la valeur qu'il prendrait à la limite $s = \mathrm{N}t$, l'équation (73) deviendra

$$(74) \qquad \varphi(t, s) = \Omega \int \delta \frac{d\sigma}{ds} = \Omega \frac{d\sigma}{ds}. \qquad [**]$$

σ s'évanouit pour $s = \mathrm{N}t$, mais sa différentielle $\frac{d\sigma}{ds}$ ne s'évanouit pas dans la même hypothèse. Il serait facile de faire voir en vertu des équations (58), que c'est, en général, le quotient que l'on obtient en divisant par ds l'aire de l'ellipse caractéristique [***] de la surface $s = \mathrm{F}(u, v, w)$. Quand le plan tangent devient perpendiculaire à la direction de l'axe des u, ou plutôt à la direction du rayon vecteur r qui diffère très peu de la première, le calcul de $\frac{d\sigma}{ds}$ n'offrira donc aucune difficulté, et la valeur de cette quantité s'exprimera au moyen des coefficients différentiels du deuxième ordre de la surface des u, v, w. Soit donc $\frac{d\sigma}{ds} = \psi(t, s)$ à la limite, on aura

$$(75) \qquad \varphi(1, \mathrm{N}) = \Omega \psi(1, \mathrm{N}),$$

et l'intégrale (69) deviendra

$$(76) \qquad \frac{1}{8\pi^2} \Omega t \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \mathrm{N} \psi(1, \mathrm{N}) \frac{d^2}{dt^2} \chi(\mathrm{N}t) \sin \varpi \, d\varpi \, d\theta.$$

On pourrait même écrire $\mathrm{N}\psi(1, \mathrm{N})$ hors des intégrations en y remplaçant ϖ et θ par Π et Θ.

D'après la forme des intégrales (36) et (37) comparées aux intégrales (28), ω représente des quantités telles que $a\mathfrak{A}$, $a\mathfrak{B}$, etc. Ces quantités sortiront donc des intégrales.

Si maintenant on considère une nappe particulière de la surface s,

---

[*] Ainsi que du point qui répondrait au contact.

[**] Ω devient aussi indépendant de t à cause de l'homogénéité.

La position du point de contact de la surface s avec le plan $u = t$ est indépendante de la direction arbitraire des axes des nouveaux v et w; par suite la valeur de Ω en est aussi indépendante. Il est aisé de s'en assurer.

[***] M. Charles Dupin.

celle qui, par exemple, répond à s' des intégrales (28), pour que les valeurs des parties correspondantes de $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$, déduites de ces intégrales ne soient pas nulles, on devra avoir $\rho = \mathrm{N}'t$ en désignant par $\mathrm{N}'t$ ce que nous avions représenté par $\mathrm{N}t$. Comme, en général, s'' et s''' sont différents de s', les valeurs correspondantes $\mathrm{N}''t$, $\mathrm{N}'''t$ différeront sensiblement de $\mathrm{N}'t$, en sorte que les parties des intégrales où entrent s'' et s''' disparaîtront si les parties où entre s' subsistent, et les valeurs de $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$ déduites des intégrales (28) seront proportionnelles à a', b', c' qui seront sortis des signes $\int$ en vertu de la réduction exposée précédemment. Par conséquent, la vitesse de vibration aux points x, y, z de l'onde dans la direction déterminée par Π et Θ sera parallèle à la droite déterminée par les cosinus a', b', c', quand on a remplacé ϖ et θ par Π et Θ. Pour la même direction déterminée par Π et Θ, la nappe s'' de la surface s donnera aussi un mouvement vibratoire pour d'autres points x, y, z donnés par la rencontre de la surface $\rho = \mathrm{N}''t$ avec le rayon vecteur indéfini mené dans la direction Π, Θ; et les vibrations seront parallèles à la direction constante a'', b'', c''; on raisonnera de même pour s''' et a''', b''', c'''. Ainsi l'onde aura trois nappes. En général les points situés sur un même rayon vecteur auront des vitesses de vibration parallèles entre elles dans la même nappe, et parallèles respectivement pour les trois nappes à trois directions a', b', c'; a'', b'', c''; a''', b''', c'''; fonctions de la direction du rayon vecteur. C'est ainsi que le mouvement se trouve polarisé quand le temps est devenu considérable par rapport aux dimensions de la partie de l'espace dans laquelle le mouvement initial a eu lieu.

12. Les résultats ne sont pas toujours aussi simples. Il peut se faire que la surface des u, v, w devienne plusieurs fois tangente au plan $u = t$ pendant que s passe de 0 à $+\infty$. Alors la fonction σ changera plusieurs fois de forme sans cesser d'être continue. Mais on doit la différentier par rapport à s; sa différentielle ne sera pas continue; il faudra donc partager l'intégrale relative à s toutes les fois que cette circonstance se présentera. Ainsi dans l'expression (62), au lieu d'une seule somme de la forme $\int_{\mathrm{N}t}^{\infty}$, on aura, par rapport à s, plusieurs sommes

telles que $\int_{N_1 t}^{N_2 t} + \int_{N_2 t}^{N_3 t} + \int_{N_3 t}^{\infty}$ et après les intégrations, la partie du résultat qui se rapportera à la limite supérieure de l'une, ne sera pas détruite par la partie qui viendra de la limite inférieure de la suivante, à cause de la discontinuité. On aura donc pour $N_1 t$, $N_2 t$..., des résultats semblables à ceux qu'on a trouvés pour Nt. Il peut donc arriver que l'onde ait plus de nappes que la surface des u, v, w.

13. Lorsque le temps t est devenu très considérable, les points de l'espace ébranlés sont sur l'une des surfaces comprises dans l'équation $\rho = Nt$ dans laquelle le rayon vecteur ρ part du point dont les coordonnées sont λ, μ, ν. Nous allons chercher l'équation de ces surfaces par rapport aux coordonnées primitives.

Reprenons les équations (39), la transformation (40), les conditions (58) et la relation qui en résulte entre s et t; joignons-y l'équation (72); accentuons les nouveaux u, v, w pour les distinguer des anciens et remplaçons u' par t; nous aurons

$$(77)\qquad \begin{cases} x - \lambda = \alpha\rho, \\ y - \mu = \beta\rho, \\ z - \nu = \gamma\rho, \end{cases}$$

$$(78)\qquad \begin{cases} u = \alpha t + \alpha' v' + \alpha'' w', \\ v = \beta t + \beta' v' + \beta'' w', \\ w = \gamma t + \gamma' v' + \gamma'' w'; \end{cases}$$

$$(79)\qquad \frac{ds}{dv'} = 0, \quad \frac{ds}{dw'} = 0, \quad s = N't, \quad \rho = Nt.$$

Nous aurons

$$(80)\qquad t\frac{ds}{dt} + v'\frac{ds}{dv'} + w'\frac{ds}{dw'} = s = Nt, \qquad \frac{ds}{dt} = N.$$

$$(81)\qquad \begin{cases} \dfrac{ds}{dt} = \alpha\dfrac{ds}{du} + \beta\dfrac{ds}{dv} + \gamma\dfrac{ds}{dw} = N, \\ \dfrac{ds}{dv'} = \alpha'\dfrac{ds}{du} + \beta'\dfrac{ds}{dv} + \gamma'\dfrac{ds}{dw} = 0, \\ \dfrac{ds}{dw'} = \alpha''\dfrac{ds}{du} + \beta''\dfrac{ds}{dv} + \gamma''\dfrac{ds}{dw} = 0. \end{cases}$$

Si l'on multiplie les trois dernières équations respectivement par α, β, γ, puis par α', β', γ', par α'', β'', γ'', et qu'on les ajoute chaque fois, il viendra

$$(82)\qquad \frac{ds}{du} = \alpha \mathrm{N}, \quad \frac{ds}{dv} = \beta \mathrm{N}, \quad \frac{ds}{dw} = \gamma \mathrm{N}.$$

Si l'on met pour α, β, γ, leurs valeurs tirées des équations (77), et si l'on a égard à la dernière des équations (79), on aura les équations

$$(83)\qquad t\frac{ds}{du} = x - \lambda, \quad t\frac{ds}{dv} = y - \mu, \quad t\frac{ds}{dw} = z - \nu,$$

auxquelles on pourra joindre l'équation

$$(84)\qquad u(x-\lambda) + v(y-\mu) + w(z-\nu) = st,$$

qui en est la conséquence, et que l'on obtient en ajoutant les équations (83) après les avoir multipliées respectivement par u, v, w. Pour avoir le lieu géométrique du point x, y, z en regardant λ, μ, ν comme constants, il suffit d'éliminer u, v, w entre les équations (84) et (85). Si l'on suppose de grandes valeurs au temps t et aux coordonnées x, y, z, et que l'on néglige λ, μ, ν, on aura par l'élimination, une équation en x, y, z rapportée à l'origine primitive des axes coordonnés. Ce sera dans l'onde, comme une surface moyenne de laquelle les surfaces limites extérieure et intérieure différeront très peu. Elle indiquera donc la forme générale de l'onde.

14. Il y a une autre manière d'amener la réduction de l'intégrale (36). Après lui avoir fait prendre la forme (42), on peut transformer les u, v, w en coordonnées polaires, en posant

$$(85)\qquad \left\{\begin{aligned} u &= r\cos p \\ v &= r\sin p\cos q \\ w &= r\sin p\sin q \end{aligned}\right\} \quad \text{et} \quad s = rn, \quad \omega = rm;$$

on trouvera que l'intégrale (42) devient

$$(86)\qquad \frac{1}{8\pi^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} e^{rt\cos p\sqrt{-1}}\, m\cos(rnt)\chi(\rho)\rho^2 r^2 \sin p \sin\varpi\, dr\, dp\, dq\, d\rho\, d\varpi\, d\rho,$$

ou

$$(87)\qquad -\frac{1}{8\pi^3}\frac{d^2}{dt^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} e^{rt\cos p\sqrt{-1}}\, m\cos(rnt)\chi(\rho)\frac{\rho^2}{n^2}\sin\varpi\, dr\, dp\, dq\, d\rho\, d\varpi\, d\rho.$$

en la traitant comme l'intégrale (46) on peut la ramener à la somme des deux intégrales suivantes :

$$(88) \quad -\frac{1}{16\pi^3}\frac{d^2}{dt^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\cos\iota(\rho\cos p - nt)\frac{m\varrho^2}{n^2}\chi(\rho)\sin p\sin\varpi\, d\iota\, dp\, dq\, d\rho\, d\varpi\, d\theta.$$

$$(89) \quad -\frac{1}{16\pi^3}\frac{d^2}{dt^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\cos\upsilon(\rho\cos p + nt)\frac{m\varrho^2}{n^2}\chi(\rho)\sin p\sin\varpi\, d\iota\, dp\, dq\, d\rho\, d\varpi\, d\theta.$$

Nous négligeons la partie imaginaire qui renfermerait le facteur $\frac{m}{n^2}\sin(\iota\rho\cos p)\cos(\iota nt)$, parce que ce facteur, entre les limites de l'intégration, reprend la même valeur au signe près quand on y remplace p par $\pi - p$ et q par $q \pm \pi$. En effet, comme nous l'avons déjà remarqué, les fonctions s et ω ne changent pas quand on y change à la fois le signe de u, v, w; donc les fonctions n et m ne changeront pas non plus quand on y remplacera $\cos p$, $\sin p\cos q$, $\sin p\sin q$ par $-\cos p$, $-\sin p\cos q$, $-\sin p\sin q$, tandis que le facteur $\sin(\iota\rho\cos p)$ changera de signe sans changer de valeur. Donc les éléments imaginaires se détruiront deux à deux.

L'intégrale

$$(90) \qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\cos\iota(\rho\cos p - nt)\frac{\varrho^2}{n^2}\chi(\rho)\, d\iota\, d\rho,$$

se réduit à

$$(91) \qquad \frac{t^2}{\cos^3 p}\chi\left(\frac{nt}{\cos p}\right),$$

pour toutes les valeurs positives de $\cos p$, c'est-à-dire pour toutes les valeurs de p comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Elle est nulle pour les valeurs de p comprises entre $\frac{\pi}{2}$ et π.

Pour le démontrer, on peut poser pour un instant $\rho\cos p = \rho'$, ce qui donne $\rho = \frac{\rho'}{\cos p}$, $d\rho = \frac{d\rho'}{\cos p}$, et ensuite faire l'intégration par la méthode de De Flers, comme pour l'intégrale (49), ou, si on l'aime mieux, on peut, comme M. Poisson en a donné l'exemple, introduire en facteur une exponentielle $e^{-g\iota}$, dans laquelle g désigne une quantité infiniment petite que l'on fera nulle après les intégrations. Cette exponentielle doit même, à la rigueur, être introduite dans les intégrales (28). Elle serait alors sous la forme $e^{-g\sqrt{u^2+v^2+w^2}}$. Il convient de faire voir que les intégrales (28) ainsi modifiées ne cessent pas de remplir toutes les conditions de la question.

Il est visible d'abord qu'elles satisfont toujours aux équations différentielles. Si pour vérifier aussi les conditions initiales on fait $t = 0$, la valeur de ξ par exemple, devient d'après les remarques du n° **6**,

$$(92)\quad \xi = \frac{1}{8\pi^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-g\sqrt{u^2+v^2+w^2}}\, e^{(u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu))\sqrt{-1}} f_1(\lambda, \mu, \nu)\, du\, dv\, dw\, d\lambda\, d\mu\, d\nu.$$

Par la transformation déjà indiquée, en observant que les imaginaires se détruisent, on trouve

$$(93)\quad \xi = \frac{1}{8\pi^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-g\varrho}\cos\varrho\rho\cos p\, \varrho^2\varrho^2 f_1(x-\alpha\varrho, y-\beta\varrho, z-\gamma\varrho)\, d\varrho\, d\varrho \sin p\, dp\, dq \sin\varpi\, d\varpi\, d\theta;$$

or

$$\int_0^{\pi}\cos(\varrho\rho\cos p)\,\varrho\rho\,\sin p\, dp = 2\sin(\varrho\rho).$$

L'intégration par partie donne, à cause de la petitesse de g,

$$(94)\qquad \int_0^{\infty} e^{-g\varrho}\sin(\varrho\rho)\,\varrho\rho\, d\varrho = \int_0^{\infty} e^{-g\varrho}\cos(\varrho\rho)\, d\varrho = \frac{g}{g^2+\rho^2}.$$

Cette quantité n'a de valeur sensible qu'autant que ρ est très petit; on peut donc négliger les termes $\alpha\rho$, $\beta\rho$, $\gamma\rho$, dans la fonction f_1. En effectuant toutes les intégrations, on a

$$\xi = f_1(x, y, z);$$

ainsi l'introduction de l'exponentielle n'a aucun inconvénient.

Cela posé, d'après la valeur de l'intégrale (90), la première des intégrales (88) et (89) devient

$$(95)\quad -\frac{1}{16\pi^2}\frac{d^2}{dt^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 m\,\chi\left(\frac{nt}{\cos p}\right)\frac{\sin p\, dp}{\cos^3 p}\, dq \sin\varpi\, d\varpi\, d\theta,$$

la seconde deviendrait

$$(96)\quad +\frac{1}{16\pi^2}\frac{d^2}{dt^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} t^2 m\,\chi\left(\frac{-nt}{\cos p}\right)\frac{\sin p\, dp}{\cos^3 p}\, dq \sin\varpi\, d\varpi\, d\theta;$$

or

$$s = F(u, v, w);$$

donc

$$n = F(\cos p,\ \sin p\cos q,\ \sin p\sin q);$$

par suite, pour $\cos p > 0$,

$$(97) \qquad \frac{nt}{\cos p} = \mathrm{F}(t, t \operatorname{tang} p \cos q, t \operatorname{tang} p \sin q).$$

Soit $t \operatorname{tang} p = \mathrm{R}$, on en tire $\frac{t\,dp}{\cos^2 p} = d\mathrm{R}$, et, en désignant pour abréger par s le deuxième membre de l'équation (97), et par ω ce que devient m, on aura, au lieu de l'intégrale (95),

$$(98) \qquad -\frac{1}{16\pi^2}\frac{d^2}{dt^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\omega\chi(s)\,\mathrm{R}\,d\mathrm{R}\,dq\,\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta.$$

Si l'on pose $\qquad \mathrm{R}\cos q = w, \quad \mathrm{R}\sin q = v,$

on aura

$$(99) \qquad -\frac{1}{16\pi^2}\frac{d^2}{dt^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\omega\chi(s)\,dv\,dw\,\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta.$$

Quant à l'intégrale (96), on observera que

$$\frac{nt}{-\cos p} = \mathrm{F}(-t, -t \operatorname{tang} p \cos q, -t \operatorname{tang} p \sin q),$$

de même comme ω est une fonction homogène de degré nul,

$$\omega = \mathrm{f}(u, v, w)$$

donne $\qquad m = \mathrm{f}(\cos p, \sin p \cos q, \sin p \sin q),$

qui conduit à $\qquad m = \mathrm{f}(-1, -\operatorname{tang} p \cos q, -\operatorname{tang} p \sin q).$

Si l'on pose $\qquad -t \operatorname{tang} p = \mathrm{R},$

on aura

$$\frac{nt}{-\cos p} = \mathrm{F}(-t, \mathrm{R}\cos q, \mathrm{R}\sin q), \quad m = \mathrm{f}(-1, \mathrm{R}\cos q, \mathrm{R}\sin q), \frac{t\,dp}{\cos^2 p} = -d\mathrm{R}.$$

Si l'on fait $\qquad \mathrm{R}\cos q = v, \ \mathrm{R}\sin q = w, \ \mathrm{R}\,d\mathrm{R}\,dq = dv\,dw,$

on aura une intégrale pareille à l'intégrale (99), excepté que t sera remplacé par $-t$ dans ω et s. Mais on pourra changer v en $-v$ et w en $-w$ à cause des limites $-\infty$ et $+\infty$ de ces variables. Alors on aura $\omega = \mathrm{f}(-t, -v, -w)$, $s = \mathrm{F}(-t, -v, -w)$; mais s d'après son origine est une fonction de polynomes homogènes du second degré en u, v, w, qui ne change pas quand on remplace u, v, w par $-u$,

$-v$, $-w$. Il en est de même de ω qui représente des quantités de la forme $a\mathfrak{A}$, $a\mathfrak{B}$..., d'après la comparaison de l'intégrale (36) avec les diverses parties des formules (28). Donc $F(-t, -v, -w) = F(t, v, w)$ et $f(-t, -v, -w) = f(t, v, w)$, ce qui ramène complétement l'intégrale que nous considérons à la forme de l'intégrale (99) qui par conséquent sera doublée.

On aura donc, toutes réductions faites, l'intégrale

$$(100) \qquad -\frac{1}{8\pi^2}\frac{d^2}{dt^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\omega\chi(s)\,dv\,dw\,\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta,$$

au lieu de l'intégrale (87), comme on l'a déjà trouvé au n° 8, formule (57).

15. Quelle que soit celle des deux méthodes que l'on adopte, on peut mettre sous une forme plus simple la fonction $\chi(\rho)$ de l'équation (41). Pour y parvenir, considérons dans $f(\lambda, \mu, \nu)$ les variables comme des coordonnées rectangulaires, et transformons-les d'abord en d'autres coordonnées rectangulaires λ', μ', ν', en prenant pour axes des λ' la droite qui va de l'origine O au point $M(x, y, z)$, et deux autres droites perpendiculaires entre elles et à celle-là, menées par l'origine O. On aura une autre fonction que je désignerai cependant par $f(\lambda', \mu', \nu')$. Les variables λ', μ', ν' pourront se rapporter à tous les points de la portion de l'espace primitivement ébranlée. D'une autre part, imaginons que l'on transforme les coordonnées ϖ et θ, et qu'on les remplace par d'autres coordonnées polaires que je désignerai encore par ϖ et θ. Le nouveau ϖ sera maintenant l'angle que fait le rayon vecteur ρ avec l'axe mené du point M au point O, et le nouveau θ sera l'angle que fait le plan mené par cet axe et par le rayon vecteur avec un plan quelconque passant par MO. Il est facile d'exprimer λ', μ', ν' en fonctions de ϖ et θ. En effet, ϖ est maintenant très petit si la distance MO est très grande. Désignons cette distance par r. λ' est égal à r diminuée de la projection de ρ sur r, et à cause de la petitesse de ϖ, cette projection ne diffère de ρ que d'un infiniment petit du deuxième ordre par rapport à ϖ. Donc on aura $\lambda' = r - \rho$, de même la perpendiculaire abaissée du point (λ', μ', ν') sur le rayon vecteur r, aura pour expression ϖr. On aura donc $\sqrt{\mu'^2 + \nu'^2} = \varpi r$. On pourra, aux coordonnées μ' et ν', substituer ce rayon vecteur dont la valeur est ϖr et l'angle qu'il fait avec

un plan mené par OM. On peut même prendre le nouveau θ pour cet angle, et ainsi $f(\lambda', \mu', \nu')$ sera remplacé par une autre fonction

$$(101) \qquad f(r-\rho, \varpi r, \theta),$$

qui sera le $\chi(\rho)$ de nos formules.

On aura donc aussi

$$(102) \qquad \chi(s) = f(r-s, \varpi r, \theta).$$

16. On pourra, à l'aide de ces remarques, présenter l'intégrale (62) sous la forme

$$-\frac{d^2}{dt^2}\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{Nt}^{\infty} f(r-s, \varpi r, \theta)\varphi(t, s)\,ds.\varpi\,d\varpi\,d\theta,$$

on écrit $\varpi d\varpi$ à cause de la petitesse de ϖ.

Si l'on pose $r-s=s'$, $\varpi r = r'$, on aura

$$-\frac{d^2}{dt^2}\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{r-Nt} f(s', r', \theta)\varphi(t, r-s')\,ds'\frac{r'dr'}{r^2}\,d\theta;$$

la fonction $f(s', r', \theta)$ n'aura de valeur sensible que pour les valeurs de s', r', θ, qui se rapporteront à des points compris dans la partie de l'espace primitivement ébranlée. Si $r-Nt$ n'était pas compris entre les limites de s', on pourrait écrire pour l'intégration par rapport à s' des limites indépendantes du temps. En effectuant la double différentiation on aurait une seule intégrale, et comme $\frac{d^2\varphi(t, r-s')}{dt^2}$ serait une fonction homogène par rapport à t et à $r-s'$ de l'ordre -1. Cette intégrale, quand le temps serait très grand, deviendrait très petite par rapport aux quantités que nous avons conservées : on devrait donc la négliger. On voit donc que l'on parviendrait encore par cette route aux conséquences déjà trouvées.

17. On peut, si l'on veut, développer, dans l'expression (102), s suivant les puissances ascendantes de ϖ, et négliger tout ce qui sera d'un degré plus élevé que la première puissance. Il n'en résultera pas d'erreur sensible, car ϖ est moindre qu'une fraction de la forme $\frac{\varepsilon}{r}$ dans laquelle ε désigne l'une des dimensions du lieu de l'ébranlement primitif. Si r est très grand, cette fraction est très petite; ϖr peut cependant être comparable à ε et ne peut être négligé puisqu'il est de l'ordre des quan-

tités qui donnent à la fonction f toutes ses valeurs. Mais toute quantité très petite par rapport à ε, et à plus forte raison, toute quantité très petite par rapport à ϖr peut être négligée, si l'on admet la continuité de la fonction f et de ceux de ses coefficients différentiels que l'on a à considérer.

Il faut que s soit du même ordre de grandeur que r. Dans le développement de s par rapport à ϖ, à cause de l'homogénéité, les coefficients des puissances de ϖ seront de même ordre que s en général. Un terme de la forme $k\varpi^{1+t} = k\varpi.\varpi^t$ sera de même ordre que $r\varpi.\varpi^t$, et par conséquent, négligeable.

En général, on pourra réduire s à la forme $s + s'\varpi$; l'expression de Nt prendra la forme $Nt + N't\varpi$. $\varphi(1, N)$ gardera la forme $\varphi(1, N)$, mais N (comme N') sera maintenant indépendant de ϖ, et par suite de θ, car partout où entre ϖ, on a des quantités de la forme $\sin\varpi\cos\theta$, $\sin\varpi\sin\theta$, ou plutôt $\varpi\cos\theta$, $\varpi\sin\theta$, à cause de la nature de la transformation supposée. On peut même remarquer que $r - Nt - N't\varpi = \varepsilon$ (ε désignant toujours une quantité comparable à l'une des dimensions de l'ébranlement primitif). On en tire $t = \frac{r}{N} - \frac{N'r\varpi}{N^2} - \frac{\varepsilon}{N}$. Donc on peut écrire approximativement $\frac{r}{N}$ au lieu de t dans le terme $N't\varpi$, et la quantité $Nt + N't\varpi$ sera remplacée à très peu près par $Nt + \frac{N'r\varpi}{N}$. Toutes ces notions nous seront utiles plus tard; mais nous ne nous arrêterons pas davantage à ces diverses transformations.

18. Ce serait ici le lieu de montrer comment la propagation sphérique dans un milieu homogène non cristallisé est un cas particulier de notre solution. Le succès de la méthode employée par M. Poisson, à laquelle on peut remener encore le cas où l'on aurait une valeur de s de la forme $Au^2 + Bv^2 + Cw^2$ ou même de la forme

$$Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + Dvw + Ewu + Fuv,$$

tient à une propriété des surfaces du deuxième ordre. Si l'on a une surface du deuxième ordre toujours semblable à elle-même parce que son équation est homogène et ne renferme qu'un paramètre variable, la différentielle de l'aire d'une section plane prise par rapport à ce paramètre est constante tant que le plan sécant reste parallèle à lui-même. Cette propriété est facile à démontrer.

Il y a aussi des conséquences particulières curieuses dans les cas de décomposition de l'équation des u, v, w.

Il faudra surtout examiner l'influence des singularités de la surface des u, v, w. Cet examen se rattache davantage à la généralité de la question; par exemple, si le plan $u = t$ a avec la surface un contact du troisième ordre ou un contact du premier suivant une courbe, la fonction $\varphi(t, N)$ devient infinie. Le développement donné dans la formule (67) ne peut plus servir. Nous ferons voir comment on peut y suppléer pour traiter ces diverses singularités dont nous avons découvert les conséquences et d'autres de même genre, qui ne seront pas plus difficiles à traiter. Ce sera l'objet d'un prochain Mémoire.

Nous nous contenterons aujourd'hui d'avoir démontré les principes généraux que l'on peut résumer de la manière suivante :

1°. Dans un milieu élastique, homogène, indéfini, cristallisé d'une manière quelconque, le mouvement produit par un ébranlement central se propage par une onde plus ou moins compliquée dans sa forme.

2°. Pour chaque nappe de l'onde, la vitesse de propagation est constante dans une même direction, variable avec la direction suivant une loi qui dépend de la forme de l'onde.

3°. Pour une même direction, les vitesses de vibration sont constamment parallèles entre elles dans une même nappe de l'onde pendant la durée du mouvement, et parallèles à des droites différentes pour les différentes nappes, ce qui constitue une véritable polarisation du mouvement.

NOTA. Ce Mémoire est imprimé tel qu'il a été présenté à l'Académie des Sciences de l'Institut. On reconnaîtra sans peine la possibilité de simplifier quelques parties du calcul et de supprimer quelques longueurs.

Dans un second Mémoire [*], nous avons appliqué les formules générales du premier au cas traité par M. Poisson [**]; nous avons retrouvé, avec une grande rapidité, les formules obtenues par ce grand géomètre, et les conséquences remarquables qu'il en a déduites.

Nous publierons bientôt les autres développements indiqués dans le premier Mémoire, nous expliquerons les propriétés qui en résultent pour les différents cristaux, et surtout pour les cristaux à un axe. On verra ainsi avec quelle facilité la forme générale de nos calculs se prête aux applications particulières.

---

* Voyez le Rapport de M. Sturm, *Comptes rendus de l'Acad. des Sciences de l'Institut*, t. VII, p. 1143.

** *Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut*, tome X, page 578.

ADDITION

A LA

NOTE SUR LE PRINCIPE FONDAMENTAL

DE LA

THÉORIE DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES;

Par J. LIOUVILLE. [*]

L'ingénieuse démonstration de M. Mourey, que j'ai rapportée dans cette Note, repose essentiellement sur l'existence d'une courbe δ enveloppant le point A de toute part et sur laquelle l'équation

$$\rho\rho_1 \ldots \rho_{m-1} = R \tag{2}$$

est toujours vérifiée. Cette courbe peut se composer, sans inconvénient, de diverses parties comprenant à leurs points de jonction des angles finis; mais elle ne doit pas être interrompue : l'enceinte qu'elle forme autour du point A doit être exactement fermée. Or, cette propriété importante ne m'a pas paru établie par M. Mourey; cet estimable auteur prouve seulement que les divers rayons rectilignes émanés de l'origine A passent tous au moins par un point satisfaisant à l'équation (2). Mais j'ai trouvé depuis qu'on peut suppléer aisément aux détails que M. Mourey a omis, sans doute pour abréger. En effet, puisqu'on a

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \ldots \rho_{m-1} = \sqrt{(x - a_{m-1})^2 + (y - b_{m-1})^2},$$

les points du plan yAx dont les coordonnées satisfont à l'équation (2), qui est algébrique et de degré $2m$, ne peuvent être sur une même ligne droite en nombre plus grand que $2m$; par suite ils ne peuvent pas former une courbe du genre des spirales, qui tournerait indéfiniment sans

[*] *Voyez* tome IV de ce Journal, page 501.

rentrer sur elle-même et sans sortir d'un espace limité. On s'en convaincra en observant que l'équation d'une ligne droite est de la forme $y = \gamma x + \beta$ ou de la forme $x = \gamma$; dans le premier cas, l'équation $y = \gamma x + \beta$, combinée avec l'équation (2), ou plutôt avec l'équation $\rho^2 \rho_1^2 \ldots \rho_{m-1}^2 = R^2$, conduit à une équation du degré $2m$, en x seule, dont le premier terme, savoir $(1 + \gamma^2)^m x^{2m}$, ne se réduit pas à zéro; cette équation ne peut avoir plus de $2m$ racines réelles [*], et à chacune de ses racines x répond une seule valeur de y; dans le second cas, la valeur de x est unique, et les valeurs de y sont fournies par une équation de degré $2m$ dont le premier terme est y^{2m}, et qui ne peut avoir aussi que $2m$ racines au plus [**]. D'après cela on voit que si le point A n'est pas dans une enceinte fermée, on pourra, à partir de ce point, tracer une ligne courbe qui, passant à travers les issues restées libres, se prolonge sans interruption jusqu'à un point O aussi éloigné qu'on voudra de l'origine A, et sur laquelle l'équation (2) n'ait jamais lieu. Or, cela est absurde; car dans les environs du point A la différence $\rho\rho_1 \ldots \rho_{m-1} - R$ est négative, dans les environs du point O elle est positive; de plus, elle varie d'une manière continue lorsqu'on marche de A vers O sur la courbe AO; donc elle s'évanouit quelque part au moins pour un point de cette courbe AO. La belle démonstration de M. Mourey se trouve ainsi complétée. On pourrait du reste la présenter sous diverses formes en décomposant en deux parties de plusieurs manières le premier membre de l'équation (1).

Je profiterai de l'occasion pour corriger quelques fautes qui se sont glissées dans la partie de ma Note relative à M. Gauss. Ainsi, page 505, ligne 26, *au lieu de* par $z - \rho$, *lisez* $z \mp \rho$; page 506, ligne dernière, *au*

---

[*] Que toute équation de degré n ait au plus n racines différentes, c'est là une proposition très élémentaire dont la démonstration connue depuis long-temps n'offre aucune difficulté, et dont on a le droit de se servir, sans faire un cercle vicieux, pour prouver cet autre théorème beaucoup plus compliqué, qui nous occupe ici : Une équation algébrique quelconque a au moins une racine, et par suite une équation de degré n a précisément n racines, egales ou inegales.

[**] Je ferai remarquer en passant que la courbe représentée par l'équation (2) n'a pas de branches infinies, ni par conséquent d'asymptotes, puisque dès que l'une des deux coordonnées x, y surpasse une certaine limite de grandeur absolue, le produit $\rho\rho_1 \ldots \rho_{m-1}$ est necessairement $> R$.

lieu de par $z - \rho$, si $\omega = 0$, *lisez* par $z - \rho \cos \omega$ quand $\sin \omega = 0$; *au lieu de* si ω diffère de 0, *lisez* quand $\sin \omega$ diffère de zéro; page 508, lignes 17 et 18, *au lieu de* $\varphi = t$ et $\varphi = u$ sont deux intégrales de l'équation, *lisez*, t et u sont les dérivées par rapport à ω et θ d'une même fonction

$$\Phi = \frac{e^{m\theta} \sin m\omega}{m} + \frac{Ae^{(m-1)\theta} \sin (m-1)\omega}{m-1} + \ldots + \frac{Le^{\theta} \sin \omega}{1} + M\omega,$$

satisfaisant à l'équation.

J'ajouterai que le Mémoire de M. Gauss, dont j'ai donné l'analyse se trouve dans le *Recueil de l'Académie de Gottingue* (3me série, tome III); le même volume contient d'autres recherches de ce grand géomètre sur le même sujet; la méthode est différente et plus compliquée. Au reste, dès 1799, M. Gauss avait publié une dissertation intitulée : *Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse*. En lisant cette dissertation si remarquable où sont indiquées tant d'idées neuves, où sont appréciés avec tant de justesse les travaux antérieurs des géomètres, et en particulier de Lagrange, on se demande comment il est arrivé que Lagrange ne l'ait pas connue, ou du moins n'en ait pas fait mention, dans la seconde édition de son traité *sur la résolution des équations numériques*, publiée en 1808.

NOTE
SUR LES TRANSCENDANTES ELLIPTIQUES
DE PREMIÈRE ET DE SECONDE ESPÈCE,
CONSIDÉRÉES COMME FONCTIONS DE LEUR MODULE;

PAR J. LIOUVILLE. [*]

Les intégrales indéfinies que Legendre a nommées fonctions elliptiques de première et de deuxième espèce, contiennent sous le signe $\int$ un binome dont le premier terme est l'unité et dont le second terme est le carré du produit d'une constante par le sinus de l'amplitude, c'est-à-dire par le sinus de la variable à laquelle se rapporte l'intégration. Ce binome est affecté de l'exposant $\frac{1}{2}$ dans les fonctions de seconde espece, et de l'exposant $-\frac{1}{2}$ dans celles de première espèce : la constante qu'il renferme s'appelle le module.

Quand on donne au module une valeur fixe que je supposerai différente de zéro, les deux quantités dont nous parlons ne dépendent plus que de l'amplitude, et elles constituent, comme je l'ai prouvé dans un autre Mémoire, des transcendantes tout-à-fait distinctes des logarithmes et des exponentielles, de telle sorte qu'on ne peut les écrire sous forme finie à l'aide des seuls signes algébriques, exponentiels et logarithmiques. La méthode que j'ai suivie pour établir ce théorème a offert, si je ne me trompe, le premier exemple d'une démonstration rigoureuse de l'impossibilité d'une intégrale indéfinie en fonction finie explicite de la variable. Elle a été publiée en 1833, dans le *Journal de l'École Polytechnique;* et je ne sache pas que depuis cette époque on ait élevé contre elle aucune objection digne d'une réfutation sérieuse.

Si maintenant on attribue à l'amplitude une valeur déterminée différente de zéro, et qu'on laisse au contraire variable le module supposé

[*] Le Mémoire dont nous donnons ici l'analyse paraîtra dans un prochain cahier de ce Journal.

tout-à-l'heure constant, nos transcendantes deviendront des fonctions du module, et l'on peut se demander s'il sera encore impossible de les exprimer sous forme finie en termes algébriques, exponentiels et logarithmiques, relatifs à la nouvelle variable. Or je suis parvenu à démontrer qu'en effet cette impossibilité subsiste; mais l'analyse dont j'ai fait usage en résolvant ce nouveau problème diffère beaucoup de celle dont je m'étais servi dans le Mémoire de 1833. Les fonctions elliptiques de première et de deuxième espèce, considérées comme fonctions du module, satisfont en effet à deux équations différentielles du second ordre, assez compliquées, tandis que, par rapport à l'amplitude, ces mêmes fonctions elliptiques sont de simples intégrales indéfinies dont l'élément est connu. Les deux questions que j'ai traitées diffèrent donc entre elles autant que l'intégration des fonctions d'une seule variable diffère de l'intégration des équations différentielles. On comprendra mieux encore l'intervalle qui les sépare si j'ajoute que les transcendantes dont nous nous occupons ne deviendraient pas des fonctions du module composées d'un nombre limité de termes, quand même on joindrait aux signes algébriques, exponentiels et logarithmiques, le signe $\int$ indiquant une intégrale indéfinie relative à la variable indépendante, c'est-à-dire une intégrale dont la limite supérieure est précisément le module, et dont la limite inférieure est une constante déterminée ou arbitraire. Ainsi les fonctions elliptiques sont des transcendantes d'un ordre plus élevé par rapport au module que par rapport à l'amplitude.

Ces recherches, et plusieurs autres que j'ai publiées antérieurement, appartiennent à une grande théorie que les géomètres n'ont pas encore étudiée, je crois, avec l'attention persévérante qu'elle mérite. Cette théorie a pour objet de découvrir, dans chaque question, toutes les solutions qui peuvent s'écrire à l'aide d'un nombre limité de signes analytiques donnés d'avance, ou à prouver qu'il n'existe pas de telles solutions. Seule elle peut conduire à une classification vraiment philosophique des transcendantes. On la rencontre dans les éléments mêmes, et dès les premiers pas qu'on fait en algèbre. Après avoir donné les règles de la multiplication des polynomes, veut-on passer à la division? de suite on est arrêté, puisque deux polynomes pris au hasard ne sont pas toujours divisibles l'un par l'autre. Il faut donc, 1° trouver une méthode pour effectuer la division toutes les fois qu'elle est possible, ou

pour prouver qu'elle ne l'est pas; 2° créer un signe nouveau pour indiquer les divisions qu'on ne peut pas effectuer, et par suite ajouter aux fonctions entières, seules connues jusque-là, les fonctions rationnelles. Mais quand on veut extraire les racines de ces fonctions, une semblable difficulté nous arrête encore et donne naissance à une règle par laquelle on effectue les extractions possibles et à un signe qui indique celles qui ne le sont pas. Ainsi pour la première fois sont introduites dans le calcul les fonctions radicales. Ces fonctions radicales ne sont pas d'ailleurs toutes de même espèce, et une discussion approfondie est nécessaire pour les classer. N'est-il pas évident que ces idées si simples doivent encore être applicables aux parties élevées de l'analyse, et qu'après avoir ajouté aux fonctions algébriques les fonctions exponentielles et les fonctions logarithmiques qui ne peuvent pas se réduire entre elles, il faut, à chaque fois que l'on rencontre une quantité nouvelle, chercher si elle peut ou non s'exprimer par les fonctions déjà connues? Les géomètres, ce me semble, trouveront peu de sujets plus vastes, plus dignes de leurs méditations : dans aucun cas, du moins, on ne s'avisera de contester à ceux qui en auront traité, même une petite partie, le mérite de la difficulté vaincue.

DÉMONSTRATION

DE DEUX PROPOSITIONS DE M. CAUCHY;

PAR M. TERQUEM.

Si dans une équation algébrique à coefficients réels on fait varier tous ces coefficients de manière à ce que les racines restent toujours toutes positives, et qu'une fonction symétrique donnée conserve une valeur constante aussi donnée, il est évident que toute autre fonction symétrique des racines atteindra une valeur extrême, maxima ou minima, lorsque toutes les racines deviennent égales. Ainsi, si l'on suppose constante la moyenne arithmétique des racines, alors la somme des carrés des racines atteint sa valeur extrême, en supposant que chaque racine devienne égale à cette moyenne arithmétique. Cette valeur extrême est donc égale à la moyenne arithmétique élevée au carré et multipliée par le nombre des racines. De plus, cette valeur est un minimum. Pour s'en assurer, il suffit de supposer nulles toutes les racines, à l'exception d'une seule. Donc, lorsque les racines sont inégales, la somme de leurs carrés s'élève au-dessus de ce minimum. C'est une proposition énoncée par M. Cauchy (*Cours d'Analyse*, première partie, page 456). Il en est de même pour une puissance quelconque, entière et positive, des racines. La moyenne arithmétique restant toujours constante, le produit des racines a une valeur extrême égale à cette moyenne arithmétique élevée à une puissance marquée par le nombre des racines; et cette valeur est un maximum; car en supposant nulle une racine, le produit des racines se réduit à zéro. Donc lorsque les racines sont inégales, leur produit est toujours inférieur à ce maximum; c'est la seconde proposition de M. Cauchy (*Cours d'Analyse*, pages 457 et 493; tome IV de ce Journal, page 493). Il en est de même pour toute fonction symétrique, lorsque chacun de ses termes renferme au moins deux racines.

NOTE

SUR LA THÉORIE DE L'ENGRENAGE DE WHITE;

PAR CHARLES DELAUNAY,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

Je me propose dans cette Note de démontrer les propriétés de l'engrenage de White par des considérations entièrement différentes de celles qu'a employées M. Olivier, dans le Mémoire qu'il a fait imprimer, il y a quelques mois, dans ce Journal.

Supposons d'abord qu'on veuille transmettre le mouvement de rotation d'un axe P à un axe parallèle P′, de manière que le rapport des vitesses angulaires reste constant: on sait qu'on peut arriver à ce résultat en fixant sur chaque axe une roue armée de dents cylindriques; et que les profils de ces dents sont tels, que le mouvement relatif des circonférences primitives de l'engrenage soit un mouvement de roulement, ce qui n'est que la traduction géométrique de la condition que le rapport des vitesses angulaires soit constant.

Dans les engrenages dont je viens de parler, le contact de deux dents se transporte successivement en différents points du profil de chacune d'elles, et dans chaque position, les deux dents glissent l'une sur l'autre d'une quantité proportionnelle à la distance du contact de ces dents au contact des circonférences primitives. Pour diminuer l'étendue du glissement, et par suite le travail résistant dû au frottement qui en résulte, il faut donc augmenter le nombre des dents pour que chacune d'elles soit moins long-temps en prise, et qu'ainsi le contact des dents s'éloigne moins du contact des circonférences primitives. Mais à mesure que le nombre des dents devient plus grand, l'épaisseur de chaque dent diminue, et comme cette épaisseur ne peut diminuer au-delà d'une certaine limite sans compromettre la solidité de la dent, il s'ensuit qu'il n'est pas possible, dans les engrenages à dents cylindriques, de dimi-

nuer autant qu'on veut l'étendue du glissement des dents l'une sur l'autre.

Si au lieu d'armer chacun des axes P, P′ d'une seule roue, on les arme de deux roues juxtaposées ayant les mêmes circonférences primitives, le même nombre de dents et les mêmes profils pour les dents, et si, de plus, ces deux roues sont fixées l'une à l'autre de manière que leurs dents ne se correspondent pas, mais que le point ou le profil d'une dent de la première roue rencontre sa circonférence primitive soit à égale distance des points correspondants appartenant à deux dents consécutives de la seconde roue, il est facile de voir que, pour que le mouvement de l'axe P se transmette convenablement à l'axe P′, il ne sera plus nécessaire que chacune des deux roues dont il est armé conduise constamment la roue correspondante de l'axe P′. Si l'on veut, par exemple, qu'il n'y ait jamais qu'une dent en prise, on voit que ce sera alternativement une dent de la première roue et une dent de la seconde; les dents de chaque roue conduiront donc pendant moitié moins de temps que s'il n'y avait qu'une seule roue; la plus grande distance du contact des dents au contact des circonférences primitives sera donc ainsi beaucoup diminuée.

Mais pour qu'une dent conduise pendant moitié moins de temps, il n'est pas nécessaire de diminuer sa longueur; il suffit de former son profil de deux parties : la première, sur laquelle le contact devra avoir lieu, sera déterminée par les règles ordinaires pour la construction des engrenages à dents cylindriques, et la seconde sera une courbe qui pourra se raccorder avec la première, mais qui sera un peu en arrière du prolongement de cette première partie, prolongement qui devrait faire partie du profil de la dent si l'on voulait qu'elle fût en prise plus long-temps.

Il résulte de ce qui précède, qu'au moyen de deux roues juxtaposées et fixées l'une à l'autre, on peut diminuer l'étendue du glissement sans diminuer la solidité des dents, puisqu'on peut leur laisser la même épaisseur à la base et la même longueur.

Au lieu de deux roues on pourrait en mettre trois à côté l'une de l'autre, et en les disposant convenablement, chacune d'elles n'aurait à conduire que pendant le tiers du temps pendant lequel elle conduirait si elle était seule; l'étendue du glissement sera donc encore dimi-

nuée. En continuant de la même manière, on voit qu'on pourra diminuer autant qu'on voudra le travail résistant dû au frottement de glissement, sans nuire à la solidité des dents, en mettant sur chaque axe un nombre suffisant de roues.

Si maintenant on suppose que le nombre des roues devienne infini, et qu'en même temps leur épaisseur devienne infiniment petite, de manière que l'épaisseur totale conserve une valeur finie, on voit que le contact n'aura plus lieu sur chaque dent que pendant un instant infiniment petit, après lequel il se transportera sur la dent voisine, et ainsi de suite jusqu'à ce que quittant la dent de la dernière roue, il se transporte sur une autre dent de la première roue pour continuer de la même manière. La partie du profil de chaque dent sur laquelle se fait le contact, se réduit dans ce cas à l'élément de ce profil qui est adjacent à la circonférence primitive; le contact des dents coïncide donc toujours avec celui des circonférences primitives; il n'y a donc plus frottement de glissement. Mais alors il est évident que l'ensemble des dents des différentes roues sur lesquelles le contact se transporte successivement, forme un véritable filet de vis, et que la suite des positions du contact sur ce filet forme une hélice située sur le cylindre lieu géométrique des circonférences primitives. De plus, les deux hélices dont les divers éléments viennent ainsi successivement se superposer sont également inclinées sur les axes P, P'. L'engrenage auquel nous venons d'être conduits n'est donc autre chose que l'engrenage de White, et l'on voit que dans cet engrenage il n'y a pas de frottement de glissement, pourvu que les courbes qui servent de bases aux filets héliçoïdaux saillants satisfassent à la condition de ne se toucher pendant le mouvement des deux axes qu'aux points où elles rencontrent les cylindres primitifs. Ces courbes seront faciles à trouver, d'après ce que j'ai dit sur la construction des profils des dents dans le cas où l'on aurait deux roues juxtaposées sur chaque axe.

Si, les axes P et P' restant parallèles, leur distance variait un peu, les propriétés démontrées précédemment n'auraient plus lieu généralement; mais on conçoit qu'on puisse déterminer les courbes qui servent de bases aux filets, de manière que ces propriétés aient encore lieu quelle que soit la variation de la distance des axes. Sans entrer dans plus de détails, je me contenterai de dire qu'on pourrait y arriver en partant

de l'engrenage cylindrique à développements qui, comme on sait, permet de faire varier la distance des axes sans que pour cela l'engrenage cesse de fonctionner convenablement.

Les filets saillants dont les roues sont armées dans l'engrenage de White peuvent être considérés comme engendrés par le profil qui leur sert de base auquel on donnerait un mouvement de rotation autour de l'axe du cylindre, et en même temps un mouvement de translation parallèlement à l'axe, ces deux mouvements étant déterminés de manière que le point du profil qui est sur le cylindre, y décrive une hélice. Les deux hélices qui servent de directrices à deux filets correspondants sur les deux roues sont, d'ailleurs, les transformées d'une même droite tracée dans le plan tangent commun aux deux cylindres, obtenues par l'enroulement de ce plan sur chacun des deux cylindres. Pour peu qu'on réfléchisse à la manière dont nous avons été conduits des engrenages cylindriques ordinaires à l'engrenage de White, on verra qu'on peut remplacer la droite tracée dans le plan tangent commun aux deux cylindres par une courbe quelconque tracée aussi dans ce plan ; en enroulant ce plan successivement sur les deux cylindres, il en résultera deux transformées qui pourront servir de directrices dans la génération des filets de l'engrenage, tout aussi bien que les deux hélices que nous avions considérées d'abord, et l'engrenage résultant jouira encore des mêmes propriétés.

Il est évident que tout ce qui vient d'être dit pour le cas où les deux axes P et P′ sont parallèles, peut se dire de même dans le cas où ces axes se rencontrent.

SOMMATION DE QUELQUES SÉRIES;

PAR V.-A. LEBESGUE,

Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

Dans un Mémoire sur certaines séries singulières, M. Gauss a donné l'expression générale des sommes

$$\sum_{i=0}^{i=p-1} \sin i^2 \frac{2h\pi}{p}, \quad \sum_{i=0}^{i=p-1} \cos i^2 \frac{2h\pi}{p}, \qquad (A)$$

dans l'hypothèse de p premier à h. Depuis, M. Dirichlet, dans le Journal de M. Crelle, a traité par un moyen tout différent et non moins remarquable les sommes

$$\sum \sin i^2 \frac{2\pi}{p}, \quad \sum \cos i^2 \frac{2\pi}{p}, \qquad (B)$$

qui reviennent aux sommes (A), ou n'en diffèrent que par le signe.

La question est donc complétement résolue, et si j'en parle encore, c'est surtout pour donner un procédé fort simple pour trouver le signe des sommes (A), celui de M. Gauss devenant d'autant plus long que p contient plus de facteurs premiers différents; tandis qu'en employant l'ingénieux procédé de calcul par lequel M. Gauss reconnaît si un nombre est résidu ou non-résidu quadratique d'un nombre premier donné, il n'est aucunement nécessaire de distinguer le cas de p nombre premier, de celui de p nombre composé [*]. D'ailleurs quand p et h ont d pour plus grand commun diviseur, en posant

$$p = p'd, \quad h = h'd,$$

on trouve de suite

[*] L'algorithme en question a paru dans un Mémoire postérieur à celui cité plus haut. Ce Mémoire renferme les 5e et 6e démonstrations de *la Loi de réciprocité* de Legendre.

$$\sum_{i=0}^{i=p-1} \sin i^2 \frac{2h\pi}{p} = d \sum_{i=0}^{i=p-1} \sin i^2 \frac{2h'\pi}{p'},$$

$$\sum_{i=0}^{i=p-1} \cos i^2 \frac{2h\pi}{p} = d \sum_{i=0}^{i=p'-1} \cos i^2 \frac{2h'\pi}{p'},$$

de sorte que l'expression générale des sommes (A) où h et p ont le plus grand commun diviseur d, se trouve être $a\sqrt{pd}$, le coefficient a étant 0, 1 ou -1.

Il suit de là qu'au moyen des formules qui donnent $\sin^m z$ et $\cos^m z$ développés suivant les sinus et cosinus des multiples de z, on trouvera de suite les sommes

$$\sum \sin^m i^2 \frac{2h\pi}{p}, \qquad \sum \cos^m i^2 \frac{2h\pi}{p},$$

et c'est là, ce semble, le moyen le plus direct de former les équations dont les racines sont $\sin i^2 \frac{2h\pi}{p}$, ou $\cos i^2 \frac{2h\pi}{p}$, le nombre i prenant les valeurs $0, 1, 2, \ldots p-1$.

Je fais précéder cette recherche de la détermination des sommes

$$\left.\begin{array}{ll}
\sum \sin \frac{i^2+i}{2} \cdot \frac{2h\pi}{p} = \sum \cos i^2 \frac{2h\pi}{p} = 0, & p = 2q. \\
\left.\begin{array}{l}\sum \cos \frac{i^2+i}{2} \cdot \frac{2h\pi}{p} = \pm \sqrt{p} \sin \frac{p-1}{4} \cdot \frac{h\pi}{p} \\ \sum \sin \frac{i^2+i}{2} \cdot \frac{2h\pi}{p} = \pm \sqrt{p} \cos \frac{p-1}{4} \cdot \frac{h\pi}{p}\end{array}\right\} & p = 4q+1, \\
\left.\begin{array}{l}\sum \sin \frac{i^2+i}{2} \cdot \frac{2h\pi}{p} = \pm \sqrt{p} \cos \frac{p+1}{4} \cdot \frac{h\pi}{p} \\ \sum \cos \frac{i^2+i}{2} \cdot \frac{2h\pi}{p} = \pm \sqrt{p} \sin \frac{p+1}{4} \cdot \frac{h\pi}{p}\end{array}\right\} & p = 4q-1.
\end{array}\right\} \quad (C)$$

Dans ces formules où h est supposé premier à p, l'ambiguïté du signe se lève comme pour les sommes (A).

I.

La détermination des sommes

$$\sum \sin \frac{i^2+i}{2} \cdot \frac{2h\pi}{p}, \quad \sum \cos \frac{i^2+i}{2} \cdot \frac{2h\pi}{p},$$

prises depuis $i=0$, jusqu'à $i=p-1$, dépend d'une formule remarquable due à M. Gauss, qui l'a donnée dans son Mémoire : *Summatio serierum quarumdam singularium*. Comm. Got., v. I; an 1808-1811 [*]. Pour l'obtenir, considérons l'équation

$$f(z)=\theta(z).f[\varphi(z)],$$

où f, θ et φ sont des caractéristiques de fonctions. Pour abréger, nous supprimerons les parenthèses dans les fonctions φ, et nous écrirons

$$\begin{aligned}\varphi(\varphi z)&=\varphi^2 z,\\ \varphi[\varphi(\varphi z)]&=\varphi(\varphi^2 z)=\varphi^3 z,\\ \varphi\{\varphi[\varphi(\varphi z)]\}&=\varphi(\varphi^3 z)=\varphi^4 z,\\ &\text{etc., etc.}\end{aligned}$$

Nous aurons donc la suite d'équations

$$\begin{aligned}f(z)&=\theta(z)f(\varphi z),\\ f(\varphi z)&=\theta(\varphi z)f(\varphi^2 z),\\ f(\varphi^2 z)&=\theta(\varphi^2 z)f(\varphi^3 z),\\ &\vdots\\ f(\varphi^{n-1}z)&=\theta(\varphi^{n-1}z)f(\varphi^n z),\end{aligned}$$

et si les fonctions $f(z)$ et $\theta(z)$ restent finies ou convergentes quand on donne à z les valeurs

$$z,\ \varphi z,\ \varphi^2 z,\ldots\ \varphi^n z,$$

nous pourrons multiplier membre à membre les équations précédentes, et de là

$$(a)\qquad f(z)=f(\varphi^n z).\theta(z).\theta(\varphi z).\theta(\varphi^2 z)\ldots\theta(\varphi^{n-1}z).$$

Supposons maintenant que pour une certaine valeur de n, $f(\varphi^n z)$ prenne une valeur constante déterminée, et que de plus les fonctions

---

[*] J'emprunte cette citation à la page 186 des *Fund. nova Funct. ellipt.* La formule en question désignée plus loin sous la lettre (f), ne se trouve point dans le Mémoire particulier que M. Gauss a publié sous le même titre.

f et θ ne prennent qu'une seule valeur pour une valeur déterminée de z, l'équation précédente fera connaître $f(z)$ sans aucune ambiguité.

Admettons, par exemple, que pour $n=\infty$, $\varphi^n z$ prenne une valeur constante a, on aura ainsi

$$(b) \qquad f(z)=f(a).\theta(z).\theta(\varphi z).\theta(\varphi^2 z).\theta(\varphi^3 z)\ldots$$

S'il arrive que $f(a)$ ne puisse pas se tirer facilement de $f(z)$, mais qu'il soit aisé de déterminer $f(b)$, on posera $z=b$ dans l'équation précédente, et l'on aura

$$f(b)=f(a).\theta(a).\theta(\varphi a).\theta(\varphi^2 a)\ldots,$$

et par suite

$$(c) \qquad f(z)=f(b)\frac{\theta(z).\theta(\varphi z).\theta(\varphi^2 z).\theta(\varphi^3 z)\ldots}{\theta(a).\theta(\varphi a).\theta(\varphi^2 a).\theta(\varphi^3 a)\ldots}.$$

Pour appliquer cette formule, considérons la fonction

$$f(z)=1+q\frac{1-z}{1-q}+q^3\frac{1-z}{1-q}.\frac{1-qz}{1-q^2}+q^6\frac{1-z}{1-q}.\frac{1-qz}{1-q^2}.\frac{1-q^2z}{1-q^3}+\ldots$$

qui a pour terme général

$$q^{\frac{n.n+1}{2}}.\frac{1-z}{1-q}.\frac{1-qz}{1-q^2}.\frac{1-q^2z}{1-q^3}\ldots\frac{1-q^{n-1}z}{1-q^n}.$$

Si l'on y change z en q^2z, et qu'ensuite on multiplie par $1-qz$, on trouvera

$$q^{\frac{n.n+1}{2}}.\frac{1-qz}{1-q}.\frac{1-q^2z}{1-q^2}\ldots\frac{1-q^nz}{1-q^n}(1-q^{n+1}z).$$

Séparant les deux termes qui résultent de la multiplication par $1-q^{n+1}z$, il vient

$$q^{\frac{n.n+1}{2}}.\frac{1-qz}{1-q}\ldots\frac{1-q^nz}{1-q^n}-q.z^{\frac{n+1.n+2}{2}}.\frac{1-qz}{1-q}\ldots\frac{1-q^nz}{1-q^n}.$$

Décomposant ainsi chaque terme du produit $(1-qz)(1-q^2z)$, et

réunissant la deuxieme partie d'un terme à la premiere du suivant, on trouvera pour terme général,

$$-z.q^{\frac{n+1.n+2}{2}}.\frac{1-qz}{1-q}.\ldots\frac{1-q^nz}{1-q^n}+q^{\frac{n+1.n+2}{2}}.\frac{1-qz}{1-q}\ldots\frac{1-q^{n+1}z}{1-q^{n+1}},$$

ou en réduisant

$$q^{\frac{n+1.n+2}{2}}.\frac{1-z}{1-q}.\frac{1-qz}{1-q^2}\ldots\frac{1-q^nz}{1-q^{n+1}},$$

qui est un terme de $f(z)$; on a donc

$$f(z)=(1-qz)f(q^2z).$$

Pour transformer $f(z)$ au moyen de la formule (c), on posera

$$\varphi(z)=q^2z,$$

d'où l'on tirera

$$\varphi z=q^2z,\ \varphi^2z=q^4z,\ \varphi^3z=q^6z\ldots\varphi^nz=q^{2n}z.$$

$$\theta(z)=1-qz,\ \theta(\varphi z)=1-q^3z,\ \theta(\varphi^2z)=1-q^5z\ldots\theta(\varphi^{n-1}z)=1-q^{2n-1}z,$$

et par conséquent il viendra

$$(d)\qquad f(z)=f(q^{2n}z)(1-qz)(1-q^3z)(1-q^5z)\ldots(1-q^{2n-1}z).$$

Pour $n=\infty$, on a $q^{2n}z=0$ si la valeur absolue (ou plus généralement le module) de q est <1. Donc

$$(e)\qquad f(z)=f(0)(1-qz)(1-q^3z)(1-q^5z)\ldots$$

Posant $z=1$, on trouvera, à cause de $f(1)=1$,

$$1=f(0)(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots$$

et par suite

$$f(z)=\frac{1-qz}{1-q}.\frac{1-q^3z}{1-q^3}.\frac{1-q^5z}{1-q^5}\ldots$$

ou bien

$$(f)\qquad \frac{1-qz}{1-q}\cdot\frac{1-q^2z}{1-q^2}\cdot\frac{1-q^3z}{1-q^3}\cdots = 1+q\frac{1-z}{1-q}+q^3\frac{1-z}{1-q}\cdot\frac{1-qz}{1-q^2}+\ldots.$$

ce qui est précisément la formule de M. Gauss.

Pour $z=q$, elle se réduit à

$$(g)\qquad \frac{1-q^2}{1-q}\cdot\frac{1-q^4}{1-q^3}\cdot\frac{1-q^6}{1-q^5}\cdots = 1+q+q^3+q^6+q^{10}+\ldots+q^{\frac{k(k+1)}{2}}+\ldots,$$

équation fort remarquable qui conduit à différents théorèmes sur les nombres triangulaires et sur les nombres carrés.

Quand on choisit une valeur de z qui rende nulle une des quantités $1-qz$, $1-q^2z$,... $1-q^nz$, par exemple si l'on fait $z=q^{-m}$, la formule $f(z)$ devient de forme finie, son dernier terme se tirant de

$$q^{\frac{m(m-1)}{2}}\cdot\frac{1-z}{1-q}\cdot\frac{1-qz}{1-q^2}\cdots\frac{1-q^{m-1}z}{1-q^m},$$

où il faut faire $z=q^{-m}$, ce qui donne

$$q^{\frac{m(m+1)}{2}}\cdot\frac{1-q^{-m}}{1-q}\cdot\frac{1-q^{-m+1}}{1-q^2}\cdots\frac{1-q^{-1}}{1-q^m},$$

tous les termes suivants étant nuls à cause du facteur $1-q^0=0$, qui entre dans leurs numérateurs.

L'équation (f) devient alors

$$(h)\qquad \left\{\begin{aligned} &1+q\frac{1-q^{-m}}{1-q}+q^3\frac{1-q^{-m}}{1-q}\cdot\frac{1-q^{-m+1}}{1-q^2}\cdots+q^{\frac{m(m+1)}{2}}\cdot\frac{1-q^{-m}}{1-q}\cdot\frac{1-q^{-m+1}}{1-q^2}\cdots\frac{1-q^{-1}}{1-q^m}\\ &=f(q^{2n-m})(1-q^{-m+1})(1-q^{-m+2})\ldots(1-q^{-m+2n-1}) \end{aligned}\right.$$

Il se présente ici deux cas.

Soit $m+1=p$ un nombre pair; en posant $m+1=2n$, le facteur $1-q^{-m+2n-1}$ deviendra nul, ainsi le premier membre de l'équation sera nul. C'est en effet ce que l'on vérifie directement, car le dernier terme détruit le premier, l'avant-dernier détruit le deuxième, et ainsi de suite, jusqu'aux deux termes moyens qui se détruisent également.

On a donc identiquement pour m impair,

$$(i)\quad 1+q\frac{1-q^{-m}}{1-q}+q^3\frac{1-q^{-m}}{1-q}\cdot\frac{1-q^{-m+1}}{1-q^2}+\ldots+q^{\frac{m(m+1)}{2}}\cdot\frac{1-q^{-m}}{1-q}\cdots\frac{1-q^{-1}}{1-q^m}=0.$$

Si dans cette identité on fait $\qquad q^{+m}=q,$

d'où $\qquad q^{m+1}=q^p=1,$

et par suite $\qquad q=\cos\frac{2h\pi}{p}+\sin\frac{2h\pi}{p}\sqrt{-1},$

en ayant soin de prendre h premier à p, aucun des facteurs

$$1-q,\ 1-q^2,\ldots 1-q^m=1-q^{p-1}$$

ne deviendra nul, et l'équation (i) prendra la forme

$$(k)\qquad 1+q+q^3+q^6+\ldots+q^{\frac{p-1.p}{2}}=0,$$

ou bien encore

$$(l)\qquad \sum\left(\cos\frac{i^2+i}{2}.\frac{2h\pi}{p}+\sin\frac{i^2+i}{2}.\frac{2h\pi}{p}\sqrt{-1}\right)=0,$$

d'où résulte, par conséquent, pour p pair premier à h,

$$(m)\qquad \sum\cos\frac{i^2+i}{2}.\frac{2h\pi}{p}=\sum\sin\frac{i^2+i}{2}.\frac{2h\pi}{p}=0,$$

les sommes étant prises de $i=0$ à $i=p-1$.

Soit maintenant $m+i=p$ un nombre impair, m sera pair, et si l'on pose $m=2n$, comme $f(q^0)=f(1)=1$, l'équation (h) deviendra

$$(n)\left\{\begin{aligned}&1+q\frac{1-q^{-m}}{1-q}+q^3\frac{1-q^{-m}}{1-q}.\frac{1-q^{-m+1}}{1-q^2}+\ldots+q^{\frac{m.m+1}{2}}.\frac{1-q^{-m}}{1-q}.\frac{1-q^{-m+1}}{1-q^2}\cdots\frac{1-q^{-1}}{1-q^m}\\&=(1-q^{-m+1})(1-q^{-m+3})\ldots(1-q^{-1}).\end{aligned}\right.$$

Et si l'on pose encore $\qquad q=q^{-m},$

d'où $\qquad q^{m+1}=q^p=1,$

on obtiendra

$$(o)\quad 1+q+q^3+q^6+\ldots+q^{\frac{p-1.p}{2}}=(1-q^{-p+2})(1-q^{-p+4})\ldots(1-q^{-1}).$$

Comme l'on a $q=\cos\frac{2h\pi}{p}+\sin\frac{2h\pi}{p}\sqrt{-1}$, en supposant h premier à p, on pourra transformer l'équation (o). D'abord le premier membre deviendra

$$\sum\cos\frac{i^2+i}{2}.\frac{2h\pi}{p}+\sum\sin\frac{i^2+i}{2}.\frac{2h\pi}{p}\sqrt{-1};$$

puis, comme l'on a

$$1-q^{-a}=1-\cos\frac{2ah\pi}{p}+\sin\frac{2ah\pi}{p}\sqrt{-1}$$
$$=2\sqrt{-1}.\sin\frac{ah\pi}{p}\left(\cos\frac{ah\pi}{p}-\sin\frac{ah\pi}{p}\sqrt{-1}\right),$$

si l'on fait successivement $a=1, 3, 5\ldots p-2$, dont la somme est $\left(\frac{p-1}{2}\right)^2$, on trouvera pour le cas de $p=4q+1$,

$$\sum\cos\frac{i^2+i}{2}.\frac{2h\pi}{p}+\sum\sin\frac{i^2+i}{2}.\frac{2h\pi}{p}\sqrt{-1}=$$
$$2^{\frac{p-1}{2}}\sin\frac{h\pi}{p}\sin 2\frac{h\pi}{p}\sin 3\frac{h\pi}{p}\ldots\ldots\sin\frac{p-1}{2}.\frac{2h\pi}{p}\left(\cos q\frac{h\pi}{p}+\sin q\frac{h\pi}{p}\sqrt{-1}\right),$$

au moyen de quelques transformations qui se présentent d'elles-mêmes.

Et pour le cas de $p=4q-1$, on trouvera pareillement

$$\sum\cos\frac{i^2+i}{2}.\frac{2h\pi}{p}+\sum\sin\frac{i^2+i}{2}.\frac{2h\pi}{p}\sqrt{-1}=$$
$$2^{\frac{p-1}{2}}\sin\frac{h\pi}{p}\sin 2\frac{h\pi}{p}\sin 3\frac{h\pi}{p}\ldots\ldots\sin\frac{p-1}{2}.\frac{2h\pi}{p}\left(\sin q\frac{h\pi}{p}+\cos q\frac{h\pi}{p}\sqrt{-1}\right).$$

Posant donc $\quad P=2^{\frac{p-1}{2}}\sin\frac{h\pi}{p}\sin 2\frac{h\pi}{p}\ldots\sin\frac{p-1}{2}.\frac{h\pi}{p}$,

on aura pour $p=4q+1$,

$$\sum\cos\frac{i^2+i}{2}.\frac{2h\pi}{p}=P\cos q\frac{h\pi}{p},\quad \sum\sin\frac{i^2+i}{2}.\frac{2h\pi}{p}=P\sin q\frac{h\pi}{p};$$

et pour $p=4q-1$,

$$\sum \cos \frac{i^2+i}{2} \cdot \frac{2h\pi}{p} = \mathrm{P} \sin q \frac{h\pi}{p}, \quad \sum \sin \frac{i^2+i}{2} \cdot \frac{2h\pi}{p} = \mathrm{P} \cos q \frac{h\pi}{p}.$$

Cherchons maintenant quelle est la valeur du produit

$$\mathrm{P} = 2^{\frac{p-1}{2}} \sin \frac{p}{h\pi} \sin 2 \frac{h\pi}{p} \sin 3 \frac{h\pi}{p} \ldots \sin \frac{p-1}{p} \cdot \frac{h\pi}{p},$$

où h est premier à p.

Posons, en général, $\qquad ah = p\mathrm{Q}_a + r_a,$

d'où

$$a \frac{h}{p} = \mathrm{Q}_a + \frac{r_a}{p}, \sin a \frac{h\pi}{p} = \sin\left(\mathrm{Q}_a \cdot \pi + \frac{r_a}{p}\pi\right) = (-1)^{\mathrm{Q}_a} \sin \frac{r_a\pi}{p}:$$

or, parmi les restes $r_1, r_2, r_3, \ldots r_{\frac{p-1}{2}}$, se trouvent : 1° des nombres positifs $< \frac{p}{2}$; 2° des nombres positifs $> \frac{p}{2}$ et que l'on peut remplacer par $p - \rho_a, p - \rho_b, p - \rho_c, \ldots$ où $\rho_a, \rho_b, \rho_c, \ldots$ sont $< \frac{p}{2}$; ces nombres ρ_a, $\rho_b \ldots$ forment avec ceux énoncés en 1°, la suite $1, 2, 3, \ldots \frac{p-1}{2}$: de plus

$$\frac{r_a\pi}{p} = \frac{(p-\rho_a)\pi}{p} = \pi - \frac{\rho_a\pi}{p}$$

donne

$$\sin \frac{r_a\pi}{p} = \sin \frac{\rho_a\pi}{p};$$

on aura donc finalement

$$\mathrm{P} = (-1)^{\mathrm{Q}_1 + \mathrm{Q}_2 + \ldots + \mathrm{Q}_{\frac{p-1}{2}}} 2^{\frac{p-1}{2}} \sin \frac{\pi}{p} \sin 2 \frac{\pi}{p} \ldots \sin \frac{p-1}{p} \cdot \frac{\pi}{2},$$

où tous les facteurs sont positifs, sauf celui-ci $(-1)^{\mathrm{Q}_1 + \mathrm{Q}_2 + \ldots + \mathrm{Q}_{\frac{p-1}{2}}}$ qui est $+1$ ou -1, selon que $\mathrm{Q}_1 + \mathrm{Q}_2 + \ldots + \mathrm{Q}_{\frac{p-1}{2}} = \sigma$ est pair ou impair, ce qu'on trouve par la règle suivante, due à M. Gauss :

« Faites sur p et h premiers entre eux l'opération du plus grand com-
» mun diviseur, et soient $q, r, s, t, \ldots v, 1$ les restes successifs; soient p', h',
» $q', r', \ldots v'$ les plus grands nombres ne surpassant pas $\frac{p}{2}, \frac{h}{2}, \frac{q}{2} \ldots \frac{v}{2}$; les

» quotients successifs donnés par l'opération du plus grand commun » diviseur étant $\alpha, \beta, \ldots \lambda, \mu$, écrivez ainsi les deux suites

$$\text{(I)} \qquad p', h', q', r', s', \ldots u', v',$$

$$\text{(II)} \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots \lambda, \mu.$$

» Soient, dans la série (I), i le nombre des termes impairs suivis de termes » aussi impairs; et J celui de quotients impairs de la série (II) au-dessus » desquels se trouvent, dans la série (I), des nombres de forme $4k+1$ ou » $4k+2$; la somme $\sigma = Q_1 + Q_2 + \ldots \left[= e\left(\frac{h}{p}\right) + e\left(\frac{2h}{p}\right) \ldots + e\left(\frac{p'h}{p}\right)\right.$, » suivant la notation de M. Gauss], sera paire ou impaire en même » temps que $i + J$.»

Pour la démontrer, on peut consulter le tome III de ce Journal, page 140.

Le signe de P étant déterminé, il faut en avoir la valeur absolue; or l'identité

$$x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1 = \left(x^2 - 2x\cos\frac{2\pi}{p} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{4\pi}{p} + 1\right)\ldots\left(x^2 - 2x\cos\frac{p-1.\pi}{p} + 1\right),$$

donne, en y posant $x = 1$, à cause de $2 - 2\cos\frac{2a\pi}{p} = 4\sin^2\frac{a\pi}{p}$,

$$p = 2^{p-1}\sin^2\frac{\pi}{p}\sin^2.2\frac{\pi}{p}\sin^2.3\frac{\pi}{p}\ldots\sin^2\frac{p-1}{2}.\frac{\pi}{p};$$

d'où, par l'extraction de la racine carrée,

$$\sqrt{p} = 2^{\frac{p-1}{2}}\sin\frac{\pi}{p}\sin 2\frac{\pi}{p}\ldots\sin\frac{p-1}{2}.\frac{\pi}{p}.$$

Telle est la valeur absolue de P. Quant au facteur $(-1)^{\sigma}$ qui donne le signe, nous le représenterons par le symbole (h, p) pour rappeler la manière dont il dépend de p et h.

Pour avoir les valeurs des sommes $\sum\sin\frac{i^2+i}{2}.\frac{2h\pi}{p}$, $\sum\cos\frac{i^2+i}{2}.\frac{2h\pi}{p}$, pour le cas de h et p non premiers entre eux, nous représenterons par d leur plus grand commun diviseur, et nous ferons

$$h = h'd, \quad p = p'd, \quad \text{d'où} \quad \frac{2h\pi}{p} = \frac{2h'\pi}{p'},$$

h' et p' étant premiers entre eux. La supposition $i = kp' + i'$ donnera

$$\frac{i^2+i}{2}\cdot\frac{2h\pi}{p} = \left[\tfrac{1}{2}p'k.kp' + 2i + 1 + \frac{i'^2+i'}{2}\right]\frac{2h'\pi}{p'}.$$

Or dans cet arc on peut négliger les multiples de 2π; on écrira donc seulement

$$k(kp'+1)h'\pi + \frac{i'^2+i'}{2}\cdot\frac{2h'\pi}{p'}.$$

1°. Pour p' impair, $k(kp'+1)h'\pi$ se réduit à $k.k+1.h'\pi$, qu'on peut supprimer puisque $k.k+1$ est pair. L'arc se réduira donc à $\frac{i'^2+i'}{2}\cdot\frac{2h'\pi}{p}$; on aura par conséquent

$$\sum \sin\frac{i^2+i}{2}\cdot\frac{2h\pi}{p} = d\sum \sin\frac{i'^2+i'}{2}\cdot\frac{2h'\pi}{p'},$$
$$\sum \cos\frac{i^2+i}{2}\cdot\frac{2h\pi}{p} = d\sum \cos\frac{i'^2+i'}{2}\cdot\frac{2h'\pi}{p'},$$

les sommes des premiers membres étant prises de 0 à $p-1$, et les autres de 0 à $p'-1$.

2°. Pour p' pair et par suite h' impair, la partie $k(kq'+1)h'\pi$ se réduit à $k\pi$, qui pourra être négligée si k est pair; mais si k est impair, les sinus et cosinus changeront de signe. Il suit de là que pour d pair les deux sommes sont nulles, et que pour d impair elles se réduisent aux sommes $\sum \sin\frac{i'^2+i}{2}\frac{2h'\pi}{p'}$ et $\sum \cos\frac{i'^2+i'}{2}\frac{2h'\pi}{p'}$, prises de $i'=0$ à $i=p'-1$, et sont par conséquent nulles encore, puisque p' est pair. En résumé on a :

1°. p et h étant premiers entre eux,

$$\left.\begin{array}{ll}
p = 2q, & \sum \sin\frac{i^2+i}{2}\cdot\frac{2h\pi}{p} = \sum \cos\frac{i^2+i}{2}\cdot\frac{2h\pi}{p} = 0, \\
p = 4q+1, & \sum \sin\frac{i^2+i}{2}\cdot\frac{2h\pi}{p} = (h,p)\sqrt{p}\,\sin q\frac{h\pi}{p}, \\
 & \sum \cos\frac{i^2+i}{2}\cdot\frac{2h\pi}{p} = (h,p)\sqrt{p}\,\cos q\frac{h\pi}{p}, \\
p = 4q-1, & \sum \sin\frac{i^2+i}{2}\cdot\frac{2h\pi}{p} = (h,p)\sqrt{p}\,\cos q\frac{h\pi}{p}, \\
 & \sum \cos\frac{i^2+i}{2}\cdot\frac{2h\pi}{p} = (h,p)\sqrt{p}\,\sin q\frac{h\pi}{p};
\end{array}\right\} \quad p$$

2°. p et h ayant pour plus grand commun diviseur d, $p = p'd$, $h = h'd$,

$$p' \text{ pair}, \quad \sum \sin \frac{i^2+i}{2} \cdot \frac{2h\pi}{p} = \sum \cos \frac{i^2+i}{2} \cdot \frac{2h\pi}{p} = 0,$$

$$p' \text{ impair}, \quad \sum \sin \frac{i^2+i}{2} \cdot \frac{2h\pi}{p} = d \sum \sin \frac{i^2+i}{2} \cdot \frac{2h'\pi}{p'},$$

$$\sum \cos \frac{i^2+i}{2} \cdot \frac{2h\pi}{p} = d \sum \cos \frac{i^2+i}{2} \cdot \frac{2h'\pi}{p'},$$

les premières sommes étant prises de $i = 0$ à $i = p - 1$, et les autres de $i = 0$ à $i = p' - 1$.

Dans les équations (p) relatives au cas de p impair, si l'on change h en $8h$, l'arc $\frac{i^2+i}{2} \cdot \frac{2h\pi}{p}$ deviendra $[(2i+1)^2 - 1] \frac{2h\pi}{p}$, et $q \frac{h\pi}{p}$ se changera en $p \mp 1 \frac{2h\pi}{p}$, puisque l'on a $p = 4q \pm 1$. De plus, il est très facile de voir qu'on a entre les limites $i = 0$ et $i = p - 1$,

$$\sum \sin (2i+1)^2 \frac{2h\pi}{p} = \sum \sin i^2 \frac{2h\pi}{p}, \quad \sum \cos (2i+1)^2 \frac{2h\pi}{p} = \sum \cos i^2 \frac{2h\pi}{p};$$

de sorte qu'on trouve, en développant les équations (p) pour le cas de $p = 4q + 1$,

$$\cos \frac{2h\pi}{p} \sum \sin i^2 \frac{2h\pi}{p} - \sin \frac{2h\pi}{p} \sum \cos i^2 \frac{2h\pi}{p} = -(8h, p) \sqrt{p} \sin \frac{2h\pi}{p},$$

$$\cos \frac{2h\pi}{p} \sum \cos i^2 \frac{2h\pi}{p} + \sin \frac{2h\pi}{p} \sum \sin i^2 \frac{2h\pi}{p} = (8h, p) \sqrt{p} \cos \frac{2h\pi}{p};$$

d'où l'on tire

$$\sum \sin i^2 \frac{2h\pi}{p} = 0, \quad \sum \cos i^2 \frac{2h\pi}{p} = (8h, p) \sqrt{p}.$$

Pour le cas de $p = 4q - 1$, on trouve de même

$$\cos \frac{2h\pi}{p} \sum \sin i^2 \frac{2h\pi}{p} - \sin \frac{2h\pi}{p} \sum \cos i^2 \frac{2h\pi}{p} = (8h, p) \sqrt{p} \cos \frac{2h\pi}{p},$$

$$\cos \frac{2h\pi}{p} \sum \cos i^2 \frac{2h\pi}{p} + \sin \frac{2h\pi}{p} \sum \sin i^2 \frac{2h\pi}{p} = (8h, p) \sqrt{p} \sin \frac{2h\pi}{p};$$

d'où l'on tire

$$\sum \sin i^2 \frac{2h\pi}{p} = (8h,p)\sqrt{p}, \quad \sum \cos i^2 \frac{2h\pi}{p} = 0.$$

Dans ces formules on peut remplacer $(8h,p)$ par $(2h,p)$. En effet, d'après la notation précédente on a

$$2^{\frac{p-1}{2}} \sin\frac{2h\pi}{p} \sin 2\frac{2h\pi}{p} \ldots \sin\frac{p-1}{2}\cdot\frac{2h\pi}{p} = (2h,p)\sqrt{p};$$

de plus, si dans l'hypothèse de $p = 4q+1$, pour lequel le premier membre de l'équation précédente renferme $\frac{p-1}{2} = 2q$ facteurs sinus, on transforme les q derniers au moyen de l'équation

$$\sin\left(\frac{p-1}{2} - i\right)\frac{2h\pi}{p} = \sin\left[h\pi - (2i+1)\frac{h\pi}{p}\right] = (-1)^{h+1}\sin(2i+1)\frac{h\pi}{p},$$

il prendra la forme

$$2^{\frac{p-1}{2}} \sin\frac{h\pi}{p} \sin 2\frac{h\pi}{p} \ldots \sin\frac{p-1}{2}\cdot\frac{h\pi}{p}(-1)^{h+1\cdot q},$$

ou bien encore

$$(h,p)\sqrt{p}.(-1)^{\overline{h+1}\cdot q},$$

d'où, par conséquent, l'équation

$$(2h,p) = (h,p)(-1)^{\overline{h+1}\cdot q}.$$

Pour le cas de $p = 4q-1$, ou $\frac{p-1}{2} = 2q-1$, il suffira de transformer les $q-1$ derniers facteurs du premier membre de l'équation dont le deuxième membre est $(2h,p)\sqrt{p}$, et l'on obtiendra ainsi

$$(2h,p) = (h,p)(-1)^{\overline{h+1}\cdot q-1}.$$

Si dans ces équations on change successivement h en $2h$ et $4h$, on trouvera pour $p = 4q+1$,

$$(4h,p) = (2h,p)(-1)^q, \quad (8h,p) = (4h,p)(-1)^q.$$

d'où $$(8h, p) = (2h, p).$$

On obtient la même équation pour $p = 4q - 1$.

Le changement de $(8h, p)$ en $(2h, p)$ donne les valeurs des sommes $\sum \sin i^2 \frac{2h\pi}{p}$, $\sum \sin i^2 \frac{2h\pi}{p}$, sous une forme que nous retrouverons plus loin. De plus, dans le cas de p premier, $(2h, p)$ est $+1$ pour h résidu quadratique de p, et -1 pour h non-résidu quadratique de p; ainsi l'on pourra, en employant la notation de Legendre, remplacer $(2h, p)$ par $\left(\frac{h}{p}\right)$.

Pour prouver l'assertion précédente, partageons la série $1, 2, 3 \ldots p-1$ en deux autres :

1°. les résidus quadratiques $a, a', a'' \ldots a^{\left(\frac{p-1}{2}\right)}$;

2°. les non-résidus quadratiques $b, b', b'' \ldots b^{\left(\frac{p-1}{2}\right)}$.

Il suit des premières notions sur les résidus, que h étant résidu, la suite des nombres

$$1^2 h,\ 2^2 h,\ 3^2 h, \ldots (p-1)^2 h,$$

divisés par p, produit la suite des résidus

$$a,\ a',\ a'', \ldots a^{\left(\frac{p-1}{2}\right)},$$

chacun se trouvant répété deux fois, et que h étant non-résidu, on a, au contraire, la suite

$$b,\ b',\ b'', \ldots b^{\left(\frac{p-1}{2}\right)},$$

chaque non-résidu étant répété deux fois.

Les sommes

$$\sum \sin i^2 \frac{2h\pi}{p} = \sum \sin \frac{i^2 h}{p} 2\pi,$$

$$\sum \cos i^2 \frac{2h\pi}{p} = \sum \cos \frac{i^2 h}{p} 2\pi,$$

ne peuvent donc prendre que deux valeurs ± 0, $\pm \sqrt{p}$. Or les valeurs

$+0$ et $+\sqrt{p}$ répondant évidemment au cas de $h=1$, répondent au cas de h résidu; il reste à démontrer que pour le cas de h non-résidu on a nécessairement des valeurs de signe contraire.

L'équation $$x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x^2+x+1=0$$

donne nécessairement

$$\sum \cos i\frac{2h\pi}{p}+\sum \sin i\frac{2h\pi}{p}\sqrt{-1}=-1,$$

ou bien encore

$$1+\sum \cos i\frac{2h\pi}{p}=0,\quad \sum \sin i\frac{2h\pi}{p}=0.$$

Or h, $2h$, $3h,\ldots\overline{p-1}.h$ divisés par p, donnent la suite $1,2,3,\ldots p-1$, ou bien l'ensemble des deux suites a, a', a'',... b, b', b'',... on a donc

$$1+\sum \cos a\frac{2h\pi}{p}+\sum \cos b\frac{2h\pi}{p}=0,$$
$$\sum \sin a\frac{2h\pi}{p}+\sum \sin b\frac{2h\pi}{p}=0.$$

1°. Soit $$p=4q+1,$$

on a $$1+2\sum \cos a\frac{2h\pi}{p}=(2h,p)\sqrt{p};$$

donc

$$\sum \cos a\frac{2h\pi}{p}-\sum \cos b\frac{2h\pi}{p}=\sum \cos ah\frac{2\pi}{p}-\sum \cos bh\frac{2\pi}{p}=(2h,p)\sqrt{p}.$$

Le changement de h en non-résidu ne fait que changer le signe du premier membre, donc il changera aussi celui de $(2h,p)$.

2°. Pour $$p=4q-1,$$

on a l'équation $$2\sum \sin a\frac{2h\pi}{p}=(2h,p)\sqrt{p},$$

d'où

$$\sum \sin a\frac{2h\pi}{p}-\sum \sin b\frac{2h\pi}{p}=(2h,p)\sqrt{p},$$

qui conduit à la même conséquence.

Ainsi pour h résidu quadratique, on a

$$(2h, p) = +1 = \left(\frac{h}{p}\right),$$

et pour h non-résidu quadratique, on a

$$(2h, p) = -1 = \left(\frac{h}{p}\right).$$

On en peut voir une autre démonstration à l'endroit cité du troisième volume du *Journal de Mathématiques*.

II.

Dans ce paragraphe, nous retrouverons les valeurs précédentes de $\sum \sin i^2 \frac{2h\pi}{p}$, $\sum \cos i^2 \frac{2h\pi}{p}$ par le moyen de la sommation de certaines séries, que M. Jacobi a données sans démonstration, à la page 186 de ses *Fundamenta nova Functionum ellipticarum*. Nous obtiendrons ainsi les sommes pour le cas de p pair, qu'il serait peut-être difficile de déduire du paragraphe précédent.

Considérons les deux suites

$$(n)\begin{cases} \theta(z^2) = 1 - q\frac{1-z^2}{1-q^2} + q^4\frac{1-z^2.1-q^2z^2}{1-q^2.1-q^4} + \ldots \pm q^{m^2}\frac{1-z^2.1-q^2z^2\ldots 1-q^{2m-2}z^2}{1-q^2\ldots 1-q^{2m}} + \ldots \\ \phi(z^2) = q - q^4\frac{1-z^2}{1-q^2} + q^9\frac{1-z^2.1-q^2z^2}{1-q^2.1-q^4} \pm q^{(m+1)^2}\frac{1-z^2.1-q^2z^2\ldots 1-q^{2m-2}z^2}{1-q^2.1-q^4\ldots 1-q^{2m}}. \end{cases}$$

Si l'on pose

$$f(z) = \theta(z^2) + \frac{z}{q}\phi(z^2),$$

on trouvera facilement cette équation de définition

$$f(z) = (1+z)f(qz).$$

On a en effet

$$(1+z)f(qz) = \theta(q^2z^2) + z^2\phi(q^2z^2) + z[\theta(q^2z^2) + \phi(q^2z^2)],$$

puis

$$\theta(z^2) = \theta(q^2z^2) + z^2\phi(q^2z^2), \quad \frac{1}{q}\phi(z^2) = \theta(q^2z^2) + \phi(q^2z^2).$$

d'où l'équation $f(z)=(1+z)f(qz)$, qui donne de suite

$$(q)\qquad f(z)=f(q^m z)(1+z)(1+qz)(1+q^2z)\ldots(1+q^{m-1}z).$$

Pour $m=\infty$ et $q<1$, on aura donc

$$f(z)=f(0)(1+z)(1+qz)(1+q^2z)\ldots,$$

en admettant qu'aucun facteur du second membre ne soit nul et que $f(z)$ reste convergente quand on y remplace z par z, qz, $q^2z\ldots$

Comme la supposition $z=1$ donne $f(z)=2$, il en résultera

$$1=f(0)(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\ldots,$$

et par conséquent l'élimination de $f(0)$ donnera

$$(r)\qquad f(z)=\frac{1+z}{1+q}\cdot\frac{1+qz}{1+q^2}\cdot\frac{1+q^2z}{1+q^3}\ldots,$$

Si dans cette formule on change z en $-z$, on obtiendra $f(-z)$, et comme l'on a

$$f(z)+f(-z)=2\theta(z^2),\quad f(z)-f(-z)=2\frac{z}{q}\varphi(z^2).$$

il en résultera

$$(s)\quad\begin{cases}\theta(z^2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+z}{1+q}\cdot\frac{1+qz}{1+q^2}\cdot\frac{1+q^2z}{1+q^3}\ldots+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-z}{1+q}\cdot\frac{1-qz}{1+q^2}\cdot\frac{1-q^2z}{1+q^3}\ldots,\\ \varphi(z^2)=\frac{q}{2z}\cdot\frac{1+z}{1+q}\cdot\frac{1+qz}{1+q^2}\cdot\frac{1+q^2z}{1+q^3}\ldots-\frac{q}{2z}\cdot\frac{1-z}{1+q}\cdot\frac{1-qz}{1-q^2}\cdot\frac{1-q^2z}{1-q^3}\ldots\end{cases}$$

formules données par M. Jacobi.

La supposition $z=q$ réduit la première à

$$1-q+q^4-q^9+\ldots=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1-q}{1+q}\cdot\frac{1-q^2}{1+q^2}\cdot\frac{1-q^3}{1+q^3}\ldots\ldots,$$

ou bien encore

$$\frac{1-q}{1+q}\cdot\frac{1-q^2}{1+q^2}\cdot\frac{1-q^3}{1+q^3}\ldots=1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}\ldots\pm 2q^{m^2}\mp\ldots$$

qui, par le changement du signe de q devient

$$(t)\quad \frac{1+q}{1-q}\cdot\frac{1+q^2}{1-q^2}\cdot\frac{1+q^3}{1-q^3}\ldots = 1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}\ldots+2q^{m^2}+\ldots.$$

qui conduit à divers théorèmes sur les nombres carrés.

Nous examinerons ici le cas particulier où le nombre de termes des fonctions $\theta(z^2)$ et $\varphi(z^2)$ devient limité, ce qui arrive pour $z=\pm q^{-m}$.

Dans cette supposition l'équation (q) devient

$$(u)\left\{\begin{aligned}&1-q\frac{1-q^{-2m}}{1-q^2}+q^4.\frac{1-q^{-4m}}{1-q^2}\cdot\frac{1-q^{-2m+2}}{1-q^4}+\ldots\pm q^{m^2}\frac{1-q^{-2m}}{1-q^2}\cdot\frac{1-q^{-2m+2}}{1-q^4}\ldots\frac{1-q^{-2}}{1-q^{2m}}\\ &\pm q^{-(m+1)}\left[q-q^4\frac{1-q^{-2m}}{1-q^2}+q^9.\frac{1-q^{-2m}}{1-q^2}\cdot\frac{1-q^{-2m+2}}{1-q^4}+\ldots\pm q^{(m+1)^2}\frac{1-q^{-2m}}{1-q^2}\cdot\frac{1-q^{-2m+2}}{1-q^4}\ldots\frac{1-q^{-2}}{1-q^{2m}}\right]\\ &\quad=f(\pm 1)(1\pm q^{-m})(1\pm q^{-m+1})\ldots(1\pm q^{-1}),\end{aligned}\right.$$

et par le changement de signe de q

$$(v)\left\{\begin{aligned}&1+q\frac{1-q^{-2m}}{1-q^2}+q^4.\frac{1-q^{-2m}}{1-q^2}\cdot\frac{1-q^{-2m+2}}{1-q^4}+\ldots+q^{m^2}\frac{1-q^{-2m}}{1-q^2}\ldots\frac{1-q^{-2}}{1-q^{2m}}\\ &\pm(-1)^m q^{-(m+1)}\left[q+q^4\frac{1-q^{-2m}}{1-q^2}+q^9.\frac{1-q^{-2m}}{1-q^2}\cdot\frac{1-q^{-2m+2}}{1-q^4}+\ldots+q^{(m+1)^2}\frac{1-q^{-2m}}{1-q^2}\cdot\frac{1-q^{-2}}{1-q^{2m}}\right]\\ &\quad=(1\pm 1)(1\mp q^{-1})(1\pm q^{-2}q)\ldots(1\pm q^{-m}),\end{aligned}\right.$$

car $f(\pm 1)=1\pm 1$.

Si dans cette équation on pose $m+1=p$, elle deviendra, pour le cas de p impair, en prenant le signe supérieur et supposant de plus $q^{m+1}=q^p=1$:

$$1+q+q^4+\ldots+q^{(p-1)^2}=(1-q^{-1})(1+q^{-2})\ldots[1+q^{-(p-1)}].$$

Il est à remarquer que

$$q=\cos\frac{2h\pi}{p}+\sin\frac{2h\pi}{p}\sqrt{-1}$$

donne

$$q^{2k}=\cos\frac{4hk\pi}{p}+\sin\frac{4hk\pi}{p}\sqrt{-1},$$

et par conséquent dans la supposition de h premier à p, on ne pourra avoir $q^{2k}=1$, qu'en posant $k=p=m+1$, ainsi l'équation (u) ne prend

pas de dénominateurs nuls et l'indétermination ne s'introduit point.

Si l'on observe que

$$(1 \pm q^{-i})[1 \mp q^{-(p-i)}] = 1 \mp q^{-(p-i)} \pm q^{-i} - q^{-p} = \pm(q^{-i} - q^{i}),$$

le signe supérieur étant pour i pair et l'inférieur pour i impair, on aura

$$1 + q + q^4 + \ldots + q^{(p-1)^2} = (q^1 - q^{-1})(q^{-2} - q^{+2})\ldots\left(q^{\pm\frac{p-1}{2}} - q^{\mp\frac{p-1}{2}}\right),$$

qui pour le cas de $p = 4q + 1$ se réduit à

$$\sum \cos i^2 \frac{2h\pi}{p} + \sum \sin i^2 \frac{2h\pi}{p} = 2^{\frac{p-1}{2}} \sin\frac{2h\pi}{p} \sin 2\frac{2h\pi}{p} \ldots \sin\frac{p-1}{2} \cdot \frac{2h\pi}{p} = (2h, p)\sqrt{p},$$

et pour celui de $p = 4q - 1$ à

$$\sum \cos i^2 \frac{2h\pi}{p} + \sum \sin i^2 \frac{2h\pi}{p}\sqrt{-1} = \sqrt{-1}\, 2^{\frac{p-1}{2}} \sin\frac{2h\pi}{p} \ldots \sin\frac{p-1}{2} \cdot \frac{2h\pi}{p}$$
$$= \sqrt{-1}.(2h, p)\sqrt{p},$$

comme on le trouve de suite au moyen de la formule

$$q^n - q^{-n} = 2\sqrt{-1}.\sin n\frac{2h\pi}{p}.$$

De là se déduisent les valeurs de $\sum \sin i^2 \frac{2h\pi}{p}$ et $\sum \cos i^2 \frac{2h\pi}{p}$ données plus haut.

Maintenant, dans l'équation (u) posons $m + 1 = p$ et encore impair et $q^{m+1} = -1$: en prenant le signe inférieur, on trouvera

$$1 + q + q^4 + \ldots + q^{(p-1)^2} = 0.$$

D'ailleurs, comme $q^p = -1$ donne $q^{2p} = 1$ et $q = \cos\frac{h\pi}{p} + \sin\frac{h\pi}{p}\sqrt{-1}$, on verra encore que dans l'hypothèse de h impair (premier à $2p$) on ne peut avoir $q^{2k} = 1$ sans avoir k multiple de p; ainsi aucun des dénominateurs de l'équation (s) ne devient nul : on a

$$\sum \sin i^2 \frac{2h\pi}{2p} = \sum \cos i^2 \frac{2h\pi}{p} = 0.$$

les sommes étant prises de $i = 0$ à $i = p - 1$; en les doublant on aurait les mêmes sommes prises de $i = 0$ à $i = 2p - 1$.

Le nombre $2p$ est de forme $4q+2$; on voit donc que pour $p = 4q+2$, on a

$$\sum \sin i^2 \frac{2h\pi}{p} = \sum \cos i^2 \frac{2h\pi}{p} = 0,$$

les sommes étant prises de 0 à $p - 1$.

On peut parvenir directement à ce résultat, en considérant la somme

$$1 + q + q^4 + \ldots + q^{(p-1)^2},$$

car en posant

$$q = \cos \frac{2h\pi}{p} + \sin \frac{2h\pi}{p} \sqrt{-1},$$

il en résulte

$$q^{\frac{p}{2}} = \cos h\pi + \sin h\pi . \sqrt{-1} = -1,$$

dans l'hypothèse de p pair et h impair.

Mais

$$q^{\left(\frac{p}{2}+i\right)^2} = q^{\left(\frac{p}{2}\right)^2} q^{pi} q^{i^2} = (-1)^{h.\frac{p}{2}} q^{i^2},$$

on a donc

$$1 + q + q^4 + \ldots + q^{(p-1)^2} = \left[1 + q + q^4 \ldots + q^{\left(\frac{p}{2}-1\right)^2}\right]\left[1 + (-1)^{h\frac{p}{2}}\right].$$

Si $\frac{p}{2}$ est impair aussi bien que h, le facteur $1 + (-1)^{h.\frac{p}{2}}$ deviendra nul, et l'on aura, comme on l'a déjà trouvé,

$$\sum \sin i^2 \frac{2h\pi}{p} = \sum \cos i^2 \frac{2h\pi}{p} = 0.$$

Dans tout autre cas, les sommes $\sum \sin i^2 \frac{2h\pi}{p}$, $\sum \cos i^2 \frac{2h\pi}{p}$ prises de 0 à $p - 1$ sont doubles des mêmes sommes prises de 0 à $\frac{p}{2} - 1$.

Supposons enfin $m + 1 = p$ pair et posons $q^{m+1} = -1 = q^{\frac{p}{2}}$; en prenant le signe supérieur, nous aurons

$$1+q+q^4+\ldots+q^{(p-1)^2}=(1-q^{-1})(1+q^{-2})(1+q^{-3})\ldots[1+q^{-(p-1)}],$$

ici $\quad q^{2p}=1, \quad$ d'où

$$q=\cos\frac{2h\pi}{2p}+\sin\frac{2h\pi}{2p}\sqrt{-1},$$

et l'on voit encore qu'en prenant h premier à p, l'indétermination n'est pas à craindre.

Pour transformer le second membre, on remarquera que

$$(1\pm q^{-i})[1\pm q^{-(p-i)}]=\pm q^{-i}\pm q^{-p+i}=\pm(q^{-i}-q^{i}),$$

le signe supérieur étant pour i pair et l'inférieur pour i impair, si l'on pose $p=2p'$, il faudra avoir égard au facteur moyen $1\pm q^{p'}$ et comme

$$q^{-p'}=\cos\frac{h\pi}{2}-\sin\frac{h\pi}{2}\sqrt{-1}-(-1)^{\frac{h-1}{2}}\sqrt{-1},$$

on trouvera, réduction faite, pour $2p=4p'=8p''+4$,

$$\sum\cos i^2\frac{2h\pi}{2p}+\sum\sin i^2\frac{2h\pi}{2p}\sqrt{-1}=2^{\frac{p}{2}}\sin\frac{2h\pi}{2}\sin 2\frac{2h\pi}{p}\ldots$$
$$\ldots\sin\frac{p}{2}\cdot\frac{2h\pi}{p}\left[(-1)^{\frac{h-1}{2}}+\sqrt{-1}\right],$$

en doublant les deux membres, pour prendre les sommes de 1 à $2p-1$.

Pour $2p=4p'=8p''$, on trouvera de même

$$\sum\cos i^2\frac{2h\pi}{2p}+\sum\sin i^2\frac{2h\pi}{p}\sqrt{-1}=2^{\frac{p}{2}}\sin\frac{2h\pi}{2p}\sin 2\frac{2h\pi}{2p}\ldots$$
$$\ldots\sin\frac{p}{2}\cdot\frac{2h\pi}{p}\left[1+(-1)^{\frac{h-1}{2}}\sqrt{-1}\right].$$

Maintenant prenons l'équation $x^p-1=0$, ou plutôt en divisant par x^2-1,

$$x^{p-2}+x^{p-4}+\ldots+x^2+1=\left(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{p}-1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{4\pi}{p}+1\right)\ldots$$

$$\ldots\left[x^2-2x\cos\frac{2\left(\frac{p}{2}-1\right)\pi}{p}+1\right];$$

la substitution $x=1$ donnera

$$\tfrac{1}{2}p=2^{p-2}\sin^2\frac{\pi}{p}\sin^2 2\frac{\pi}{p}\sin^2 3\frac{\pi}{p}\ldots\sin^2\frac{p}{2}-1\frac{\pi}{p},$$

Multipliant le second membre par $\sin^2\frac{p}{2}.\frac{\pi}{p}=1$, puis par 4 les deux membres, et extrayant la racine carrée, il viendra, à cause de $\frac{\pi}{p}=\frac{2\pi}{2p}$,

$$\sqrt{2p}=2^{\frac{p}{2}}\sin\frac{2\pi}{2p}\sin 2\frac{2\pi}{2p}\sin 3\frac{2\pi}{2p}\ldots\sin\frac{p}{2}.\frac{2\pi}{2p}.$$

Si l'on change π en πh, ce qui évidemment introduit le facteur (h,p),

pour $$p=4q+1,$$

on trouve

$$\sum\cos i^2\frac{2h\pi}{2p}+\sum\sin i^2\frac{2h\pi}{2p}\sqrt{-1}=(h,p)\left[(-1)^{\frac{h-1}{2}}+\sqrt{-1}\right]\sqrt{2p}.$$

d'où l'on tire

$$\sum\sin i^2\frac{2h\pi}{2p}=(h,p)\sqrt{2p},$$

$$\sum\cos i^2\frac{2h\pi}{p}=(h,p)(-1)^{\frac{h-1}{2}}\sqrt{2p};$$

et pour $p=4q-1$

$$\sum\cos i^2\frac{2h\pi}{2p}+\sum\sin i^2\frac{2h\pi}{2p}\sqrt{-1}=(h,p)\left[1+(-1)^{\frac{h-1}{2}}\sqrt{-1}\right]\sqrt{2p}.$$

d'où l'on tire

$$\sum \sin i^2 \frac{2h\pi}{2p} = (h, p)\,(-1)^{\frac{h-1}{2}} \sqrt{2p},$$
$$\sum \cos i^2 \frac{2h\pi}{2p} = (h, p)\sqrt{2p}.$$

Pour le cas de $h = 1$, on a $(-1)^{\frac{h-1}{2}} = 1$, et (h, p) égale 1, comme on l'a vu plus haut; on a donc dans ce cas

$$\sum \sin i^2 \frac{2\pi}{2p} = \sum \cos i^2 \frac{2\pi}{2p} \sqrt{2p},$$

$2p$ étant un nombre pair divisible par 4. Ce qui s'accorde avec les résultats connus.

On voit donc par quelle règle on peut fixer le signe des deux sommes dans tous les cas possibles, h étant premier à p. Dans le cas où h et p auraient d pour plus grand commun diviseur, en posant $h = dh'$, $p = dp'$, $i = kp' + i'$, l'arc $i^2 \frac{2h\pi}{p}$ devenant $(k^2 p'^2 + 2kp'i' + i'^2)\frac{2h'\pi}{p'}$ pourra se réduire à $i'^2 \frac{2h'\pi}{p'}$ et l'on aura

$$\sum \sin i^2 \frac{2h\pi}{p} = d \sum \sin i^2 \frac{2h'\pi}{p'},$$

la première somme étant prise de $i = 0$ à $i = p - 1$ et la deuxième de $i = 0$ à $i = p'$. La même chose a lieu pour toutes les sommes analogues.

On a donc, par ce qui précède, les sommes

$$\sum \sin i^2 \frac{2h\pi}{p}, \quad \sum \cos i^2 \frac{2h\pi}{p},$$

quels que soient h et p, et comme $\sin^m z$ et $\cos^m z$ s'expriment au moyen des sinus et cosinus des arcs multiples, on pourra former immédiatement les valeurs générales des sommes

$$\sum \sin^m i^2 \frac{2h\pi}{p}, \quad \sum \cos^m i^2 \frac{2h\pi}{p},$$

pour toutes les valeurs de h et p.

On pourrait aussi former les sommes

$$\sum \sin^m \frac{i^2 + i}{2} \cdot \frac{2h\pi}{p}, \quad \sum \cos^m \frac{i^2 + i}{2} \cdot \frac{2h\pi}{p}.$$

mais elles seraient moins simples à cause des lignes trigonométriques qui s'introduisent dans le résultat.

Nous allons donner, pour le cas de p premier, les formules

$$\sum \sin^m i^2 \frac{2h\pi}{p} \quad \text{et} \quad \sum \cos^m i^2 \frac{2h\pi}{p}.$$

III.

Nous venons de voir que si l'on représente par p un nombre premier qui ne divise pas h, on a, pour $p = 4q + 1$,

$$\sum \sin i^2 \frac{2h\pi}{p} = 0, \quad \sum \cos i^2 \frac{2h\pi}{p} = \left(\frac{h}{p}\right)\sqrt{p},$$

et pour $p = 4q - 1$,

$$\sum \sin i^2 \frac{2h\pi}{p} = \left(\frac{h}{p}\right)\sqrt{p}, \quad \sum \cos i^2 \frac{2h\pi}{p} = 0,$$

ces sommes étant prises depuis $i = 0$ jusqu'à $i = p - 1$, et $\left(\frac{h}{p}\right)$ représentant $+1$ quand h est résidu quadratique de p, et -1 quand h est non-résidu quadratique de p.

De ces formules de M. Gauss on déduit de suite les formules analogues pour les sommes des mêmes puissances : il suffit de remarquer qu'en posant $(1+1)^m = 1 + M_1 + M_2 + \ldots + M_m$, de sorte que 1, M_1, M_2, etc., soient les coefficients binomiaux 1, $\frac{m}{1}$, $\frac{m.m-2}{1.2}$, etc., on a pour m pair

$$2^{m-1}\cos^m z = \cos mz + M_1 \cos(m-2)z + M_2 \cos(m-4)z + \ldots + \frac{1}{2} M_{\frac{m}{2}} \cos(0.z),$$

$$(-1)^{\frac{m}{2}} 2^{m-1} \sin^m z = \cos mz - M_1 \cos(m-2)z + M_2 \cos(m-4)z - \ldots \pm \frac{1}{2} M_{\frac{m}{2}} \cos(0.z);$$

et pour m impair

$$2^{m-1}\cos^m z = \cos mz + M_1 \cos(m-2)z + M_2 \cos(m-4)z + \ldots + M_{\frac{m-1}{2}} \cos z,$$

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}} 2^{m-1} \sin^m z = \sin mz - M_1 \sin(m-2)z + M_2 \sin(m-4)z - \ldots \pm M_{\frac{m-1}{2}} \sin z.$$

qui, au moyen des formules précédentes, donnent immédiatement, dans le cas de $p = 4q + 1$, 1° pour m pair

$$2^{m-1}\sum \cos^m i^2 \frac{2h\pi}{p} = \left[\left(\frac{mh}{p}\right) + M_1\left(\frac{m-2.h}{p}\right) + \ldots + M_{\frac{m}{2}-1}\left(\frac{2h}{p}\right) + \frac{1}{2}M_{\frac{m}{2}}\sqrt{p}\right]\sqrt{p},$$

$$(-1)^{\frac{m}{2}} 2^{m-1}\sum \sin^m i^2 \frac{2h\pi}{p} = \left[\left(\frac{mp}{2}\right) - M_1\left(\frac{m-2.h}{p}\right) + \ldots \mp M_{\frac{m-1}{2}-1}\left(\frac{2h}{p}\right) \pm \frac{1}{2}M_{\frac{m}{2}}\sqrt{p}\right]\sqrt{p};$$

et pour le cas de m impair

$$2^{m-1}\sum \cos^m i^2 \frac{2h\pi}{p} = \left[\left(\frac{mh}{p}\right) + M_1\left(\frac{m-2.h}{p}\right) + M_2\left(\frac{m-4.h}{p}\right) + \ldots + M_{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{h}{p}\right)\right]\sqrt{p},$$

$$(-1)^{\frac{m-2}{2}} 2^{m-1}\sum \sin^m i^2 \frac{2h\pi}{p} = 0;$$

2°. Pour $p = 4q - 1$, et m pair

$$2^{m-1}\sum \sin^m i^2 \frac{2h\pi}{p} = 2^{m-1}\sum \cos^m i^2 \frac{2h\pi}{p} = \frac{1}{2}pM_{\frac{m}{2}},$$

et pour m impair

$$2^{m-1}\sum \cos^m i^2 \frac{2h\pi}{p} = 0,$$

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}} 2^{m-1}\sum \sin^m i^2 \frac{2h\pi}{p} = \left[\left(\frac{mh}{p}\right) - M_1\left(\frac{m-2.h}{p}\right) + M^2\left(\frac{m-h.h}{p}\right) \ldots \pm M_{\frac{m-1}{2}}\right]\sqrt{p}.$$

Au moyen de ces formules on trouvera très facilement les équations dont les racines sont les sinus ou cosinus des arcs $a\frac{2\pi}{p}$, $a'\frac{2\pi}{p}$, $a''\frac{2\pi}{p}$, etc., en représentant par a, a', a'', etc., les résidus quadratiques de p, et de même celles dont les racines sont les sinus ou cosinus des arcs $b\frac{2\pi}{p}$, $b'\frac{2\pi}{p}$, $b''\frac{2\pi}{p}$, etc., en représentant par b, b', b'', etc., les non-résidus quadratiques de p.

Pour l'équation au sinus, comme deux valeurs de i^2 donnent le même résidu, il faudra diviser les sommes par 2 ; et comme i^2h est résidu ou non-résidu quadratique en même temps que h, on voit que le changement du signe de $\sqrt{-p}$ suffit pour passer de l'équation relative aux arcs $a\frac{2\pi}{p}$, $a'\frac{2\pi}{p}$, etc., à celle relative aux arcs $b\frac{2\pi}{p}$, $b'\frac{2\pi}{p}$, etc.

Pour l'équation au cosinus, à cause de la racine $\cos 0\frac{2\pi}{p} = 1$, il faudra diminuer les sommes de l'unité, puis les diviser par 2. D'ailleurs le passage d'une équation à l'autre se fera par le changement de signe du radical $\sqrt{-p}$, si ce n'est pour le cas de $p = 4q - 1$, car le radical ne se présente point dans les sommes de racines ; en voici la raison.

Pour ce cas, quand a est résidu, $-a$ ou $p - a$ est non-résidu. Or la série des nombres

$$0.h, \quad 1.h, \quad 4.h, \quad 9.h, \ldots (p-1)^2h,$$

quand on en retranche les multiples de p, ce qui n'altère point la valeur des lignes trigonométriques de l'arc $i^2\frac{2h\pi}{p}$, revient à

$$\begin{array}{llll} 0, & ah, & a'h, & a''h\ldots, \\ & ah, & a'h, & a''h, \ldots; \end{array}$$

car chaque résidu se répète deux fois. Or quand on change le signe des arcs, les cosinus ne changent pas : on peut donc remplacer la seconde ligne par

$$(p-a)h, \quad (p-a')h, \quad (p-a'')h, \quad \text{etc.},$$

ou par

$$bh, \quad b'h, \quad b''h\ldots$$

On a donc la suite complète

$$0, \ h, \ 2h, \ 3h\ldots(p-1)h,$$

et comme h est premier à p, on peut la remplacer par

$$0, \ 1, \ 2, \ 3\ldots p-1,$$

de sorte que l'équation à laquelle on parvient n'est autre que celle dont les racines sont

$$\cos 0\frac{2\pi}{p},\ \cos\frac{2\pi}{p},\ \cos 2\frac{2\pi}{p},\ \cos 3\frac{2\pi}{p}\ldots\cos(p-1)\frac{2\pi}{p},$$

équation connue à coefficients rationnels.

Ainsi donc, le cas précédent excepté, si l'on représente par

$$x^{p-1}+A_1x^{p-2}+\ldots Px+Q=0=X$$

l'équation dont les racines sont les sinus ou cosinus des arcs

$$\frac{2\pi}{p},\ 2\frac{2\pi}{p},\ 3\frac{2\pi}{p},\ldots(p-1)\frac{2\pi}{p},$$

la quantité X prendra la forme $Y^2-pZ^2=X$, Y et Z étant des fonctions entières de x.

Ce théorème est analogue à celui relatif à l'équation

$$x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1=X=0.$$

Comme les racines $\cos\frac{2h\pi}{p}+\sin\frac{2h\pi}{p}\sqrt{-1}$ sont de deux sortes : 1° $\cos a\frac{2\pi}{p}+\sin a\frac{2\pi}{p}\sqrt{-1}$, et 2° $\cos b\frac{2\pi}{p}+\sin b\frac{2\pi}{p}\sqrt{-1}$, la somme des $m^{\text{ièmes}}$ puissances des premières sera

$$1^\circ.\ \text{pour } p=4q+1\ldots\ldots-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{m}{p}\right)\sqrt{p},$$

$$2^\circ.\ \text{pour } p=4q-1\ldots\ldots-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{m}{p}\right)\sqrt{-p},$$

et l'on voit de suite que la somme des $m^{\text{ièmes}}$ puissances des secondes ne différera des précédentes que par le signe de $\sqrt{p}$. Ainsi, dans le premier cas on trouvera $X=Y^2-pZ^2$, et dans le second $X=Y^2+pZ^2$, ce qui est le théorème de M. Gauss.

La méthode précédente pour le calcul des fonctions Y et Z a été donnée par M. Legendre. Il en résulte que l'emploi du signe $\left(\frac{h}{p}\right)$ permet de trouver des valeurs générales de Y et Z. Pour plus de détails on peut voir le *Journal de Mathématiques*, tome III, page 128.

Pour donner un exemple de l'emploi des formules précédentes, on peut prendre l'équation

$$Z = x^{16} - \frac{17}{4}x^{14} + \frac{119}{16}x^{12} - \frac{221}{32}x^{10} + \frac{935}{256}x^{8} - \frac{561}{512}x^{6} + \frac{357}{2048}x^{4} - \frac{51}{4096}x^{2} + \frac{17}{65536} = 0,$$

dont les racines sont les sinus des arcs multiples de $\frac{2\pi}{17}$; or on a en général

$$-2\sum \sin a\frac{2\pi}{p} = \left[\left(\frac{2}{p}\right) - \sqrt{p}\right],$$

$$8\sum \sin^2 a\frac{2\pi}{p} = \left[\left(\frac{4}{p}\right) - 4\left(\frac{2}{p}\right) + 3\sqrt{p}\right]\sqrt{p},$$

$$-32\sum \sin^3 a\frac{2\pi}{p} = \left[\left(\frac{6}{p}\right) - 6\left(\frac{4}{p}\right) + 15\left(\frac{2}{p}\right) - 10\sqrt{p}\right],$$

$$128\sum \sin^4 a\frac{2\pi}{p} = \left[\left(\frac{8}{p}\right) - 8\left(\frac{6}{p}\right) + 28\left(\frac{4}{p}\right) - 56\left(\frac{2}{p}\right) + 35\sqrt{p}\right]\sqrt{p},$$

etc.;

les sommes des puissances impaires étant nulles, puisque $p = 4q+1$. Pour le cas particulier de $p = 17$, comme on a

$$\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{4}{p}\right) = \left(\frac{8}{p}\right) = 1, \quad \left(\frac{6}{p}\right) = -1,$$

en représentant pour abréger les sommes des puissances 1e, 2e, 3e... des racines par $f_1, f_2, f_3, \ldots$ il viendra

$$f_1 = f_3 = f_5 = f_7 = 0,$$

$$f_2 = \frac{1}{4}(17 - \sqrt{17}), \quad f_6 = \frac{1}{32}(17.5 - 4\sqrt{17}),$$

$$f_4 = \frac{1}{16}(17.3 - 3\sqrt{17}), \quad f_8 = \frac{1}{256}(17.35 - 19.17),$$

de sorte que l'équation dont les racines sont les sinus des arcs $a.\frac{2\pi}{17}$ ou

$$1\frac{2\pi}{17}, \quad 2\frac{2\pi}{17}, \quad 4\frac{2\pi}{17}, \quad 8\frac{2\pi}{17},$$

et

$$16\frac{2\pi}{17}, \quad 15\frac{2\pi}{17}, \quad 13\frac{2\pi}{17}, \quad 9\frac{2\pi}{17},$$

sera

$$x^8 - \frac{1}{8}(17-\sqrt{17})x^6 + \frac{1}{32}(3.17-7.\sqrt{17})x^4 - \frac{1}{64}(17.2-7.\sqrt{17})x^2$$
$$+\frac{1}{256}(17-4.\sqrt{17}) = 0.$$

comme on le trouve facilement au moyen des relations qui donnent les coefficients d'une équation en fonction des sommes des puissances des racines. Pour cet exemple, on peut consulter le n° 364 des *Recherches arithmétiques* de M. Gauss.

Je finirai ce petit Mémoire en proposant deux problèmes dont je dois dire d'abord que je n'ai pas la solution.

1. Peut-on déduire des équations en $\sin a\frac{2\pi}{p}$ et $\cos a\frac{2\pi}{p}$ (a est un résidu quadratique quelconque), la valeur du produit Π cotang $a\frac{2\pi}{p}$? Pour le cas $p = 4n+3$, M. Stern donne l'équation $\frac{1}{\sqrt{p}} = \Pi \operatorname{cotang} a\frac{2\pi}{p}$ (Journal de M. Crelle, tome XVII, page 375); cependant le signe est tantôt $+$ et tantôt $-$; par quelle règle peut-on le fixer?

2. M. Libri dit dans son Mémoire sur les intégrales définies aux différences finies, que la somme $\sum_{x=0}^{x=n} \cos\frac{2x^3\pi}{n}$ peut s'obtenir en fonction de a, le nombre a étant donné par l'équation indéterminée $4n = a^2 + 27b^2$; il suit en effet de la théorie de M. Gauss que

$$\sum_{x=0}^{n-1}\left(\cos\frac{2x^3\pi}{p} + \sin\frac{2x^3\pi}{p}\sqrt{-1}\right)$$

est racine de l'équation

$$z^3 - 3pz - na = 0.$$

en supposant a de forme $3a'+1$, ce qui détermine son signe. Mais il se présente ici une ambiguïté du genre de celle qui a lieu pour les sommes $\sum \sin\frac{2x^2\pi}{n}$, $\sum \cos\frac{2x^2\pi}{n}$. On doit fixer le choix de la valeur de z : tant

que cela ne sera point fait, la somme $\sum \cos \frac{2x^3\pi}{n}$ ne sera pas déterminée; quant à la somme $\sum \sin \frac{2x^3\pi}{n}$, elle sera toujours nulle. On demande une règle pour fixer le choix de la valeur de z égale à $\sum \cos \frac{2x^3\pi}{n}$? On a $n = 3q + 1$.

On peut proposer une semblable question pour les sommes $\sum \cos \frac{2x^4\pi}{n}$, $\sum \sin \frac{2x^4\pi}{n}$, dans l'hypothèse de $n = 4q + 1$.

EXTRAIT

D'UNE

LETTRE DE M. LEJEUNE-DIRICHLET A M. LIOUVILLE.

« En voyant dans votre Journal l'élégante traduction que M. Terquem a bien voulu faire de mon *Mémoire sur la progression arithmétique* [*], j'ai eu l'idée d'étendre la même analyse aux formes quadratiques. En combinant cette analyse avec les considérations ingénieuses que M. Gauss développe dans les derniers numéros de sa cinquième section, on prouve non-seulement que toute forme quadratique renferme une infinité de nombres premiers, mais encore qu'elle en contient qui soient d'une forme linéaire quelconque compatible avec la forme quadratique donnée.

» Je me suis aussi beaucoup occupé dans ces derniers temps à étendre aux formes quadratiques à coefficients et indéterminées complexes, c'est-à-dire de la forme $t + u\sqrt{-1}$, les théorèmes qui ont lieu dans les cas ordinaires des entiers réels. Si l'on cherche en particulier à obtenir le nombre des formes quadratiques différentes qui existent dans cette hypothese pour un déterminant donné, on arrive à ce résultat assez remarquable, que le nombre dont il s'agit dépend de la division de la lemniscate, de même que dans le cas des formes réelles et à déterminant positif, il se rattache à la section du cercle. Ce qui m'a surtout fait plaisir dans ce travail, c'est le parti qu'on y tire de considérations géométriques et particulièrement de la théorie des propriétés perspectives des figures. Au moyen de cet auxiliaire, la question qui d'abord, et considérée d'une manière purement analytique, paraît extrêmement compliquée, devient presque aussi simple que lorsqu'il s'agit de déterminants réels.

[*] Tome IV de ce Journal, page 393.

» Les recherches dont je viens de vous indiquer l'objet, m'ont conduit à un théorème remarquable par sa simplicité et qui ne paraît pas sans importance pour la théorie des équations indéterminées des degrés supérieurs au second, matière encore très peu cultivée. Voici en quoi consiste ce théorème.

« Si l'équation

$$(1) \qquad s^n + as^{n-1} + \ldots + gs + h = 0,$$

» à coefficients entiers, n'a pas de diviseur rationnel, et si parmi ses » racines $\alpha, \beta, \ldots \omega$, il y en a au moins une qui soit réelle, je dis que » l'équation indéterminée

$$(2) \qquad F(x, y, \ldots z) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta)\ldots\varphi(\omega) = 1,$$

» où l'on a posé pour abréger,

$$\varphi(\alpha) = x + \alpha y + \ldots + \alpha^{n-1} z,$$

» a toujours une infinité de solutions entières. »

» Pour établir ce théorème, il faut d'abord faire voir qu'il existe au moins un entier m tel que l'équation

$$(3) \qquad F(x, y, \ldots z) = m$$

ait une infinité de solutions. C'est à quoi l'on peut parvenir par différents moyens. Dans le cas du second degré, la chose, qui pour ce cas n'est pas nouvelle, résulte immédiatement des propriétés des fractions continues.

» L'équation (3) ayant une infinité de solutions, il en existera deux telles que l'on ait

$$F(x, y, \ldots z) = m, \quad F(x', y', \ldots z') = m,$$

et en même temps,

$$(4) \qquad x \equiv x', \quad y \equiv y', \ldots z \equiv z' \pmod{m}.$$

Cela posé, si nous considérons la fraction

$$\frac{x' + \alpha y' + \ldots + \alpha^{n-1} z'}{x + \alpha y + \ldots + \alpha^{n-1} z},$$

on pourra évidemment [en multipliant par $\varphi(\beta)\ldots\varphi(\omega)$] lui donner la forme

$$\frac{X + \alpha Y + \ldots + \alpha^{n-1} Z}{m},$$

où X, Y,... Z sont des fonctions entières et à coefficients entiers de x, y,... z, x', y',... z'. Je dis maintenant que X, Y,... Z sont des multiples de m. Pour le faire voir, admettons pour un instant que dans ces expressions x', y',... z' soient changés en x, y,... z, changement par lequel X, Y,... Z resteront, en vertu des congruences (4), congrus à eux-mêmes. Par le changement dont il s'agit, $X + \alpha Y + \ldots + \alpha^{n-1} Z$ doit devenir égal à m, ce qui ne peut arriver [l'équation (1) n'ayant pas de diviseurs rationnels] qu'autant que X, Y,... Z deviennent respectivement m, 0,...0. Donc X, Y,... Z sont divisibles par m, et la fraction considérée plus haut est

$$\xi + \alpha\eta + \ldots + \alpha^{n-1}\zeta$$

(ξ, η,... ζ étant des entiers), d'où l'on conclut

$$F(\xi, \eta, \ldots \zeta) = 1,$$

solution qui en fournira une infinité d'autres.

»Parmi les conséquences nombreuses qu'on peut tirer de ce théoreme, il y en a une qui se présente pour ainsi dire d'elle-même et consiste en ce que les fonctions que Lagrange a d'abord considérées dans les *Mémoires de Berlin*, et plus tard, dans les *Additions à l'Algèbre* d'Euler, et qui se reproduisent par la multiplication, si elles peuvent obtenir une certaine valeur, sont dès lors susceptibles de la même valeur pour une infinité de systèmes de valeurs des indéterminées x, y,... z, en supposant toutefois que l'équation algébrique d'où ces fonctions tirent leur origine satisfasse aux conditions ci-dessus énoncées.»

NOTE

Sur la détermination du nombre des racines réelles ou imaginaires d'une équation numérique, comprises entre des limites données. Théorèmes de Rolle, de Budan ou de Fourier, de Descartes, de Sturm et de Cauchy;

PAR M. L'ABBÉ **MOIGNO**.

Mon but, en rédigeant cette Note, a été de faire connaître une méthode très ingénieuse que M. Cauchy a exposée dans un Mémoire ayant pour titre : *Calcul des indices des fonctions*, et qui, lithographié d'abord en novembre 1831, a été imprimé depuis avec des additions importantes, dans le XXVe cahier du *Journal de l'École Polytechnique*. J'ai respecté autant que j'ai pu la marche de l'illustre géomètre ; je me suis efforcé de reproduire, quant à la substance, ses démonstrations; mais j'ai cru, dans l'intérêt de la science, devoir renoncer à ses notations qui auraient certainement effrayé les élèves et souvent même les professeurs. La considération tout-à-fait neuve des indices ou des excès est aussi simple que féconde, mais cette simplicité disparaît quand on l'entoure de signes qui ont au moins l'inconvénient d'avoir trop d'analogie avec les notations ardues du calcul intégral. On n'a jamais plus besoin de notations et de démonstrations élémentaires pour le fond et pour la forme, que lorsqu'on expose une méthode nouvelle ou un calcul nouveau.

Pour arriver à me passer des notations de M. Cauchy, j'ai eu besoin de m'aider d'un Mémoire de M. Sturm, inséré dans le premier volume de ce recueil; je lui ai emprunté la démonstration très simple du rapport qui existe entre les excès de deux fractions inverses. De sorte que si ma Note a quelque mérite, la gloire en reviendra toute entière à M. Cauchy et à M. Sturm. On ne verra peut-être pas sans plaisir comment on peut déduire d'un principe unique et facile à saisir, un grand nombre de théorèmes qui jusqu'ici demandaient des démonstrations in-

dépendantes, souvent pénibles, et dont le seul énoncé aurait effrayé, il y a trente ans, les plus habiles analystes. Lagrange et Legendre auraient en effet eu de la peine à croire qu'on arriverait par des procédés très élémentaires à déterminer, pour une équation de degré quelconque, le nombre des racines imaginaires dont la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ sont compris entre des limites données.

1. *Définitions.* Lorsqu'une fonction rationnelle quelconque $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ change de signe en devenant infinie pour une valeur réelle $x=a$ propre à vérifier l'équation $\varphi(x)=0$, elle peut passer du négatif au positif, ou du positif au négatif. Dès lors si les deux nombres n et n' indiquent le premier combien de fois la fraction $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ en devenant infinie, passe du négatif au positif pendant que la variable x passe de la valeur $x=x_0$ à la valeur $x=\mathrm{X}$, le second combien de fois cette même fraction passe entre ces mêmes limites du positif au négatif, la différence $n-n'=\mathrm{E}$ sera ce que M. Cauchy a appelé l'indice intégral de la fraction $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ pris entre les limites réelles x_0, X, et ce que nous appellerons plus simplement l'*excès* E, à l'exemple de MM. Sturm et Liouville. Il peut arriver qu'en devenant infinie la fraction $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ passe toujours du négatif au positif, ou du positif au négatif; dans ce cas, l'un des deux nombres n, n' sera nul, et l'on aura $\mathrm{E}=n$ ou $\mathrm{E}=-n'$.

La considération de l'excès E ou de la différence $n-n'$ a déjà été féconde en résultats importants, et nous verrons bientôt qu'elle conduit à des démonstrations élégantes et faciles des plus beaux théorèmes relatifs à la résolution des équations. Mais avant d'arriver à ces applications, il faut nécessairement mettre en évidence les propriétés fondamentales de cet excès et apprendre à le calculer.

2. L'excès E relatif à une fraction dont le dénominateur ne devient infini pour aucune valeur réelle de la variable x, ou dont le dénominateur divise exactement le numérateur, est évidemment nul, puisque l'existence de l'excès suppose avant tout la possibilité du passage par l'infini.

3. Les excès E, E_1 relatifs à deux fractions égales en valeur absolue, mais de signe contraire $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$, $-\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ sont égaux et de signes contraires.

En effet, aussi souvent que l'une de ces fractions en devenant infinie passe du négatif au positif, l'autre passe du positif au négatif, de sorte que si l'un des excès est (n° 1) $n-n'$, l'autre sera $n'-n=-(n-n')$.

4. Il existe une liaison remarquable entre les excès E, E′ relatifs aux deux fractions inverses $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$, $\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}$. En effet, ces deux fractions sont toujours de même signe, et passent par conséquent à la fois du négatif au positif, ou du positif au négatif. De plus, quand la seconde est infinie, la première est nulle, de sorte que l'excès E′ exprime aussi la différence entre les deux nombres qui indiquent combien de fois la première fraction en s'évanouissant passe du négatif au positif, et du positif au négatif; et puisque cette première fraction ne peut changer de signe qu'en devenant nulle ou infinie, la somme E + E′ exprimera évidemment la différence entre les deux nombres qui indiquent combien de fois, en changeant de signe, la fraction $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ passera du négatif au positif, et du positif au négatif. Or : 1° si les valeurs extrêmes de cette fraction $\frac{\varphi_1(x_0)}{\varphi(x_0)}$, $\frac{\varphi_1(X)}{\varphi(X)}$ sont de même signe, elle passera dans l'intervalle de x_0 à X autant de fois du négatif au positif que du positif au négatif, E+E′ sera égal à 0; 2° si la première de ces valeurs extrêmes est négative et la seconde positive, la fraction passera une fois de plus du négatif au positif que du positif au négatif, E + E′ sera égal à 1; 3° enfin si $\frac{\varphi_1(x_0)}{\varphi(x_0)}$ est positif, et $\frac{\varphi_1(X)}{\varphi(X)}$ négatif, la fraction $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ passera du positif au négatif une fois de plus que du négatif au positif, E + E′ sera égal à -1. On aura donc $E+E'=\varepsilon$, ε devant être égal à 0 ou à ± 1.

Nous dirons, en général, que l'ensemble de deux quantités $\varphi(a)$, $\varphi_1(a)$, offre une variation ou une permanence suivant qu'elles sont de signes contraires ou de même signe, suivant que leur rapport est négatif ou positif. Dès lors la quantité ε devra être égale à 0, si les deux termes $\varphi(x_0)$, $\varphi_1(x_0)$ et les deux termes $\varphi(X)$, $\varphi_1(X)$ présentent à la fois une variation ou une permanence; elle sera égale à $+1$ si les deux premiers termes offrent une variation et les seconds une permanence, ou si dans le passage des premiers aux seconds la variation se changeant en permanence, il y a une variation de perdue. Enfin ε sera égal à -1, si les

deux premiers termes offrent une permanence et les seconds une variation; ou si dans le passage des premiers aux seconds la permanence se changeant en variation, il y a une variation de gagnée. A l'aide de ces règles très simples, on calculera facilement l'excès E quand on connaîtra l'excès E′, et réciproquement.

5. Si le degré du dénominateur $\varphi(x)$ est inférieur au degré du numérateur, on pourra effectuer la division, et en appelant Q le quotient et $\chi(x)$ le reste, on aura $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)} = Q + \frac{\chi(x)}{\varphi(x)}$. Cette équation nous montre : 1° que les deux fractions $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$, $\frac{\chi(x)}{\varphi(x)}$, deviennent en même temps infinies; 2° que pour des valeurs de x voisines de celles qui les rendent infinies, ces deux fractions offrant des valeurs très considérables, supérieures par conséquent à la valeur toujours finie du quotient entier Q, seront des quantités de même signe et passeront à la fois, en devenant infinies, du négatif au positif ou du positif au négatif; leurs excès seront nécessairement égaux, et le calcul de l'excès E se trouve ramené à la recherche de l'excès relatif à une fraction proprement dite.

6. Supposons donc que le degré du numérateur soit inférieur au degré du dénominateur, et que E, E′ soient toujours les excès des fractions inverses $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$, $\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}$, on aura (n° **4**) $E + E' = \varepsilon$, $E = -E' + \varepsilon$. On pourra d'ailleurs effectuer la division de $\varphi(x)$ par $\varphi_1(x)$, et en appelant R le reste, E″, E_1, les deux excès relatifs aux fractions $\frac{R}{\varphi_1(x)}$, $-\frac{R}{\varphi_1(x)}$, on trouvera, n°s **5** et **3**, $E' = E'' = -E_1$, $E = E_1 + \varepsilon$, de sorte que si $\varphi_2(x)$ exprimant non le reste R de la division de $\varphi(x)$ par $\varphi_1(x)$, mais ce reste pris en signe contraire, on appelle E_1 l'excès relatif à la fraction $\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}$, l'excès E de la fraction proposée sera égal à l'excès E_1 relatif à la fraction plus simple $\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}$ augmenté de la quantité ε, ε ayant la valeur que nous lui avons assignée au n° **4**. En d'autres termes, l'équation $\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)} = Q - \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}$, où $\varphi(x)$ et $\varphi_1(x)$ sont des fonctions quelconques, entraîne toujours l'équation $E = E_1 + \varepsilon$, E, E_1 étant les excès relatifs aux deux fractions $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$, $\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}$, et ε ce que nous avons dit.

7. En partant des propriétés qui précèdent, il est facile de calculer l'excès E relatif à une fraction quelconque $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ dans laquelle nous supposerons désormais que le degré du numérateur est inférieur au degré du dénominateur. En effet, effectuons sur la fraction $\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}$ l'opération du plus grand commun diviseur; appelons Q, $Q_1, \ldots Q_m, \ldots Q_{n-1}$ les quotients; $\varphi_2(x), \varphi_3(x), \ldots \varphi_m(x), \ldots \varphi_n(x)$, les restes successifs pris en signe contraire et déterminés par les équations

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)} = Q - \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}, \quad \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = Q_1 - \frac{\varphi_3(x)}{\varphi_2(x)}, \ldots \quad \frac{\varphi_m(x)}{\varphi_{m+1}(x)} = Q_m - \frac{\varphi_{m+2}(x)}{\varphi_{m+1}(x)}$$

$$\ldots\ldots \frac{\varphi_{n-2}(x)}{\varphi_{n-1}(x)} = Q_{n-2} - \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_{n-1}(x)}, \quad \frac{\varphi_{n-1}(x)}{\varphi_n(x)} = Q_{n-1},$$

$\varphi_n(x)$ sera une fonction entière de x ou un nombre, suivant que les deux fonctions $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$, admettront ou n'admettront pas de plus grand commun diviseur fonction de x. Désignons encore par E, E_1, $E_2, \ldots E_{n-2}$, E_{n-1}, E_n, les excès respectifs des fractions

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}, \quad \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}, \quad \frac{\varphi_3(x)}{\varphi_2(x)} \cdots \frac{\varphi_{n-1}(x)}{\varphi_{n-2}(x)}, \quad \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_{n-1}(x)}, \quad \frac{\varphi_{n-1}(x)}{\varphi_n(x)},$$

et par $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{n-1}$ des quantités analogues à ε et dont nous fixerons bientôt la valeur; on aura évidemment, nos **6** et **4**,

$$E = E_1 + \varepsilon, E_1 = E_2 + \varepsilon_1 \ldots E_m = E_{m+1} + \varepsilon_m \ldots E_{n-2} = E_{n-1} + \varepsilon_{n-2}, E_{n-1} = -E_n + \varepsilon_{n-1}.$$

et, n° **2**,

$$E_n = 0,$$

puisque $\varphi_n(x)$ divise exactement $\varphi_{n-1}(x)$. Si l'on ajoute membre à membre toutes ces équations, les excès E_1, $E_2, \ldots$, E_n disparaissent, et l'on trouve

$$E = \varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \ldots + \varepsilon_m \ldots + \varepsilon_{n-2} + \varepsilon_{n-1}.$$

Pour calculer les nombres ε, ε_1, etc... et par suite E, écrivons sur deux lignes les valeurs que prennent les fonctions $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$... quand on y fait tour à tour $x = x_0$, $x = X$, nous aurons les deux suites

1) $\varphi(x_0)$, $\varphi_1(x_0) \ldots \varphi_{m-1}(x_0)$, $\varphi_m(x_0) \ldots \varphi_{n-1}(x_0)$, $\varphi_n(x_0)$,

2) $\varphi(X)$, $\varphi_1(X) \ldots \varphi_{m-1}(X)$, $\varphi_m(X) \ldots \varphi_{n-1}(X)$, $\varphi_n(X)$.

Considérons l'un quelconque des nombres ε, ε_1, ε_2, etc., ε_m par

exemple, il est déterminé par l'équation $E_m = E_{m+1} + \varepsilon_m$ dans laquelle E_m et E_{m+1} sont les excès relatifs aux fractions $\frac{\varphi_{m+1}(x)}{\varphi_m(x)}$, $\frac{\varphi_{m+2}(x)}{\varphi_{m+1}(x)}$ liées entre elles par l'équation $\frac{\varphi_m(x)}{\varphi_{m+1}(x)} = Q_m - \frac{\varphi_{m+2}(x)}{\varphi_{m+1}(x)}$; dès lors, n^{os} **6** et **4**. ε_m sera égal à 0 si les deux termes $\varphi_m(x_0)$, $\varphi_{m+1}(x_0)$ et les deux termes $\varphi_m(X)$, $\varphi_{m+1}(X)$ offrent à la fois une permanence ou une variation, et à $+1$ ou à -1 suivant que les deux premiers termes offriront une variation qui, dans le passage aux seconds, se changera en permanence, ou une permanence qui se changera en variation. Cette conclusion s'étend à tous les nombres ε, ε_1, etc., même au dernier ε_{n-1} donné par l'équation $E_{n-1} = -E_n + \varepsilon_{n-1}$, comme on le prouve facilement : en effet, ε_{n-1} est qu'il faut ajouter à $-E_n$, E_n étant l'excès de la fraction renversée $\frac{\varphi_{n-1}(x)}{\varphi_n(x)}$, pour avoir l'excès E_{n-1} de la fraction $\frac{\varphi_n(x)}{\varphi_{n-1}(x)}$: or, comme on l'a vu, ce qu'il faut ajouter doit être égal à 0, si les deux termes $\varphi_{n-1}(x_0)$, $\varphi_n(x_0)$ et les deux termes $\varphi_{n-1}(X)$, $\varphi_n(X)$ offrent à la fois une permanence ou une variation; à $+1$ ou à -1, suivant que les deux premiers termes offrent une variation qui, dans le passage aux seconds, se change en permanence, ou une permanence qui se change en variation. Dès-lors il est évident qu'en appelant V_p le nombre des variations qui, dans le passage de la première suite à la seconde, se changent en permanences, et P_v le nombre de permanences qui se changent en variations, on aura

$$\varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \ldots + \varepsilon_m + \ldots + \varepsilon_{n-1} = V_p - P_v,$$

et par suite
$$E = V_p - P_v.$$

Telle est donc la valeur générale et très simple de l'excès E. On peut lui donner une autre forme, car si V et V′ sont les nombres de variations que présentent les suites (1) et (2) quand on passe successivement de chaque terme au terme qui le suit; V′ sera égal au nombre V des variations de la première suite, diminué du nombre des variations de cette première suite qui se sont changées en permanences, et augmenté du nombre des permanences qui se sont changées en variations : donc

$$V' = V - V_p + P_v, \quad V_p - P_v = V - V', \quad E = V - V'.$$

On arrive ainsi à cette règle si féconde en applications remarquables :

8. Pour calculer l'excès E ou la différence entre les deux nombres qui indiquent combien de fois la fraction $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$, en devenant infinie entre les limites x_0, X, passe du négatif au positif et du positif au négatif, effectuez sur la fraction renversée $\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}$ l'opération du plus grand commun diviseur, et après avoir désigné par $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)\ldots\varphi_n(x)$ les restes successifs, pris en signes contraires, écrivez les deux suites

$$(1)\qquad \varphi(x_0),\ \varphi_1(x_0),\ \varphi_2(x_0),\ldots\varphi_{n-1}(x_0),\ \varphi_n(x_0),$$

$$(2)\qquad \varphi(\mathrm{X}),\ \varphi_1(\mathrm{X}),\ \varphi_2(\mathrm{X}),\ldots\varphi_{n-1}(\mathrm{X}),\ \varphi_n(\mathrm{X}),$$

et comptez les nombres V et V′ des variations de ces deux suites, la différence V — V′, c'est-à-dire l'excès du nombre des variations de la première suite sur le nombre des variations de la seconde, ou le nombre de variations perdues dans le passage de la première suite à la seconde donnera précisément l'excès E.

Nota 1°. En calculant par l'opération du plus grand commun diviseur les fonctions $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)\ldots\varphi_n(x)$, on pourra toujours éviter les quotients numériques fractionnaires, si l'on a soin de multiplier les dividendes par des nombres convenablement choisis, car cette multiplication n'altérera en rien les signes des différents restes et la série des raisonnements qui nous ont conduit à la règle énoncée.

Nota 2°. On pourra arrêter l'opération du plus grand commun diviseur dès que l'on arrivera à un reste $\varphi_m(x)$ qui ne devienne nul pour aucune valeur réelle de x comprise entre les limites x_0, X. En effet, l'excès E_m relatif à la fraction $\frac{\varphi_{m+1}(x)}{\varphi_m(x)}$, sera dans ce cas évidemment égal à 0, l'on aura

$$\mathrm{E}_m = 0,\quad \mathrm{E} = \varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \ldots + \varepsilon_{m-1},$$

et pour déterminer l'excès E, il suffira évidemment de calculer les nombres de variations des deux suites

$$\varphi(x_0),\ \varphi_1(x_0),\ \varphi_2(x_0)\ldots\varphi_m(x_0),$$
$$\varphi(\mathrm{X}),\ \varphi_1(\mathrm{X}),\ \varphi_2(\mathrm{X})\ldots\varphi_m(\mathrm{X}).$$

Nota 3°. On prouve encore facilement que si quelques-uns des ter-

mes des deux suites (1) et (2) s'évanouissent, on pourra n'y faire aucune attention et compter les variations comme s'ils n'existaient pas.

Si, comme on l'a supposé implicitement dans tout ce qui précède, x_0 et X ne sont pas racines de l'équation $\varphi(x) = 0$, deux termes consécutifs des suites (1) et (2) ne s'évanouiront jamais à la fois, car si deux termes consécutifs $\varphi_m(x_0)$ et $\varphi_{m+1}(x_0)$ par exemple, s'évanouissaient, il en serait de même de tous les autres, en vertu des équations

$$\varphi(x) = Q\varphi_1(x) - \varphi_2(x), \ldots \varphi_{m-1}(x) = Q_{m-1}\varphi_m(x) - \varphi_{m+1}(x),$$
$$\varphi_m(x) = Q_m\varphi_{m+1}(x) - \varphi_{m+2}(x) \ldots \varphi_{n-2}(x) = Q_{n-2}\varphi_{n-1}(x) - \varphi_n(x),$$

et l'on aurait $\varphi(x_0) = 0$ contrairement à l'hypothèse admise.

Quand donc un terme, $\varphi_m(x_0)$ par exemple, s'évanouira, le terme précédent $\varphi_{m-1}(x_0)$ et le terme suivant $\varphi_{m+1}(x_0)$ ne s'évanouiront pas, mais seront de signes contraires, puisque l'équation qui lie entre eux ces deux termes se réduit à $\varphi_{m-1}(x_0) = -\varphi_{m+1}(x_0)$. Dès lors si l'on représente par $x_1 = x_0 + i$ une valeur de x infiniment voisine de x_0 qui, sans faire évanouir le terme $\varphi_m(x)$, jouisse de la propriété de conserver aux fonctions $\varphi(x)$, $\varphi_1(x) \ldots \varphi_n(x)$, quand on la substitue dans ces fonctions, le signe qu'elles avaient pour $x = x_0$, il faudra pour calculer l'excès E pris entre les limites x_1 et X, ou, ce qui revient au même, entre les limites x_0, X, retrancher le nombre V′ des variations de la suite (2), du nombre $V^{(1)}$ des variations de la suite

$$(1\ bis) \quad \varphi(x_1), \quad \varphi_1(x_1), \quad \varphi_2(x_1) \ldots \varphi_{m-1}(x_1), \quad \varphi_m(x_1), \quad \varphi_{m+1}(x_1) \ldots \varphi_n(x_1);$$

mais le nombre $V^{(1)}$ des variations de cette suite est évidemment égal au nombre V des variations de la suite (1) dans laquelle on omet le terme nul $\varphi_m(x_0)$, car, 1° en faisant abstraction du terme $\varphi_m(x_1)$, tous les autres termes de la suite (1 *bis*) ont par hypothèse le signe des termes correspondants de la suite (1); 2° quel que soit le signe de $\varphi_m(x_1)$, l'ensemble des trois termes $\varphi_{m-1}(x_1)$, $\varphi_m(x_1)$, $\varphi_{m+1}(x_1)$ ne présentera qu'une variation comme l'ensemble des deux termes $\varphi_{m-1}(x_0)$, $\varphi_{m+1}(x_0)$, parce que les deux termes $\varphi_{m-1}(x_1)$ et $\varphi_{m+1}(x_1)$ sont de signes contraires, ainsi que $\varphi_{m-1}(x_0)$ et $\varphi_{m+1}(x_0)$; on pourra donc substituer V à $V^{(1)}$, et pour calculer l'excès E pris entre les limites x_0, X, il suffira encore de prendre la différence V − V′ des nombres de variations des

suites (1 et 2). Ce que nous venons de dire du cas où dans une de ces suites un terme s'évanouirait, s'étend évidemment au cas où plusieurs termes de l'une des suites ou de toutes les deux deviendraient nuls à la fois.

9. Appliquons ces principes à la détermination du nombre des racines réelles des équations algébriques.

Lemme fondamental. Soit $F(x) = 0$ une équation du degré n, et $F'(x)$ le polynome dérivé de $F(x)$; si a est une racine de cette équation et h une quantité positive très petite, le rapport $\frac{F'(x)}{F(x)}$ deviendra infini pour $x = a$ et passera en devenant infini du négatif au positif, pendant que x passera de la valeur $a - h$ à la valeur $a + h$.

Démonstration. Supposons pour plus de généralité que a soit m fois racine de l'équation $F(x) = 0$, m se réduira à l'unité quand a sera une racine simple, et désignons par $F'(x)$, $F''(x) \ldots F^{(n)}(x) \ldots$ les dérivées successives de $F(x)$, on aura, comme on sait,

$$F'(a) = 0, \quad F''(a) = 0 \ldots\ldots F^{(m-1)}(a) = 0,$$

$$F(a+i) = \frac{i^m}{1.2.3\ldots m} F^{(m)}(a) + \frac{i^{m+1}}{1.2.3\ldots(m+1)} F^{(m+1)}(a) + \text{etc.},$$

$$F'(a+i) = \frac{i^{m-1}}{1.2.3\ldots(m-1)} F^{(m)}(a) + \frac{i^m}{1.2.3\ldots(m+1)} F^{(m+1)}(a) + \text{etc.}\,[*]$$

---

[*] Afin de ne rien supposer qu'on ne trouve dans tous les Traités élémentaires d'algèbre, j'ajouterai ici la démonstration la plus simple des équations qui précèdent. Si l'on pose d'abord $x = a$, puis $h = x - a$ dans l'équation

$$F(x+h) = F(x) + \frac{h}{1} F'(x) + \frac{h^2}{1.2} F''(x) + \ldots + \frac{h^m}{1.2.3\ldots m} F^{(m)}(x) + \text{etc.},$$

à l'aide de laquelle on définit les polynomes dérivés successifs, il viendra

$$F(x) = F(a) + \frac{x-a}{1} F'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2} F''(a) + \frac{(x-a)^m}{1.2.3\ldots m} F^{(m)}(a) + \text{etc.}$$

Si la fonction $F(x)$ s'évanouit avec toutes ses dérivées jusqu'à celles de l'ordre $(m-1)$ inclusivement pour $x = a$, c'est-à-dire si l'on a

$$F(a) = 0, \quad F'(a) = 0, \quad F''(a) = 0 \ldots F^{(m-1)}(a) = 0,$$

$F(x)$ deviendra divisible par $(x-a)^m$ et l'équation $F(x) = 0$ aura m racines égales à a. Réciproquement si l'équation $F(x) = 0$ a m racines égales à a, $F(x)$ devra être divisible

Pour des valeurs très petites de i les deux quantités $F(a+i)$, $F'(a+i)$ prendront le signe de leur premier terme, et par suite, le rapport

---

par $(x-a)^m$, et l'on aura nécessairement

$$F(a)=0,\quad F'(a)=0,\quad F''(a)=0\ldots F^{(m-1)}(a)=0,$$

$$F(x)=\frac{(x-a)^m}{1.2.3\ldots m}F^{(m)}(a)+\frac{(x-a)^{m+1}}{1.2.3\ldots(m+1)}F^{(m+1)}(a)+\text{etc.},$$

et en posant $x=a+i$,

$$F(a+i)=\frac{i^m}{1.2.3\ldots m}F^m(a)+\frac{i^{m+1}}{1.2.3\ldots m}F^{(m+1)}(a)+\text{etc.}$$

En opérant sur $F'(x)$ comme on l'a fait sur $F(x)$, on trouvera

$$F'(x)=F'(a)+\frac{(x-a)}{1}F''(a)+\frac{(x-a)^2}{1.2}F'''(a)\ldots+\frac{(x-a)^{m-1}}{1.2.3\ldots(m-1)}F^m(a)+\text{etc.}$$

Dans le cas où l'équation $F(x)=0$ a m racines égales à a, on a

$$F'(a)=0,\quad F''(a)=0\ldots F^{(m-1)}(a)=0,$$

et par suite

$$F'(x)=\frac{(x-a)^{m-1}}{1.2.3\ldots(m-1)}F^{(m)}(a)+\frac{(x-a)^m}{1.2\ldots m}F^{(m+1)}(a)+\ldots,$$

ou en faisant $x=a+i$

$$F'(a+i)=\frac{i^{m-1}}{1.2.3\ldots(m-1)}F^{(m)}(a)+\frac{i^m}{1.2.3\ldots m}F^{(m+1)}(a)+\text{etc.}$$

Dans cette même hypothèse la dérivée $F'(x)$ sera divisible par $(x-a)^{m-1}$, et l'équation $F'(x)=0$ aura $m-1$ racines égales à a.

Reciproquement, si l'équation $F'(x)=0$ a $m-1$ racines égales à a, $F'(x)$ devra être divisible par $(x-a)^{m-1}$, on aura

$$F'(a)=0,\quad F''(a)=0,\ldots F^{m-1}(a)=0,$$

et aussi

$$F(x)-F(a)=\frac{(x-a)^m}{1.2\ldots m}F^{(m)}(a)+\text{etc.};$$

et si de plus $F(a)=0$, l'équation $F(x)=0$ aura m racines égales à a.

Ainsi, pour qu'une équation $F(x)=0$ ait m racines égales à a, il faut et il suffit que a étant racine de cette équation, la dérivée $F'(x)$ ait $m-1$ racines égales à a, ou soit divisible par $(x-a)^{m-1}$: et réciproquement.

On en conclut immédiatement que pour qu'une équation $F(x)=0$ ait des racines égales, il faut et il suffit que le premier membre et son polynome dérivé aient un diviseur commun qui sera le produit des facteurs égaux de $F(x)$ élevés chacun à une puissance moindre d'une unité ; ce diviseur sera le plus grand diviseur commun des deux polynomes.

$$\frac{F'(a+i)}{F(a+i)} = \frac{F'(x)}{F(x)},$$

aura le signe de la fraction

$$\frac{i^{m-1}F^{(m)}(a)}{1.2.3\ldots(m-1)} \times \frac{1.2.3\ldots m}{i^m F^{(m)}(a)} = \frac{m}{i}$$

ou le signe de i, et deviendra infini pour $i = 0$, ou pour $x = a$: le rapport $\frac{F'(x)}{F(x)}$ changera donc de signe avec i, et passera en devenant infini du négatif au positif, quand i passera de la valeur $-h$ à la valeur $+h$ ou x de la valeur $a-h$ à la valeur $a+h$; ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire. Cette démonstration s'étendant à toutes les racines de l'équation $F(x) = 0$, il en résultera que si cette équation a m racines réelles distinctes $a_1, a_2, \ldots a_m$ comprises entre deux limites réelles x_0, X, le rapport $\frac{F'(x)}{F(x)}$, en devenant infini pour chacune de ces valeurs, passera m fois par l'infini du négatif au positif, pendant que x passera de la valeur x_0 à la valeur X. D'ailleurs, puisque ce même rapport ne devient infini entre les limites x_0, X, pour aucune valeur réelle différente de a_1, $a_2, \ldots a_m$, et passe par conséquent toujours, en devenant infini entre ces limites, du négatif au positif, l'excès E ou la différence entre les deux nombres qui indiquent combien de fois en devenant infini, il passe du négatif au positif et du positif au négatif, sera dans ce cas particulier égal à m; on aura donc $m = E$, et l'on arrive au théorème suivant.

10. 1er *Théorème*. Le nombre des racines réelles distinctes d'une équation algébrique quelconque $F(x) = 0$ comprises entre deux limites réelles x_0, X, est toujours égal à l'excès E ou à la différence entre les deux nombres qui indiquent combien de fois le rapport $\frac{F'(x)}{F(x)}$ en devenant infini entre ces limites, passe du négatif au positif et du positif au négatif.

On déduit facilement de cette proposition unique tous les théorèmes connus sur la détermination du nombre des racines réelles des équations algébriques : et d'abord jointe à la règle à l'aide de laquelle on calcule l'excès E, elle donne immédiatement naissance au beau théorème de M. Sturm.

11. 2me *Théorème*. Pour trouver le nombre des racines réelles de

l'équation $F(x) = 0$ comprises entre deux limites données x_0, X, après avoir calculé les restes successifs $-F_2(x)$, $-F_3(x) \ldots -F_r(x)$ que l'on obtient en cherchant le plus grand commun diviseur de la fonction $F(x)$ et de sa dérivée $F'(x)$, on écrira sur deux lignes les suites

$$F(x_0),\ F'(x_0),\ F_2(x_0),\ F_3(x_0) \ldots F_r(x_0),$$
$$F(X),\ F'(X),\ F_2(X),\ F_3(X) \ldots F_r(X),$$

ou seulement les signes de ces diverses quantités, et l'on comptera le nombre des variations de ces deux suites; autant la seconde suite aura de variations de moins que la première, autant il y aura de racines réelles comprises entre x_0, X.

Nota. En effectuant l'opération du plus grand commun diviseur, on pourra éviter les quotients fractionnaires, et s'arrêter dès que l'on arrivera à un reste $-F_p(x)$ qui ne devienne nul pour aucune valeur réelle de x comprise entre les limites x_0, X. Si quelqu'un des restes s'évanouissait pour $x = x_0$ ou $x = X$, on pourra n'y faire aucune attention et compter les variations comme s'ils n'existaient pas.

12. 3me *Théorème (théorème de Rolle).* Le nombre des racines réelles de l'équation $F(x) = 0$ comprises entre deux limites données x_0, X, ne peut jamais surpasser de plus d'une unité le nombre des racines réelles de l'équation dérivée $F'(x) = 0$ comprises entre les mêmes limites.

Démonstration. Représentons par E, E' les excès relatifs aux deux fractions inverses $\frac{F'(x)}{F(x)}$, $\frac{F(x)}{F'(x)}$, et soit toujours m le nombre des racines réelles de l'équation $F(x) = 0$ comprises entre les limites x_0, X; on aura, comme nous l'avons vu nos **10** et **4**, $m = E$, $E = -E' + \varepsilon$, et par suite $m = -E' + \varepsilon$, ε pouvant être égal à 0 ou à ± 1. Cela posé, $-E'$ ne pourra jamais surpasser le nombre m' qui indiquera combien de fois la fraction $\frac{F(x)}{F'(x)}$ devient infinie entre ces mêmes limites x_0, X; $-E'$ ne pourra même (no **1**) être égal à m' qu'autant que la fraction $\frac{F(x)}{F'(x)}$, en devenant m' fois infinie, passera toujours du positif au négatif; ε d'ailleurs est tout au plus égal à $+1$; donc $m = -E' + \varepsilon$ ne pourra jamais surpasser $m' + 1$. Mais le nombre m' qui indique combien de fois la fraction $\frac{F(x)}{F'(x)}$ devient infinie entre les limites x_0, X, est précisément le

nombre des racines réelles de l'équation $F'(x) = 0$ qui ne lui sont pas communes avec l'équation $F(x) = 0$; donc, etc.

On conclut immédiatement de ce théorème que si les racines a', a'', a'''... $a^{(m')}$ de l'équation dérivée $F'(x) = 0$ sont rangées par ordre de grandeur en commençant par la plus petite, l'équation $F(x) = 0$ ne peut avoir qu'une seule racine au-dessous de a', qu'une seule entre a', a'', qu'une seule entre a'', a''', etc., qu'une seule enfin au-dessus de $a^{(m')}$.

13. 4me *Théorème* (*Théorème de Budan et de Fourier*). Le nombre des racines réelles de l'équation $F(x) = 0$, comprises entre les limites x_0, X, est tout au plus égal à la différence $V_4 - V_4'$ entre les nombres de variations des deux suites

$$(3) \qquad F(x_0), \quad F'(x_0), \quad F''(x_0), \ldots F^{(n)}(x_0),$$
$$(4) \qquad F(X), \quad F'(X), \quad F''(X), \ldots F^{(n)}(X),$$

dans lesquelles les fonctions $F'(x)$, $F''(x)$ ... $F^{(n)}(x)$ représentent les dérivées successives de $F(x)$, et n le degré de l'équation $F(x) = 0$.

Démonstration. Appelons m, m', m''... $m^{(n)}$ les nombres des racines des équations $F(x) = 0$, $F'(x) = 0$... $F^{(n)}(x) = 0$, comprises entre les limites x_0, X; $m^{(n)}$ sera nécessairement égal à 0, puisque, comme nous l'avons supposé, n étant le degré de $F(x)$, $F^{(n)}(x)$ est un nombre. Cela posé, on aura, comme on l'a vu, $m < m' + \varepsilon$, ε étant égal à 0, si les deux termes $F(x_0)$, $F'x_0$ et les deux termes $F(X)$ et $F'(X)$ présentent à la fois une variation ou une permanence; à $+1$, si les deux premiers termes offrent une variation et les seconds une permanence; à -1, si les deux premiers termes offrent une permanence, et les seconds une variation. Et puisque ce que nous avons dit n° **12** s'applique à une équation algébrique quelconque $F(x) = 0$, dont $F'(x) = 0$ est l'équation dérivée, on aura de même

$$m' < m'' + \varepsilon', \quad m'' < m''' + \varepsilon \ldots m^{(n-1)} < m^{(n)} + \varepsilon^{(n-1)} = \varepsilon^{(n-1)},$$

et par conséquent, $\qquad m < \varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon'' \ldots + \varepsilon^{(n-1)}$,

$\varepsilon' \ldots \varepsilon^{(n-1)}$ étant des quantités analogues à ε. La somme $\varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon'' \ldots + \varepsilon^{(n-1)}$ sera d'ailleurs évidemment égale au nombre des variations qui dans le passage de la suite (3) à la suite (4), se changent en permanences diminué du nombre des permanences qui se changent en variations; ou plus sim-

plement à la différence $V_1 - V_1'$ des nombres de variations de ces deux suites; on aura donc $m < V_1 - V_1'$; ce qu'il fallait démontrer.

14. 5me *Théorème* (*Théorème de Descartes*). Le nombre des racines positives de l'équation

$$F(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} \ldots\ldots + A_{n-1} x + A_n$$

ne peut pas surpasser le nombre V des variations de signe que présente la suite des coefficients

$$1, \quad A_1, \quad A_2 \ldots\ldots A_{n-1}, \quad A_n.$$

Démonstration. Faisons dans le 4me théorème $x_0 = 0$, $X = \infty$, les quantités $F(x)$, $F'(x)$, $F''(x) \ldots F^{(n)}(x)$, auront toutes pour $x = \infty$ le signe de leurs premiers termes

$$x^n, \quad nx^{n-1}, \quad n(n-1)x^{n-2} \ldots n(n-1)(n-2)\ldots 1,$$

et seront, par conséquent, toutes positives, de sorte que la suite (4) ne présentant aucune variation, V_1' sera nécessairement nul. De plus, ces mêmes quantités pour $x = 0$ se réduiront à leurs derniers termes

$$A_n, \quad A_{n-1}, \quad 1.2.A_{n-2}, \quad 1.2.3.A_{n-3} \ldots 1.2.3.(n-2)(n-1)A_1, \quad 1.2.3\ldots n.$$

et prendront le signe des coefficients

$$A_n, \quad A_{n-1}, \quad A_{n-2} \ldots\ldots A_1, \quad 1:$$

dès lors le nombre V_1 des variations de la suite (3) sera égal à V, et l'inégalité $m < V_1 - V_1'$, réduite à $m < V$, deviendra précisément l'expression analytique du théorème de Descartes.

15. On pourrait démontrer de la même manière un grand nombre de théorèmes plus ou moins remarquables; j'en citerai un seul exemple

5me *Théorème*. Si l'on désigne par e l'excès relatif à la fraction $x \frac{F'(x)}{F(x)}$ et pris entre les deux limites $x = x_0$, $x = X$, dont la première est positive et la seconde négative, si de plus on représente par ϖ le nombre des racines positives et par ν le nombre des racines négatives de l'équation $F(x) = 0$, comprises entre les mêmes limites, on aura toujours $\varpi - \nu = e$, pourvu cependant que le polynome $F(x)$ ne soit pas

divisible par x, ou que l'équation $F(x) = 0$ n'ait pas 0 pour racine.

Démonstration. Appelons e', e'' les excès relatifs à cette même fraction $x\frac{F'(x)}{F(x)}$, mais pris, le premier entre les limites $x = x_0$, $x = 0$, le second entre les limites $x = 0$, $x = X$; et soient E', E'' les excès correspondants de la fraction $\frac{F'(x)}{F(x)}$, on aura évidemment $e' + e'' = e$ et (n° **10**) $E' = \nu$, $E'' = \mu$. D'ailleurs les deux fractions $x\frac{F'(x)}{F(x)}$, $\frac{F'(x)}{F(x)}$ qui, dans l'hypothèse admise, deviennent en même temps infinies, sont constamment de même signe entre les limites $x = 0$, $x = X$, et constamment de signe contraire entre les limites $x = x_0$, $x = 0$; on aura dès-lors (n° **3**) $e' = -E'$, $e'' = E''$, et l'on en conclura $e = e' + e'' = E'' - E'$ ou $\varpi - \nu = e$, ce qu'il fallait démontrer.

En partant de cette proposition, M. Cauchy démontra le premier que pour une équation de degré quelconque, on peut trouver des fonctions rationnelles des coefficients dont les signes fassent connaître le nombre des racines réelles positives et le nombre des racines réelles négatives; c'était un premier essai presque oublié quand M. Sturm découvrit son théorème.

16. Avant de passer à la détermination du nombre des racines imaginaires des équations et au théorème de M. Cauchy, il est nécessaire d'établir les lemmes suivants :

Lemme 1er [*]. Considérons deux fonctions u et v de la variable s, continues entre les limites $s = s_0$ et $s = s_1$, et qui reprennent les mêmes valeurs aux deux limites, puis posons $u + v\sqrt{-1} = r(\cos p + \sqrt{-1}\sin p)$. Si l'on assujétit l'angle ou l'argument p à être lui-même une fonction continue de s, et si l'on désigne par p_0 et p_1 les valeurs de p correspondantes à $s = s_0$ et $s = s_1$, l'excès e de la fraction $\frac{u}{v}$ ou la différence entre les deux nombres qui expriment combien de fois cette fraction en

[*] MM. Sturm et Liouville ont publié les premiers des démonstrations élémentaires du théorème qui donne le nombre des racines imaginaires; l'idée de celle que je reproduis ici est due à M. Cauchy; elle rappelle la seconde des démonstrations de M. Sturm, mais je la crois plus simple, parce que toute la difficulté se réduit à ce lemme 1er, et cette difficulté n'est pas grande, car ce lemme est presque évident.

devenant infinie entre les limites s_0, s_1, passe du négatif au positif et du positif au négatif, sera précisément égal à $\frac{p_1 - p_0}{\pi}$.

Démonstration. L'équation $u + v\sqrt{-1} = r(\cos p + \sqrt{-1}\sin p)$ donne $u = r\cos p$, $v = r\sin p$; et si l'on désigne, avec M. Cauchy, par la notation arc tang $\frac{v}{x}$ le plus petit des arcs, abstraction faite du signe, qui ait $\frac{v}{u}$ pour tangente, on aura $p = \text{arc tang}\frac{v}{u} \pm n\pi$, n désignant un nombre entier qui devra être pair ou impair, suivant que la partie réelle u de l'expression imaginaire sera positive ou négative. Cela posé, désignons par u_0, v_0, u_1, v_1, p_0, p_1 les valeurs de u, v, p correspondantes à $s = s_0$ et $s = s_1$. En vertu de l'équation $p = \text{arc tang}\frac{v}{u} \pm n\pi$, les quantités p et arc tang $\frac{v}{u}$, ou p_0 et arc tang $\frac{v_0}{u_0}$, et par suite les deux quantités $p - p_0$, arc tang $\frac{v}{u}$ — arc tang $\frac{v_0}{u_0}$ ne pourraient différer entre elles que d'un multiple de la demi-circonférence; et comme, par hypothèse, chacune de ces deux quantités continues doit devenir infiniment petite en même temps que la différence $s - s_0$, il est clair que pour des valeurs de $s - s_0$ très peu différentes de o, on aura $p - p_0 = \text{arc tang}\frac{v}{u} - \text{arc tang}\frac{v_0}{u_0}$.

De plus, comme dans le second membre de cette équation, le terme arc tang $\frac{v}{u}$ augmente ou diminue brusquement de la demi-circonférence π, en passant brusquement de la valeur $-\frac{\pi}{2}$ à la valeur $+\frac{\pi}{2}$ ou de la valeur $+\frac{\pi}{2}$ à la valeur $-\frac{\pi}{2}$ toutes les fois que la fonction $\frac{v}{u}$ change de signe en passant par l'infini du négatif au positif ou du positif au négatif, p ne pourra être une fonction continue de s, qu'autant que pour prévenir ces changements brusques, on diminuera ou l'on augmentera le second membre de la quantité π, suivant que le passage aura lieu du négatif au positif ou du positif au négatif. Pendant que s passera de la valeur s_0 à la valeur s_1, la somme algébrique totale de ces diminutions ou de ces augmentations devra être

évidemment égale à $-e'\pi$, e' étant l'excès de la fraction $\frac{v}{u}$, ou la différence entre les deux nombres qui expriment combien de fois cette fraction, en devenant infinie entre les limites s_0, s_1, passe du négatif au positif et du positif au négatif. Dès-lors, dans l'hypothèse où p est une fonction continue, l'équation

$$p - p_0 = \text{arc tang}\,\frac{v}{u} - \text{arc tang}\,\frac{v_0}{u_0}$$

entraînera la suivante

$$p_1 - p_0 = \text{arc tang}\,\frac{v_1}{u_1} - \text{arc tang}\,\frac{v_0}{u_0} - e'\pi.$$

Si d'ailleurs comme on l'a supposé, les fonctions continues de s désignées par u et v reprennent précisément les mêmes valeurs pour $s = s_0$ et $s = s_1$, on aura non-seulement arc tang $\frac{v_1}{u_1}$ = arc tang $\frac{v_0}{u_0}$, mais aussi (n° 4) $e' = -e$, e étant l'excès relatif à la fraction renversée $\frac{u}{v}$, et par suite

$$p_1 - p_0 = e\pi, \quad e = \frac{p_1 - p_0}{\pi}, \quad \text{ce qu'il fallait démontrer.}$$

17. *Lemme* 2e. Considérons plusieurs expressions imaginaires

$$u + v\sqrt{-1} = r(\cos p + \sqrt{-1}\sin p),\ u' + v'\sqrt{-1} = r'(\cos p' + \sqrt{-1}\sin p')\ldots$$

dans lesquelles u, v, p, u', v', p', etc., soient des fonctions continues de s qui vérifient toutes les conditions du lemme 1er, et soit $U + V\sqrt{-1} = R(\cos P + \sqrt{-1}\sin P)$, le produit de ces expressions imaginaires; l'excès E, relatif à la fraction $\frac{U}{V}$, sera nécessairement égal à la somme $e + e' +$ etc., des excès relatifs aux fractions $\frac{u}{v}, \frac{u'}{v'}$, etc.

Démonstration. L'équation

$$U + V\sqrt{-1} = R(\cos P + \sqrt{-1}\sin P) = (u + v\sqrt{-1})(u' + v'\sqrt{-1})\ldots$$
$$= r(\cos p + \sqrt{-1}\sin p)\, r'(\cos p' + \sqrt{-1}\sin p')\ldots$$

donne

$$P = p + p' + p' + \text{etc.}$$

De plus les fonctions u, v, p, u', v', p', etc., vérifiant par hypothèse les conditions du lemme 1er, il en sera de même de U, V, P, et l'on aura par conséquent, en vertu de ce lemme, $E = \frac{P_1 - P_0}{\pi}$, P_1 et P_0 étant les valeurs de P correspondantes à $s = s_0$, $s = s_1$; mais de l'équation

$$P = p + p' + p'' + \text{etc.},$$

on tire $$P_1 - P_0 = p_1 - p_0 + p'_1 - p'_0 + \text{etc.}$$

et par suite $$P_1 - P_0 = e\pi + e'\pi + \text{etc.};$$

donc

$$E = e + e' + e'' + \text{etc.},$$ ce qu'il fallait démontrer.

18. 6me *Théorème* (*Théorème* de *M. Cauchy*). Supposons que $F(z)$ soit une fonction entière du degré n qui, quand on change z en $x + y\sqrt{-1}$, devient $U + V\sqrt{-1}$, et traçons dans le plan des x, y une courbe fermée dont le périmètre soit c et dont les coordonnées x, y puissent être considérées comme des fonctions continues de l'arc s. Le nombre m des points dont les coordonnées $x = \alpha$, $y = \beta$ vérifieront l'équation $F(z) = F(x + y\sqrt{-1}) = U + V\sqrt{-1} = 0$, et qui de plus seront contenus dans l'intérieur de la courbe fermée, sera donnée par l'équation $m = \frac{E}{2}$, E étant l'excès relatif à la fraction $\frac{U}{V}$ ou la différence entre les deux nombres qui indiquent combien de fois cette fraction, en devenant infinie entre les limites $s = 0$, $s = c$, passe du négatif au positif et du positif au négatif.

Démonstration. Dans le lemme qui précède, posons

$$u + v\sqrt{-1} = x - \alpha + (y - \beta)\sqrt{-1} = r(\cos p + \sqrt{-1}\sin p).$$
$$u' + v'\sqrt{-1} = x - \alpha' + (y - \beta')\sqrt{-1} = r'(\cos p' + \sqrt{-1}\sin p') \text{ etc.},$$

$\alpha + \beta\sqrt{-1}$, $\alpha' + \beta'\sqrt{-1}$, etc., étant les racines de l'équation $F(z) = 0$; β, β', etc., se réduiront à 0 pour les racines réelles; on aura

$$F(z) = F(x + y\sqrt{-1}) = U + V\sqrt{-1} = [(x - \alpha) + (y - \beta)\sqrt{-1}][(x - \alpha') + (y - \beta')\sqrt{-1}]\ldots$$
$$= (u + v\sqrt{-1})(u' + v'\sqrt{-1})\ldots;$$

de plus on pourra regarder x, y comme les coordonnées d'un point mobile M qui se promènera sur la courbe fermée, et $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$, etc.;

comme les coordonnées d'un certain nombre de points fixes A, A′, etc. $x-\alpha$, $y-\beta$, $x-\alpha'$, $y-\beta'$, etc., seront alors les coordonnées rectangulaires, et r, p, r', p', etc., les coordonnées polaires du point mobile M, prises par rapport aux points fixes A, A′, etc. Cela posé, concevons que le point M, parti d'un certain point M_0 sur la courbe fermée, y revienne, l'arc s variera entre les limites 0 et c, et l'angle polaire p deviendra $p_1 = p_0 + 2\pi$, si le point A est placé dans l'intérieur de la courbe fermée; cet angle, au contraire, reprendra sa valeur initiale p_0, si le point A est situé à l'extérieur de la courbe; on aura, dans le premier cas, $e = \frac{p_1 - p_0}{\pi} = 2$; dans le second, $e = \frac{p_0 - p_0}{\pi} = 0$. Donc, en supposant qu'il n'y ait sur la courbe fermée aucun point dont les coordonnées vérifient l'équation $F(x + y\sqrt{-1}) = 0$, la somme $e + e' + e''$ etc., sera égale à autant de fois 2 qu'il y aura dans l'intérieur de la courbe de points dont les coordonnées α, β satisferont à l'équation $F(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = 0$, et par conséquent, en appelant m le nombre de ces points, on aura $e + e' + \text{etc.} = 2m$; mais, en vertu de l'équation

$$U + V\sqrt{-1} = (u + v\sqrt{-1})(u' + v'\sqrt{-1})\ldots.$$

on a, en appelant E l'excès relatif à la fraction $\frac{U}{V}$,

$$E = e + e' + \text{etc.};$$

on aura donc aussi $m = \frac{E}{2}$.

19. Si l'on voulait obtenir le nombre des racines imaginaires de l'équation $F(z) = F(x + y\sqrt{-1}) = 0$, dont la partie réelle est comprise entre les limites x_0, X, et le coefficient de $\sqrt{-1}$ entre les limites y_0, Y, on prendrait pour contour fermé le rectangle que déterminent les quatre lignes $x = x_0$, $x = X$, $y = y_0$, $y = Y$. L'excès E relatif à la fraction $\frac{U}{V} = f(s) = \frac{\varphi(x, y)}{\chi(x, y)} = \psi(x, y)$, et pris entre les limites 0 et c, ou pour toute l'étendue du contour, sera évidemment égal à la somme des excès de cette même fonction pris successivement par rapport aux diverses portions de ce contour, ou, dans le cas que nous considérons, par rapport aux quatre côtés du rectangle. Les valeurs de x et de y en s, et

les limites entre lesquelles on doit calculer l'excès sont d'ailleurs :

pour le premier de ces côtés, $x = s,\ y = y_0;\ x_0, \mathrm{X}$.
pour le second ..... $y = s,\ x = \mathrm{X};\ y_0, \mathrm{Y}$.
pour le troisième ..... $x = s,\ y = \mathrm{Y};\ \mathrm{X}, x_0$.
pour le quatrième..... $y = s,\ x = x_0;\ \mathrm{Y}, y_0$;

de sorte que si l'on désigne par E_{y_0}, E_{X}, E'_{Y}, E'_{x_0}, les excès relatifs aux quatre fonctions

$$\psi(x, y_0),\quad \psi(\mathrm{X}, y),\quad \psi(x, \mathrm{Y}),\quad \psi(x_0, y)$$

pris respectivement entre les limites

$$x_0, \mathrm{X};\ y_0, \mathrm{Y};\ \mathrm{X}, x_0;\ \mathrm{Y}, y_0.$$

on aura

$$\mathrm{E} = \mathrm{E}_{y_0} + \mathrm{E}_{\mathrm{X}} + \mathrm{E}'_{\mathrm{Y}} + \mathrm{E}'_{x_0}.$$

Observons enfin que l'excès pris entre deux limites a et b est égal en valeur absolue, mais de signe contraire à l'excès pris entre les limites b et a, parce que si une fonction d'une seule variable change de signe dans un certain sens, pendant que la variable passe de la valeur a à la valeur b, elle changera de signe en sens opposé, tandis que cette variable passera, au contraire, de la valeur b à la valeur a. Dès-lors, en appelant E_{Y}, E_{x_0} les excès relatifs aux fonctions $\psi(x, \mathrm{Y})$, $\psi(x_0, y)$, pris entre les limites x_0, X; y_0, Y, on aura définitivement

$$\mathrm{E} = 2m = \mathrm{E}_{\mathrm{X}} - \mathrm{E}_{x_0} - (\mathrm{E}_{\mathrm{Y}} - \mathrm{E}_{y_0}).$$

Dans chaque cas particulier on calculera les quatre excès du second membre en suivant la méthode que nous avons indiquée.

Ce théorème, l'une des plus étonnantes conquêtes de l'analyse, que le génie de M. Cauchy a su étendre à des équations transcendantes réelles ou imaginaires, et sous certaines conditions, à la détermination des racines communes à deux équations simultanées, renferme comme cas particulier, toutes les propositions sur le nombre des racines réelles des équations algébriques. Je pourrai, dans une autre circonstance, entrer à ce sujet dans quelques détails.

SUR LES INCLINAISONS RESPECTIVES

DES

ORBITES DE JUPITER, SATURNE ET URANUS,

ET SUR LES MOUVEMENTS DES INTERSECTIONS DE CES ORBITES.

PAR M. LE VERRIER.

1. Les planètes principales circulent autour du Soleil dans des orbites actuellement peu inclinées, les unes par rapport aux autres, et fort peu excentriques. En sera-t-il toujours ainsi dans les siècles à venir? Les travaux des plus illustres géomètres ont résolu cette question affirmativement. *Les grands axes sont invariables; les excentricités et les inclinaisons ne peuvent qu'osciller entre d'étroites limites.* Les deux parties de cette proposition ne sont pas toutefois démontrées avec la même généralité

L'invariabilité des grands axes suppose seulement que les masses de Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter, Saturne et Uranus, sont très petites par rapport à celle du Soleil, et que leurs moyennes distances ne sont pas entre elles dans des rapports simples: de sorte que sous ce point de vue, la stabilité est démontrée géométriquement pour tous les systèmes dans lesquels les masses des planètes seraient très petites, quels que soient d'ailleurs les rapports de ces masses.

L'éternelle petitesse des excentricités et des inclinaisons serait prouvée avec la même généralité, si toutes les masses étaient sensiblement égales entre elles. Mais comme tel n'est point le cas de notre système planétaire, on est forcé, pour s'assurer que les excentricités et les inclinaisons ne peuvent pas grandir considérablement pour les planètes dont

les masses sont les plus petites, d'avoir recours à un calcul numérique dans lequel entrent les rapports des masses; et ainsi la stabilité, à l'égard des excentricités et des inclinaisons, n'est prouvée que pour ces rapports, tels que nous les admettons. Il ne paraît point facile de traiter plus directement cette partie de la question dans toute son étendue. Mais on peut la résoudre dans un cas particulier pour les inclinaisons : c'est ce que nous allons développer.

2. Considérons le système composé des planètes Jupiter, Saturne et Uranus. Désignons par m, m', m'' leurs masses respectives; par φ, φ', φ'' leurs inclinaisons sur l'écliptique à une même époque; et par θ, θ', θ'' les longitudes correspondantes de leurs nœuds ascendants. Posons d'ailleurs

$$p = \operatorname{tang}\varphi \sin\theta, \quad p' = \operatorname{tang}\varphi' \sin\theta', \quad p'' = \operatorname{tang}\varphi'' \sin\theta'',$$
$$q = \operatorname{tang}\varphi \cos\theta, \quad q' = \operatorname{tang}\varphi' \cos\theta', \quad q'' = \operatorname{tang}\varphi'' \cos\theta''.$$

Lorsqu'on connaîtra p, q,....., on calculera φ, θ,..... par les formules

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{p}{q}, \quad \operatorname{tang}\varphi = \sqrt{p^2 + q^2}.$$

Les valeurs de p, q, p', q', p'', q'' seront données à une époque quelconque par les formules suivantes (*Mécanique céleste*, livre II, § 59) :

$$\left.\begin{aligned}
p &= N \sin(gt+\epsilon) + N_1 \sin(g_1 t+\epsilon_1) + N_2 \sin\epsilon_2,\\
q &= N \cos(gt+\epsilon) + N_1 \cos(g_1 t+\epsilon_1) + N_2 \cos\epsilon_2,\\
p' &= N' \sin(gt+\epsilon) + N_1' \sin(g_1 t+\epsilon_1) + N_2 \sin\epsilon_2,\\
q' &= N' \cos(gt+\epsilon) + N_1' \cos(g_1 t+\epsilon_1) + N_2 \cos\epsilon_2.\\
p'' &= N'' \sin(gt+\epsilon) + N_1'' \sin(g_1 t+\epsilon_1) + N_2 \sin\epsilon_2,\\
q'' &= N'' \cos(gt+\epsilon) + N_1'' \cos(g_1 t+\epsilon_1) + N_2 \cos\epsilon_2.
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

t sera le temps compté en années juliennes. Les coefficients qui entrent dans ces équations sont fournis par les relations

$$\left.\begin{aligned}
[g + (0,1) + (0,2)]\, N - (0,1)\, N' - (0,2)\, N'' &= 0,\\
[g + (1,0) + (1,2)]\, N' - (1,0)\, N - (1,2)\, N'' &= 0,\\
[g + (2,0) + (2,1)]\, N'' - (2,0)\, N - (2,1)\, N' &= 0,
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned}
p_0 &= \mathrm{N}\sin\mathcal{E} + \mathrm{N}_1\sin\mathcal{E}_1 + \mathrm{N}_2\sin\mathcal{E}_2\\
q_0 &= \mathrm{N}\cos\mathcal{E} + \mathrm{N}_1\cos\mathcal{E}_1 + \mathrm{N}_2\cos\mathcal{E}_2,\\
p'_0 &= \mathrm{N}'\sin\mathcal{E} + \mathrm{N}'_1\sin\mathcal{E}_1 + \mathrm{N}_2\sin\mathcal{E},\\
q'_0 &= \mathrm{N}'\cos\mathcal{E} + \mathrm{N}'_1\cos\mathcal{E}_1 + \mathrm{N}_2\cos\mathcal{E}_2,\\
p''_0 &= \mathrm{N}''\sin\mathcal{E} + \mathrm{N}''_1\sin\mathcal{E}_1 + \mathrm{N}_2\sin\mathcal{E}_2,\\
q''_0 &= \mathrm{N}''\cos\mathcal{E} + \mathrm{N}''_1\cos\mathcal{E}_1 + \mathrm{N}_2\cos\mathcal{E}_2.
\end{aligned}\right\} \quad 3$$

Les trois premières de ces relations donnent deux valeurs de g, et des rapports $\frac{\mathrm{N}'}{\mathrm{N}}$ et $\frac{\mathrm{N}''}{\mathrm{N}}$. Les six autres, dans lesquelles p_0, p'_0, p''_0, q_0, q'_0, q''_0 sont les valeurs initiales de p, p',..... expriment que les formules satisfont à l'état initial du système.

3. Cela posé, occupons-nous spécialement des inclinaisons de deux des orbites sur la troisième; des inclinaisons des orbites de Saturne et d'Uranus à l'égard de celle de Jupiter, et désignons-les par Φ' et Φ''. Écrivons, pour abréger,

$$\begin{aligned}
p' - p &= \mathrm{P}', \quad p'' - p = \mathrm{P}'',\\
q' - q &= \mathrm{Q}', \quad q'' - q = \mathrm{Q}'',
\end{aligned}$$

et nous aurons, à cause de la petitesse des inclinaisons,

$$\begin{aligned}
\operatorname{tang}\Phi' &= \sqrt{\mathrm{P}'^2 + \mathrm{Q}'^2},\\
\operatorname{tang}\Phi'' &= \sqrt{\mathrm{P}''^2 + \mathrm{Q}''^2}.
\end{aligned}$$

Φ' et Φ'' seront donc connues à une époque quelconque si l'on connaît P' et Q', P'' et Q''. Or pour calculer ces quantités on déduit des équations (1), retranchées membre à membre, deux à deux, les formules

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{P}' &= (\mathrm{N}' - \mathrm{N})\sin(gt + \mathcal{E}) + (\mathrm{N}'_1 - \mathrm{N}_1)\sin(g_1 t + \mathcal{E}_1),\\
\mathrm{Q}' &= (\mathrm{N}' - \mathrm{N})\cos(gt + \mathcal{E}) + (\mathrm{N}'_1 - \mathrm{N}_1)\cos(g_1 t + \mathcal{E}_1),
\end{aligned}\right\} \quad 4$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{P}'' &= (\mathrm{N}'' - \mathrm{N})\sin(gt + \mathcal{E}) + (\mathrm{N}''_1 - \mathrm{N}_1)\sin(g_1 t + \mathcal{E}_1),\\
\mathrm{Q}'' &= (\mathrm{N}'' - \mathrm{N})\cos(gt + \mathcal{E}) + (\mathrm{N}''_1 - \mathrm{N}_1)\cos(g_1 t + \mathcal{E}_1).
\end{aligned}\right\} \quad 5$$

Lorsque les coefficients N, N', etc.,... sont calculés pour les masses admises, on en déduit immédiatement des limites supérieures de Φ' et de Φ''. Φ' ne peut jamais dépasser la somme des valeurs absolues des coef-

ficients des sinus qui entrent dans l'expression de P'; Φ'' ne peut jamais dépasser la somme des valeurs absolues des coefficients des sinus qui entrent dans l'expression de P''. Nous nous proposons ici de chercher une expression algébrique de ces limites, indépendamment de tout calcul numérique.

4. Posons

$$N' - N = x,$$
$$N'' - N = y;$$

puis entre ces deux relations et les relations (4) et (5), éliminons N'', N' et N; nous obtiendrons les deux équations

$$\left.\begin{aligned}&[g + (1,0) + (1,2) + (0,1)]\,x + [(0,2) - (1,2)]\,y = 0,\\ &[g + (2,0) + (2,1) + (0,2)]\,y + [(0,1) - (2,1)]\,x = 0.\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Entre ces deux dernières éliminons g qui, étant une quantité réelle, ne peut influer que sur la durée des périodes; et si nous écrivons

$$(0,1) - (2,1) = K',$$
$$(1,2) - (0,2) = K'',$$
$$(2,0) - (1,0) = K,$$

nous arriverons à la relation

$$K'x^2 + K''y^2 - (-K + K' + K'')\,xy = 0, \quad (7)$$

qui fournira deux valeurs du rapport $\frac{y}{x}$.

Il restera à exprimer que les formules (4) et (5) satisfont à l'état initial du système, ce qui fournira les relations

$$\left.\begin{aligned}P'_0 &= x \sin \theta + x_1 \sin \theta_1,\\ Q'_0 &= x \cos \theta + x_1 \cos \theta_1,\\ P''_0 &= y \sin \theta + y_1 \sin \theta_1,\\ Q''_0 &= y \cos \theta + y_1 \cos \theta_1.\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

On connaît $\frac{y}{x}$, $\frac{y_1}{x_1}$. Ces relations ne renferment donc que les quatre in-

connues x, x_1, θ et θ_1 qu'elles détermineront complétement; mais cette détermination doit être évitée.

5. Nous remarquerons à cet effet que l'élimination des inconnues θ, θ_1, y, y_1 et x_1 entre les équations (8), l'équation (7) et son analogue en x_1 et y_1, conduirait à une équation en x *qui serait du second degré, si elle était débarrassée de tout facteur étranger*. Cette élimination pourrait sans doute s'effectuer; mais nous la simplifierons beaucoup, si nous supposons qu'à l'origine du temps les intersections respectives des trois orbites coïncidaient : hypothèse bien légitime, puisque ce phénomène a eu lieu en l'année 1722, et qu'ainsi les astronomes du commencement du siècle dernier en auraient été les témoins s'ils avaient connu Uranus.

Or, on sait que la coïncidence des trois intersections dont il s'agit entraîne l'égalité des angles θ et θ_1, pourvu qu'on dispose convenablement des signes de x, x_1, y et y_1. Et ainsi les conditions (8) deviennent

$$\left.\begin{aligned} P'_0 &= (x+x_1)\sin\theta, & P''_0 &= (y+y_1)\sin\theta, \\ Q'_0 &= (x+x_1)\cos\theta, & Q''_0 &= (y+y_1)\cos\theta, \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

et l'on en déduit

$$\left.\begin{aligned} x+x_1 &= \pm\sqrt{P'_0+Q'_0} = \pm \operatorname{tang}\Phi'_0, \\ y+y_1 &= \pm\sqrt{P''_0+Q''_0} = \pm \operatorname{tang}\Phi''_0. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Il sera facile de distinguer le signe qu'on devra attribuer au second membre de chacune de ces relations. Si ce sont les nœuds *ascendants* des deux orbites qui coïncident, P'_0 et P''_0 devront être de même signe : il en sera de même de $(x+x_1)$ et $(y+y_1)$, et ainsi il faudra attribuer le même signe à $\operatorname{tang}\Phi'_0$ et à $\operatorname{tang}\Phi''_0$. Il faudra prendre ces deux tangentes avec des signes contraires si c'est le nœud *ascendant* de l'une des orbites qui coïncide avec le nœud *descendant* de l'autre. C'est ce dernier cas qui se présente actuellement pour les nœuds de Saturne et d'Uranus sur l'orbite de Jupiter. Nous allons toutefois, pour la symétrie des calculs, conserver le signe + aux deux tangentes, et nous changerons le signe de l'une d'elles dans les résultats définitifs seulement.

6. Il résulte des relations (10) que les coefficients des seconds termes des équations finales en x et en y nous sont connus, et que ces équations sont de la forme

$$x^2 - x \operatorname{tang} \Phi_0' + V = 0, \qquad (11)$$

$$y^2 - y \operatorname{tang} \Phi_0'' + Z = 0. \qquad (12)$$

Les derniers termes V, Z restent seuls à déterminer de manière que les rapports des racines de la première de ces équations à celles de la seconde satisfassent à l'équation (7); et ils devront être donnés par des relations du premier degré, puisque le problème n'est susceptible que d'une seule solution.

Pour obtenir la première de ces relations, on peut éliminer y entre les équations (12) et (7), par l'un des procédés connus. Mais en faisant cette élimination, chaque fois qu'un terme en x^2 se présentera, ayons le soin de le remplacer par sa valeur $(x \operatorname{tang} \Phi_0' - Z)$ prise dans l'équation (11); nous tomberons ainsi sur une équation du premier degré en x, qui devra être identique. Remarquons toutefois qu'il pourrait s'introduire ainsi des solutions étrangères à la question; et effectivement, tandis que le terme en x ne contiendra qu'un coefficient du premier degré en Z et V, le terme indépendant de x sera du second degré par rapport à ces quantités. Nous nous bornerons à la relation qu'on obtient en égalant à zéro le coefficient de x, relation qui est

$$\left.\begin{aligned} &\{[-K+K'+K'')^2 - 2K'K''] \operatorname{tang} \Phi_0' - (-K+K'+K'')K'' \operatorname{tang} \Phi_0''\}Z \\ &+[-K+K'+K'')K' \operatorname{tang} \Phi_0 - 2K'^2 \operatorname{tang} \Phi_0'] V + K'^2 \operatorname{tang}^3 \Phi_0' \\ &- (-K+K'+K'')K' \operatorname{tang}^2 \Phi_0' \operatorname{tang} \Phi_0'' + K'K'' \operatorname{tang} \Phi_0' \operatorname{tang}^2 \Phi_0'' \end{aligned}\right\} = 0.$$

Pour en avoir une seconde, il suffira d'éliminer x comme nous venons de l'indiquer pour y; mais pour écrire le résultat, il n'est pas besoin d'effectuer les calculs. Il suffira de changer dans la relation précédente K', Φ_0' et V en K'', Φ_0'' et Z, et réciproquement. On obtient ainsi l'équation

$$\left.\begin{aligned} &\{[-K+K'+K'')^2 - 2K'K''] \operatorname{tang} \Phi_0' - (-K+K'+K'')K' \operatorname{tang} \Phi_0'\}V \\ &+[-K+K'+K'')K'' \operatorname{tang} \Phi_0' - 2K''^2 \operatorname{tang} \Phi_0''] Z + K''^2 \operatorname{tang}^3 \Phi_0'' \\ &- (-K+K'+K'')K'' \operatorname{tang}^2 \Phi_0'' \operatorname{tang} \Phi' + K'K'' \operatorname{tang} \Phi_0'' \operatorname{tang}^2 \Phi_0' \end{aligned}\right\} = 0.$$

On déduit Z et V de ces deux équations avec la plus grande simplicité; car si l'on pose

$$Z = K'H,$$

$$V = K''H,$$

on voit immédiatement que les deux relations précédentes s'accordent à donner pour H la même valeur

$$H = -\frac{K'\tang^2\Phi'_0 + K''\tang^2\Phi''_0 - (-K+K'+K'')\tang\Phi''\tang\Phi'}{(-K+K'+K'')^2 - 4K'K''}.$$

D'après ces valeurs de Z et de V, et ce que nous avons dit au n° **5** des limites des inclinaisons, on formera aisément les expressions suivantes :

$$\lim.\tang^2\Phi' = \tang^2\Phi'_0 + \frac{4K''[K'\tang^2\Phi'_0 + K''\tang^2\Phi'' + (-K+K'+K'')\tang\Phi''\tang\Phi']}{(-K+K'+K'')^2 - 4K'K''},$$

$$\lim.\tang^2\Phi'' = \tang^2\Phi''_0 + \frac{4K'[K'\tang^2\Phi'_0 + K''\tang^2\Phi''_0 + (-K+K'+K'')\tang\Phi'\tang\Phi'_0]}{(-K+K'+K'')^2 - 4K'K''},$$

formules dans lesquelles nous avons changé le signe de $\tang\Phi'_0$, conformément à ce qui a été dit au n° **5**. Et enfin, en extrayant les racines carrées des deux membres, on trouvera

$$\lim.\ \tang\Phi' = \frac{(K'+K''-K)\tang\Phi'_0 + 2K''\tang\Phi''_0}{\sqrt{(K'+K''-K)^2 - 4K'K''}},$$

$$\lim.\ \tang\Phi'' = \frac{(K'+K''-K)\tang\Phi''_0 + 2K'\tang\Phi'}{\sqrt{(K'+K''-K)^2 - 4K'K''}}.$$

On se convaincra aisément que le dénominateur de ces expressions ne peut jamais être nul.

7. Appliquons ces formules à la détermination des limites des inclinaisons des orbites de Saturne et d'Uranus sur l'orbite de Jupiter.

En adoptant les grands axes de la *Mécanique céleste*, et les masses les plus généralement reçues, nous aurons

$$a = 5{,}201\,166\,36, \quad m = \frac{1}{1050},$$

$$a' = 9{,}537\,870\,90, \quad m' = \frac{1}{3512},$$

$$a'' = 19{,}183\,305\,00, \quad m'' = \frac{1}{17918},$$

et l'on en déduit

$$K' = 5'',976\,289,$$

$$K'' = 0'',285\,788,$$

$$K = -17'',262\,094.$$

Les observations et les calculs les plus exacts fixent d'ailleurs la coïncidence des intersections des trois orbites en l'année 1722. Les formules (9) montrent qu'à l'instant de cette coïncidence, on doit avoir la relation $\frac{P'_0}{P''_0} = \frac{Q'_0}{Q''_0}$, ce qui donne un moyen simple de la reconnaître. Les inclinaisons des trois orbites sur le plan de l'écliptique de 1800 étaient, en 1722, les suivantes :

$$\begin{aligned} \varphi &= 1^\circ\, 18'\, 57'',09, \\ \varphi' &= 2^\circ\, 29'\, 28'',12, \\ \varphi'' &= 46'\, 31'',68. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} P_0 &= 0{,}017\,570\,357, & P''_0 &= -0{,}009\,790\,478, \\ Q'_0 &= -0{,}013\,077\,251, & Q''_0 &= +0{,}007\,286\,848, \end{aligned}$$

expressions qui satisfont bien au rapport énoncé. Enfin on en déduit, pour les inclinaisons relatives des orbites, toujours à la même époque,

$$\begin{aligned} \Phi'_0 &= 1^\circ 15'\, 17'',05, \\ \Phi''_0 &= 41'\, 57'',25, \end{aligned}$$

Au moyen de ces données, les limites de Φ' et de Φ'' s'obtiennent en quelques instants, et l'on trouve

$$\begin{aligned} \text{lim. } \Phi' &= 1^\circ\, 16'\, 46'',7, \\ \text{lim. } \Phi'' &= 1^\circ\, 20'\, 42''. \end{aligned}$$

En tenant compte simultanément de toutes les planètes, nous avons trouvé ailleurs lim. $\Phi' = 1^\circ\, 16'\, 46'',8$ et lim. $\Phi'' = 1^\circ\, 20'\, 55''$. La limite est la même pour l'inclinaison de Saturne. Pour l'inclinaison d'Uranus il y a une différence de $13''$ entre les deux limites; cette différence est due entièrement à l'action de Vénus et de la Terre, que nous négligeons ici.

8. Les quantités K, K', K'' sont respectivement proportionnelles aux masses de Jupiter, Saturne et Uranus; il n'entre donc dans les expressions précédentes des limites que les rapports des masses entre elles. Examinons si ces rapports venant à varier il pourrait se faire que les li-

mites des inclinaisons devinssent considérables; et supposons d'abord que la masse de Jupiter restant constante, nous ne fassions varier que les masses de Saturne et d'Uranus.

On pourrait discuter la partie variable des limites sous sa forme générale; mais il vaut mieux attribuer aux deux angles Φ'_0 et Φ''_0 la valeur du plus grand d'entre eux; car nous ne faisons que reculer par là les limites, et nous allons cependant reconnaître qu'elles resteront toujours petites si les inclinaisons primitives sont elles-mêmes peu considérables

Posons, pour simplifier,

$$\frac{K'}{-K} = z,$$

$$\frac{K''}{-K} = t,$$

et nous trouverons, en supposant que Φ'_0 soit le plus grand des deux angles,

$$\tang^2 \Phi' < \tang^2 \Phi'_0 \left(1 + 4t \frac{2z + 2t + 1}{2z + 2t + 1 + (z - t)^2}\right),$$

$$\tang^2 \Phi'' < \tang^2 \Phi'_0 \left(1 + 4z \frac{2z + 2t + 1}{2z + 2t + 1 + (z - t)^2}\right).$$

Les expressions comprises dans les parenthèses n'ont point de *maximum* absolu; mais lorsqu'on attribue à z, par exemple, une valeur particulière, elles sont susceptibles d'un *maximum* relatif qu'on obtient en faisant $z = t$; et ce *maximum* lui-même est égal à $(1 + 4z)$, en sorte qu'il croît avec la valeur de z.

L'un et l'autre des angles Φ' et Φ'' auront donc une tangente toujours comprise au-dessous de l'expression

$$\tang \Phi'_0 \sqrt{1 + 4z},$$

et dès lors ces angles resteront toujours très petits, tant qu'on ne fera pas grandir énormément les masses de Saturne et d'Uranus. Ainsi, en supposant, par exemple, que la masse de Saturne devienne six fois plus considérable qu'elle ne l'est, il faudrait que la masse d'Uranus grandît de plus de 120 fois sa valeur, pour que z devînt égal à 2. Les angles Φ' et Φ'' resteraient cependant encore toujours plus petits que le triple de la valeur initiale du plus grand d'entre eux.

9. Mais si nous ne pouvons obtenir des masses de Saturne et d'Uranus qui conduisent à des inclinaisons considérables, sans attribuer à ces masses des valeurs qui rendraient le calcul de la première approximation tout-à-fait insuffisant, c'est à la grandeur de la masse de Jupiter que nous le devons. Et si l'on supposait que la masse de Jupiter devînt très petite, il serait alors possible de déterminer les masses des deux autres planètes, de telle sorte que leurs inclinaisons sur l'orbite de la première pussent grandir considérablement. Il n'est pas besoin de dire que cet accroissement des inclinaisons relatives serait dû au mouvement absolu de l'orbite de la plus petite masse.

Cette circonstance d'une masse très petite soumise à l'action de deux autres masses plus considérables et plus éloignées qu'elle du Soleil, se rencontre dans notre système planétaire, et il doit exister entre Jupiter et le Soleil une position telle que si l'on y plaçait une petite masse, dans une orbite d'abord peu inclinée à celle de Jupiter, cette petite masse sortirait de son orbite primitive, et atteindrait de grandes inclinaisons sur le plan de l'orbite de Jupiter, par l'action de cette planète et de Saturne. Déterminons cette position.

Transportons la notation (0) à la planète dont nous cherchons la position; et les notations $'$ et $''$ à Jupiter et à Saturne. Puis supposons le grand axe de la nouvelle planète déterminé par la relation $K' = K''$, ou bien

$$(0,1) + (0,2) = (1,2) + (2,1).$$

Il est facile de voir que cette équation admet toujours une solution unique; car son second membre, en vertu des moyennes distances et des masses de Jupiter et de Saturne a une valeur finie et déterminée; tandis que le premier membre passerait successivement depuis 0 jusqu'à l'infini, si l'on faisait croître le demi-grand axe a de la planète cherchée depuis zéro jusqu'à la valeur a' du grand axe de Jupiter. La condition $K' = K''$ simplifie les expressions précédentes des limites de Φ' et de Φ'' : elles deviennent

$$\lim.\ \operatorname{tang}\Phi' = \frac{2K'(\operatorname{tang}\Phi'_0 + \operatorname{tang}\Phi''_0) - K\operatorname{tang}\Phi}{\sqrt{K(K - 4K')}},$$

$$\lim.\ \operatorname{tang}\Phi'' = \frac{2K'(\operatorname{tang}\Phi'_0 + \operatorname{tang}\Phi''_0) - K\operatorname{tang}\Phi}{\sqrt{K(K - 4K')}}.$$

Ces expressions renferment en dénominateur le facteur $\sqrt{K}$; et comme la quantité K elle-même est proportionnelle à la masse de la nouvelle planète, il s'ensuit qu'il suffira de diminuer suffisamment cette masse pour que les limites ci-dessus se trouvent aussi grandes qu'on le voudra.

On doit au reste remarquer que ce résultat ne prouve pas du tout que la petite planète atteindrait réellement les très grandes inclinaisons qu'on obtiendrait ainsi; mais il montre qu'il y a des cas où l'on ne devrait point, malgré la petitesse primitive des inclinaisons, calculer leurs inégalités séculaires en se bornant aux termes du premier ordre.

On résoudra aisément l'équation

$$(0,1) + (0,2) = (1,2) + (2,1).$$

Elle devient, dans le cas qui nous occupe, et en adoptant les notations de la *Mécanique céleste*, livre II, § 49,

$$-\frac{3}{4} m'n' \sqrt{\alpha} \frac{b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}}{(1-\alpha^2)^2} - \frac{3}{4} m''n'' \sqrt{\alpha'} \frac{b'^{(1)}_{-\frac{1}{2}}}{(1-\alpha'^2)^2} = 25'',564\,158.$$

α est le rapport du demi-grand axe de la petite planète au demi-grand axe de Jupiter; α' son rapport au demi-grand axe de Saturne. $b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}$ est une fonction de α; $b'^{(1)}_{-\frac{1}{2}}$ est la même fonction de α'. On calcule aisément la valeur de α par le développement en série; et en la multipliant ensuite par a' demi-grand axe de Jupiter, on obtient le demi-grand axe cherché. On trouve ainsi qu'il est à très peu près égal à 1,977.

Nous ne pouvons nous empêcher de remarquer que les planètes dont les demi-grands axes approchent le plus de celui que nous venons d'obtenir sont celles dont les masses sont les plus petites; et qu'il se trouve précisément que leurs inclinaisons sur l'orbite de Jupiter sont considérables.

Entre Vénus et le Soleil, il existe une autre étendue où, en vertu des actions perturbatrices de Vénus et de la Terre, les inclinaisons d'une petite masse pourraient grandir considérablement. Mercure se trouve placé à l'une des extrémités de cette étendue, et ses inclinaisons sont considérables. Elles pourront atteindre près de 9° relativement à l'orbite de Vénus.

10. Reprenons, comme exemple, les deux formules relatives aux inclinaisons de l'orbite de Saturne sur celle de Jupiter,

$$P' = x\sin(gt + \mathcal{E}) + x_1 \sin(g_1 t + \mathcal{E}_1),$$
$$Q' = x\cos(gt + \mathcal{E}) + x_1 \cos(g_1 t + \mathcal{E}_1),$$

et voyons à quel caractère on reconnaîtra s'il est possible ou non que cette inclinaison devienne nulle un jour. Le carré de la tangente, égal à la somme des carrés des deux quantités P′ et Q′, ne peut être nul, à moins que ces deux quantités ne le soient elles-mêmes chacune séparément; or pour que cette dernière condition pût être remplie, il faudrait que les deux quantités x et x_1 fussent égales en valeurs absolues, puisqu'on sait que les deux arguments g et g_1 sont différents l'un de l'autre. Nous donnerons le moyen de trouver le rapport de ces deux coefficients directement, après avoir indiqué une autre conséquence qu'on en peut déduire.

Les nœuds des trois orbites entre elles ont coïncidé exactement en 1722. Ce fait n'a rien de remarquable en lui-même. Nous avons reconnu qu'il devait se reproduire toutes les fois que les angles qui entrent dans les formules précédentes ne différaient que d'un multiple de la circonférence ou de la demi-circonférence; et comme les arguments g et g_1 ne sont point égaux, cette dernière circonstance doit se représenter périodiquement en vertu de l'excès du mouvement d'un des angles sur l'autre. L'intervalle qui sépare ainsi deux coïncidences successives des trois intersections des orbites est égal au quotient de la demi-circonférence par la différence des arguments g et g_1.

On peut désirer de savoir si l'angle que font entre elles les intersections des orbites de Saturne et d'Uranus avec le plan de l'orbite de Jupiter, croîtra de la demi-circonférence dans l'intervalle d'une coïncidence à l'autre, ou bien s'il exécutera seulement une libration. C'est ce qu'on reconnaîtra très simplement par la détermination du rapport des deux coefficients x et x_1, et du rapport des coefficients correspondants y et y_1 dans les formules relatives aux inclinaisons d'Uranus. Admettons en effet, pour fixer les idées, que les coefficients x et y soient respectivement plus grands en valeurs absolues que x_1 et y_1; il en résultera qu'à toutes les coïncidences, P′ et P″ garderont le même

signe relatif qu'ils avaient à la première : ce seront donc des nœuds de même espece qui coïncideront dans tous les cas ; et comme, d'ailleurs, les angles Φ' et Φ'' n'auront pu devenir nuls, l'angle des deux nœuds n'aura pu atteindre 180° ; il aura exécuté une libration.

Mais si x étant plus grand que x_1, y est au contraire plus petit que y_1, l'angle des deux nœuds exécutera une libration ou une révolution, selon que les sinus des angles des formules auront conservé le même signe relatif ou en auront changé.

Le cas seul où l'un des rapports $\frac{x}{x_1}$ ou $\frac{y}{y_1}$ serait égal à l'unité ne peut donner lieu à aucune conclusion : deux des orbites viennent à coïncider complétement à l'instant de la coïncidence des nœuds.

Cela posé, soit

$$x_1 = zx,$$
$$y_1 = ty;$$

en reprenant l'équation (7) et l'équation analogue pour le systeme x_1, y_1, nous aurons les deux relations

$$\left.\begin{aligned} -K + K' + K'' - K'\frac{x}{y} - K''\frac{y}{x} &= 0, \\ -K + K' + K'' - K'\frac{zx}{ty} - K'\frac{ty}{zx} &= 0; \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

on tire d'ailleurs des conditions (9), relatives à l'origine du temps,

$$\frac{P'_0}{P''_0} = \frac{x}{y} \times \frac{1+z}{1+t};$$

en tout trois relations entre les trois inconnues $\frac{x}{y}$, z et t.

Si nous éliminons d'abord $\frac{x}{y}$, les équations (15) deviendront

$$\left.\begin{aligned} -K + K' + K'' - K'\frac{P'_0}{P''_0}\,\frac{1+t}{1+z} - K''\frac{P'_0}{P''_0}\,\frac{1+z}{1+t} &= 0, \\ -K + K' + K'' - K'\frac{P'_0}{P''_0}\,\frac{z}{t}\,\frac{1+t}{1+z} - K'\frac{P''_0}{P'_0}\,\frac{t}{z}\,\frac{1+z}{1+t} &= 0; \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

et pour en déduire z et t d'une maniere simple, nous poserons

$$\frac{t}{z} = v, \qquad \frac{1+t}{1+z} = u.$$

Nous arriverons ainsi, pour la détermination de v et u, aux équations

$$\left.\begin{aligned} v^2 + \left[2 - \frac{(-K+K'+K'')^2}{K'K''}\right]v + 1 &= 0, \\ u &= \frac{P''_0}{P'_0}\sqrt{\frac{K''}{K'}}\,v, \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

L'équation en v est réciproque, et l'on devait s'y attendre; il suffira de prendre une de ses racines : celle qui est plus grande que l'unité, par exemple.

Nous n'avons point donné le double signe à la valeur de u; c'est qu'elle devra toujours avoir le même signe que le rapport $\frac{P''_0}{P'_0}$, ainsi que le montre la première des équations (15), $-K$, K', K'' étant des quantités essentiellement positives.

Ayant d'ailleurs les valeurs de v et u, on calculera z et t par les formules

$$z = \frac{u-1}{v-u},$$

$$t = \frac{v(u-1)}{v-u}.$$

Si nous appliquons ces résultats aux mouvements des orbites de Saturne et d'Uranus par rapport à l'orbite de Jupiter, au moyen des données établies plus haut, nous trouverons

$$v = 322{,}00, \qquad z = -0{,}009\,829,$$
$$u = -2{,}1865, \qquad t = -3{,}165,$$

et nous en concluons, conformément à ce que nous avons dit : 1° *que l'angle des deux nœuds sur l'orbite de Jupiter peut croître au-delà de toute limite;* 2° *que ni le plan de l'orbite de Saturne ni celui de l'orbite d'Uranus ne coïncideront jamais avec le plan de l'orbite de Jupiter.*

Pour résoudre la même question pour l'angle des intersections des orbites de Jupiter et d'Uranus avec le plan de l'orbite de Saturne, il n'y a qu'à reprendre les mêmes calculs en changeant seulement K en K′ et

réciproquement, et en remplaçant P_0' et P_0'' par $(p_0 - p_0')$ et $(p_0'' - p_0')$. On trouve ainsi

$$v = -108{,}78, \qquad z = -0{,}009\,829,$$
$$u = 2{,}0898, \qquad t = +1{,}069.$$

z a la même valeur que dans le cas précédent, parce qu'elle ne dépend toujours que du mouvement relatif des deux orbites de Saturne et de Jupiter.

Quant à t, nous voyons qu'il est très voisin de l'unité, et qu'ainsi nous sommes dans l'impossibilité de prononcer si l'angle en question parcourra la demi-circonférence tout entière. Cette difficulté tient à ce que les orbites de Saturne et d'Uranus peuvent s'abaisser très sensiblement dans le même plan. Nous nous sommes assurés, toutefois, que les variations les plus grandes qu'on pourrait attribuer aux masses que nous avons admises, ne pourraient abaisser t au-dessous de l'unité; en sorte qu'on pourrait encore affirmer ici que l'angle que nous considérons parcourra toute la demi-circonférence; mais il serait bien possible que la seconde approximation changeât ce résultat, et il faut s'abstenir de toute conclusion.

On retrouverait dans le mouvement des nœuds sur l'orbite d'Uranus la même valeur de t, et conséquemment la même difficulté. z serait égal à $-2{,}7$, c'est-à-dire plus grand que l'unité, en valeur absolue, tandis que dans le cas précédent, il était plus petit. Il en résulte que s'il n'est pas possible de décider qu'il y aura libration ou mouvement progressif de l'angle des nœuds sur l'une des deux orbites de Saturne ou d'Uranus, on peut toutefois affirmer *que le premier phénomène se produira toujours sur l'une des orbites, et le second sur l'autre.*

Le mouvement des nœuds des orbites a été étudié d'une manière spéciale dans un Mémoire que M. Liouville a inséré au mois de décembre 1839, dans ce recueil. On peut voir que nos résultats s'accordent complétement avec ceux qu'il y a consignés. Il est essentiel de remarquer qu'ils sont indépendants de toute considération sur la durée des périodes.

NOTE SUR L'INTÉGRALE

$$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x \, dx}{(1+x^2)^n};$$

PAR E. CATALAN.

1. M. Poisson a fait voir [*] qu'en représentant par y_n cette intégrale définie, laquelle doit être une fonction de la variable positive α, sa valeur dépend de l'équation linéaire d'ordre $2n$:

$$y_n - \frac{n}{1} \cdot \frac{d^2 y_n}{d\alpha^2} + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{d^4 y_n}{d\alpha^4} - \ldots\ldots \pm \frac{d^{2n} y_n}{d\alpha^{2n}} = 0, \qquad (1)$$

que l'on trouve facilement.

Cette équation est satisfaite par $y = e^{mx}$, m représentant une racine quelconque de

$$1 - \frac{n}{1} m^2 + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} m^4 - \ldots \pm m^{2n} = 0,$$

ou

$$(1 - m^2)^n = 0. \qquad (2)$$

Parmi les $2n$ racines de l'équation (2), il y en a n égales à $+1$, et n égales à -1. D'ailleurs, l'intégrale proposée ne peut croître indéfiniment avec α : on conclut de là que la valeur de y_n relative au problème dont il s'agit, sera de cette forme :

$$y_n = e^{-\alpha}\left[A_0 + \frac{A_1}{1}\alpha + \frac{A_2}{1.2}\alpha^2 + \ldots + \frac{A_{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\alpha^{n-1}\right]. \qquad (3)$$

Il faut actuellement déterminer les constantes.

[*] *Journal de l'École Polytechnique*, XVIe cahier.

2. Pour cela, je désigne par P le polynome qui multiplie $e^{-\alpha}$, et je différencie $n-1$ fois; ce qui donne généralement

$$\frac{d^i y_n}{d\alpha^i} = (-1)^i e^{-\alpha}\left(P - \frac{i}{1}\cdot\frac{dP}{d\alpha} + \frac{i}{1}\cdot\frac{i-1}{2}\cdot\frac{d^2P}{d\alpha^2} - \ldots \pm \frac{d^iP}{d\alpha^i}\right). \quad (4)$$

Faisant $\alpha = 0$ [*] dans les équations (3) et (4), j'obtiens

$$(y_n) = A_0, \quad \text{et} \quad \left(\frac{d^i y_n}{d\alpha^i}\right) = (-1)^i\left(A_0 - \frac{i}{1}A_1 + \frac{i}{1}\cdot\frac{i-1}{2}A_2 - \ldots \pm A_{n-1}\right); \quad (5)$$

(y_n) et $\left(\frac{d^i y_n}{d\alpha^i}\right)$ représentent les valeurs que prennent les fonctions y_n, $\frac{d^i y_n}{d\alpha^i}$, quand on suppose $\alpha = 0$.

La nature des équations (5) permet de les résoudre très facilement: et l'on trouve

$$A_i = (y_n) + \frac{i}{1}\cdot\left(\frac{dy_n}{d\alpha}\right) + \frac{i}{1}\cdot\frac{i-1}{2}\cdot\left(\frac{d^2y_n}{d\alpha^2}\right) + \ldots + \left(\frac{d^iy_n}{d\alpha^i}\right). \quad (6)$$

3. J'observe actuellement que

$$\left.\begin{array}{lll}
y_n = \int_0^\infty \frac{\cos\alpha x\,.\,dx}{(1+x^2)^n}, & \text{d'où} & (y_n) = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n}, \\
\frac{dy_n}{d\alpha} = -\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x\,.\,x dx}{(1+x^2)^n}, & \ldots\ldots\ldots & \left(\frac{dy_n}{d\alpha}\right) = 0, \\
\frac{d^2y_n}{d\alpha^2} = -\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x\,.\,x^2 dx}{(1+x^2)^n}, & \ldots\ldots & \left(\frac{d^2y_n}{d\alpha^2}\right) = -\int_0^\infty \frac{x^2dx}{(1+x^2)^n}, \\
\frac{d^3y_n}{d\alpha^3} = \int_0^\infty \frac{\sin\alpha x\,.\,x^3 dx}{(1+x^2)^n}, & \ldots\ldots & \left(\frac{d^3y_n}{d\alpha^3}\right) = 0, \\
\frac{d^4y_n}{d\alpha^4} = \int_0^\infty \frac{\cos\alpha x\,.\,x^4 dx}{(1+x^2)^n}, & \ldots\ldots & \left(\frac{d^4y_n}{d\alpha^4}\right) = \int_0^\infty \frac{x^4dx}{(1+x^2)^n}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} \quad (7)$$

Pour évaluer ces différentes intégrales définies, indépendantes de α, je prends celle-ci, $\int_0^\infty \frac{x^m dx}{(1+x^2)^n}$, dans laquelle $m \overset{=}{<} n-1$.

---

[*] Les $2n-2$ premières dérivées de y_n, prises par rapport à α, sont des fonctions continues de cette variable, du moins entre les limites 0 et ∞; il n'en serait pas de même des dérivées suivantes; mais cette circonstance est indifférente ici, puisque nous prenons $i < 2$.

En posant $$x^2 = \frac{\theta}{1-\theta},$$

elle se transforme en

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \theta^{\frac{m-1}{2}} (1-\theta)^{n-\frac{m+3}{2}} d\theta = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma(n)};$$

et la formule (6) devient

$$A_i = \frac{1}{2\Gamma(n)}\left[\begin{array}{l}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) - \frac{i}{1}\cdot\frac{i-1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right)\\ + \frac{i}{1}\cdot\frac{i-1}{2}\cdot\frac{i-2}{3}\cdot\frac{i-3}{4}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{5}{2}\right) - \ldots\end{array}\right]. \quad (8)$$

Le dernier terme, dans la parenthèse, est

$$\pm\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{i+1}{2}\right) \quad \text{ou} \quad \pm\Gamma\left(\frac{i}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{i}{2}\right),$$

selon que i est pair ou impair.

4. Cette valeur de A_i peut s'écrire autrement.

En posant $$\theta = \sin^2\varphi, \quad 1-\theta = \cos^2\varphi,$$

l'intégrale

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \theta^{\frac{m-1}{2}} (1-\theta)^{n-\frac{m+3}{2}} d\theta$$

se transforme en

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m\varphi . \cos^{2n-m-2}\varphi . d\varphi.$$

Par suite,

$$A_i = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\begin{array}{l}\cos^{2n-2}\varphi - \frac{i}{1}\cdot\frac{i-1}{2}\sin^2\varphi . \cos^{2n-4}\varphi\\ + \frac{i}{1}\cdot\frac{i-1}{2}\cdot\frac{i-2}{3}\cdot\frac{i-3}{4}\sin^4\varphi . \cos^{2n-6}\varphi - \ldots\end{array}\right] d\varphi. \quad (9)$$

Il est visible que la quantité entre parenthèses est la partie réelle du dé-

veloppement de $\cos^{2n-i-2}\varphi(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)^i$; d'où, par le théorème de Moivre,

$$A_i = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-i-2}\varphi.\cos i\varphi.d\varphi. \qquad (10)$$

On a identiquement $\cos i\varphi = \cos\varphi.\cos(i-1)\varphi - \sin\varphi.\sin(i-1)\varphi$; l'intégrale qui précède se trouve ainsi transformée en

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-i-1}\varphi.\cos(i-1)\varphi.d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-i-2}\varphi.\sin\varphi.\sin(i-1)\varphi.d\varphi;$$

ou, en intégrant par parties et observant que le terme

$$\frac{1}{2n-i-1}\cos^{2n-i-1}\varphi.\sin(i-1)\varphi$$

disparaît aux deux limites :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-i-2}\varphi.\cos i\varphi.d\varphi = 2\frac{n-i}{2n-i-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-i-1}\varphi.\cos(i-1)\varphi.d\varphi. \qquad (11)$$

A l'aide de cette formule de réduction, la valeur (10) se transforme d'abord en cette autre :

$$A_i = \frac{2^i}{\Gamma(n)}.\frac{n-i}{2n-i-1}.\frac{n-i+1}{2n-i}\cdots\frac{n-1}{2n-2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}\varphi.d\varphi. \qquad (12)$$

Enfin, cette dernière intégrale étant égale à

$$\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right),$$

on obtient, après quelques simplifications,

$$A_i = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-i-1}\pi\frac{\Gamma(2n-i-1)}{\Gamma(n)\Gamma(n-i)}. \qquad (13)$$

La comparaison de cette valeur avec (8) fournit cette formule de sommation, qu'il serait peut-être difficile de trouver autrement :

$$\left.\begin{aligned}&\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)-\frac{i}{1}\cdot\frac{i-1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right)\\&+\frac{i}{1}\cdot\frac{i-1}{2}\cdot\frac{i-2}{3}\cdot\frac{i-3}{4}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{5}{2}\right)-\ldots=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-i-2}\pi\frac{\Gamma(2n-i-1)}{\Gamma(n-i)}.\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

On observera, dans l'application de cette formule, que i et n sont des nombres entiers positifs, et que l'on doit avoir $i < n$.

5. Revenant à l'intégrale proposée, je mets dans la formule (3) les valeurs (14), et j'obtiens

$$\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x.dx}{(1+x^2)^n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}\frac{\pi e^{-\alpha}}{[\Gamma(n)]^2}\left[\begin{aligned}&\Gamma(2n-1)+\frac{n-1}{1}(2\alpha)\Gamma(2n-2)\\&+\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}(2\alpha)^2\Gamma(2n-3)+\ldots+(2\alpha)^{n-1}\Gamma(n)\end{aligned}\right].\quad(15)$$

Si, dans cette formule (15), on remplace les Γ par les intégrales eulériennes équivalentes, elle pourra s'écrire ainsi :

$$\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x.dx}{(1+x^2)^n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}\frac{\pi e^{-\alpha}}{[\Gamma(n)]^2}\int_0^\infty e^{-y}y^{n-1}dy(y+2\alpha)^{n-1},$$

ou

$$\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x.dx}{(1+x^2)^n}=\frac{\pi}{[\Gamma(n)]^2}\int_0^\infty e^{-(\alpha+2z)}z^{n-1}dz(z+\alpha)^{n-1};\quad(16)$$

ou enfin

$$\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x.dx}{(1+x^2)^n}=\frac{\pi\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2n-1}}{[\Gamma(n)]^2}\int_1^\infty e^{-\alpha z}(z^2-1)^{n-1}dz.\quad(17)$$

Les formules (16) et (17) permettent d'obtenir, assez facilement, les valeurs des intégrales définies

$$\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x.x^{2i}dx}{(1+x^2)^n},\quad \int_0^\infty \frac{\sin\alpha x.x^{2i+1}dx}{(1+x^2)^n};$$

je n'écris pas ces valeurs, parce qu'elles sont un peu compliquées.

(Février 1840.)

NOTE

SUR

L'ÉVALUATION DE LA SURFACE TOTALE DE L'ELLIPSOÏDE

A TROIS AXES INÉGAUX;

Par M. R. LOBATTO,

Docteur ès-sciences, à *La Haye*.

Dans un beau Mémoire sur la réduction d'une classe d'intégrales multiples, inséré dans ce Journal [*], M. *Catalan* a indiqué, à l'aide d'une considération géométrique, une nouvelle voie plus expéditive que celle suivie par *Legendre* et *Plana*, pour parvenir à l'expression analytique de la surface totale de l'ellipsoïde. En désignant par α, β, γ, les trois axes de ce solide, α étant supposé $> \beta > \gamma$, l'auteur a réduit la double intégrale qui exprime la huitième partie de la surface dont il s'agit, à l'intégrale simple

$$\alpha\beta\frac{\pi}{4}\int_1^\infty z\,d.\mathrm{XY},$$

ou

$$\mathrm{X} = \sqrt{\frac{z^2-1}{z^2-a^2}},\quad \mathrm{Y} = \sqrt{\frac{z^2-1}{z^2-b^2}},\quad a^2 = 1-\frac{\gamma^2}{\alpha^2},\quad \text{et}\quad b^2 = 1-\frac{\gamma^2}{\beta^2}.$$

Je me propose de faire voir dans cette Note que l'analyse employée par M. *Catalan* pour obtenir la valeur de cette intégrale définie, pourrait être remplacée avec avantage par la suivante, qui semble plus simple, en ce qu'elle conduit directement aux deux transcendantes elliptiques d'où dépend la surface à évaluer.

En effet, après avoir transformé l'intégrale $\int z\,d.\mathrm{XY}$ en

$$z\mathrm{XY} - \int \mathrm{XY}\,dz = \frac{z(z^2-1)}{\sqrt{(z^2-a^2)(z^2-b^2)}} - \int \frac{(z^2-1)\,dz}{\sqrt{(z^2-a^2)(z^2-b^2)}},$$

[*] Voir le numéro du mois de mars 1839, page 323.

il ne s'agira que d'effectuer cette dernière intégration entre les limites $z = 1$ et $z = \infty$. Pour cela il n'y a qu'à poser $z = \frac{a}{\sin\varphi}$, donc $dz = \frac{-a\cos\varphi}{\sin^2\varphi}.d\varphi$, ce qui changera la différentielle $\frac{-(z^2-1)\,dz}{\sqrt{(z^2-a^2)(z^2-b^2)}}$ en

$$\left(\frac{a^2}{\sin^2\varphi} - 1\right)\frac{d\varphi}{\sqrt{(a^2-b^2\sin^2\varphi)}} = \left[\frac{\sqrt{(a^2-b^2\sin^2\varphi)}}{\sin^2\varphi} - \frac{(1-b^2)}{\sqrt{(a^2-b^2\sin^2\varphi)}}\right]d\varphi.$$

Par ce changement de variable, l'intégrale fonction de z, se trouvera décomposée en

$$\int\frac{d\varphi\sqrt{(a^2-b^2\sin^2\varphi)}}{\sin^2\varphi} - (1-b^2)\int\frac{d\varphi}{\sqrt{(a^2-b^2\sin^2\varphi)}},$$

chacune de celles-ci devant être prise depuis $\sin\varphi = a$ jusqu'à $\sin\varphi = 0$. En renversant ces limites, et posant pour simplifier, $\frac{b}{a} = c$, $a = \sin u$, l'expression précédente devient

$$\frac{1-b^2}{a}\int_0^\mu\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}} - a\int_0^\mu\frac{d\varphi\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}}{\sin^2\varphi}$$

$$= \frac{1-b^2}{a}\int_0^\mu\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}} + a\cot\varphi\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}$$

$$+ ac^2\int_0^\mu\frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}} \text{ (en intégrant par parties}$$

$$= a\cot\varphi\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)} + \frac{1}{a}\int_0^\mu\frac{(1-a^2c^2\sin^2\varphi)}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}}d\varphi$$

$$= a\cot\varphi\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)} + a\int_0^\mu\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}\,d\varphi$$

$$+ \frac{1-a^2}{a}\int_0^\mu\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}}$$

$$= a\cot\varphi\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)} + a\mathrm{E}(c, u) + \left(\frac{1-a^2}{a}\right)\mathrm{F}(c, u).$$

Il reste maintenant à évaluer entre les limites relatives à chacune

des deux variables z, φ, la somme des quantités

$$\frac{(z^2-1)z}{\sqrt{(z^2-a^2)(z^2-b^2)}}, \quad a\cot\varphi\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}.$$

En exprimant la première en fonction de φ, il s'agira de chercher entre les limites $\varphi = 0$ et $\sin\varphi = a$, la différence

$$a\cot\varphi\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)} - \frac{a^2-\sin^2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{(a^2-b^2\sin^2\varphi)}},$$

qui se réduit facilement à

$$\frac{(1-a^2-b^2\cos^2\varphi)\sin\varphi}{\cos\varphi\sqrt{(a^2-b^2\sin^2\varphi)}}.$$

Cette valeur devenant nulle à la première limite, il faudra seulement y substituer $\sin\varphi = a$, ce qui la changera en

$$\frac{(1-a^2)(1-b^2)a}{a\sqrt{(1-a^2)}\sqrt{(1-b^2)}} = \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)};$$

d'où l'on tire enfin, pour l'expression de la surface totale de l'ellipsoïde,

$$2\alpha\beta\pi\left[\sqrt{(1-a^2)}\sqrt{(1-b^2)} + a\mathrm{E}(c, u) + \frac{1-a^2}{a}\mathrm{F}(c, u)\right]$$
$$= 2\pi\gamma^2 + \frac{2\pi\beta}{\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}}\left[(\alpha^2-\gamma^2)\mathrm{E}(c, u) + \gamma^2\mathrm{F}(c, u)\right],$$

valeur qui coïncide parfaitement avec celle donnée dans le susdit Mémoire.

Je me permettrai encore d'indiquer ici un moyen plus simple que celui employé par l'auteur, pour parvenir aux valeurs des deux intégrales définies

$$\mathrm{A}_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\, d\varphi\sqrt{(1-a^2\sin^2\varphi)}, \quad \mathrm{A}_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\, d\varphi\sqrt{(1-a^2\sin^2\varphi)},$$

traitées à la page 335 de son Mémoire.

Si l'on fait $\cos\varphi = x$, la première se change immédiatement en

$$\int_0^1 dx\,\sqrt{(1 - a^2 + a^2 x^2)} = a\int_0^1 dx\,\sqrt{(m^2 + x^2)},$$

en posant
$$\frac{1 - a^2}{a} = m^2.$$

Or, puisqu'on a

$$\int dx\,\sqrt{(m^2 + x^2)} = \frac{x}{2}\sqrt{(m^2 + x^2)} + \frac{m^2}{2}\,\mathrm{l.}\left(x + \sqrt{x^2 + m^2}\right),$$

il en résulte

$$\int_0^1 dx\sqrt{(m^2 + x^2)} = \frac{1}{2}\sqrt{(m^2 + 1)} + \frac{m^2}{2}\,\mathrm{l.}\left(\frac{1 + \sqrt{1 + m^2}}{m}\right).$$

Donc

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1 - a^2}{a^2}\right)\mathrm{l.}\,\frac{1 + a}{\sqrt{(1 - a^2)}} \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1 - a^2}{a^2}\,\mathrm{l.}\sqrt{\frac{1 + a}{1 - a}}\right). \end{aligned}$$

Quant à la seconde de ces intégrales, elle se transforme successivement en

$$\begin{aligned} A_3 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\,(1 - \cos^2\varphi)\,d\varphi\,\sqrt{(1 - a^2\sin^2\varphi)} \\ &= A_1 - a\int_0^1 x^2\,dx\,\sqrt{(m^2 + x^2)}. \end{aligned}$$

Or, d'après une formule générale, on a

$$\int x^2\,dx\,\sqrt{(m^2 + x^2)} = \frac{x^2\left(x^2 + m^2\right)^{\frac{3}{2}} - m^2\int dx\,\sqrt{m^2 + x^2}}{4};$$

par conséquent,

$$a\int_0^1 x^2\,dx\,\sqrt{m^2 + x^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a^2} - m^2 A_1\right).$$

Substituant dans la valeur de A_3, on en déduira sur-le-champ

$$A_3 = \left(1 + \frac{1}{4}m^2\right) A_1 - \frac{1}{4a^2} = \left(\frac{3a^2+1}{4a^2}\right) A_1 - \frac{1}{4a^2}$$
$$= \frac{3a^2-1}{8a^2} + \frac{(1-a^2)(3a^2+1)}{8a^3} \text{l.} \sqrt{\frac{1+a}{1-a}},$$

résultat qui s'accorde avec celui obtenu par M. *Catalan*, à l'exception du premier terme, pour lequel ce géomètre a trouvé, par une erreur de calcul, $\frac{3a^2-2}{8a^2}$.

— —

MÉMOIRE

SUR LES FORCES CENTRIFUGES

DÉVELOPPÉES DANS LE MOUVEMENT DES CORPS QUI ROULENT;

Par M. Paul BRETON,

Élève-Ingénieur des Ponts-et-Chaussées.

1. Pour donner une idée des recherches qui font l'objet de ce Mémoire et faire comprendre de quelles forces centrifuges nous allons parler, nous prendrons tout d'abord un exemple bien simple, celui d'une roue qui roule sur un chemin horizontal en ligne droite.

Si l'essieu était fixe et que la roue ne fît que tourner autour, ses différentes parties tendraient à s'en écarter en vertu de la force centrifuge qui les sollicite. Lorsque la roue est *bien centrée*, c'est-à-dire lorsqu'elle est composée de points matériels distribués symétriquement autour de l'essieu, les forces centrifuges ont une résultante nulle. Dans le cas contraire, l'axe de rotation supporte un effort résultant de l'action des mêmes forces sur la roue. Dans les deux cas on se rend compte de ce qui se passe en admettant cette loi générale :

Lorsqu'un point matériel se meut dans une ligne courbe, il est sollicité à chaque instant par une force dirigée normalement à la courbe.

La mécanique démontre que *cette force est dirigée du centre de courbure vers la courbe, et qu'elle est proportionnelle au carré de la vitesse du point matériel et réciproque au rayon de courbure.*

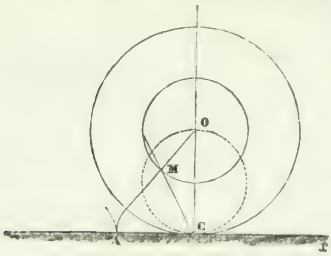
Nous appellerons, dans ce qui va suivre, dm la masse d'un point matériel, v sa vitesse et ρ le rayon de courbure de sa trajectoire. De plus, nommons f l'intensité de cette force centrifuge, nous aurons

$$f = dm \cdot \frac{v^2}{\rho}.$$

2. Supposons maintenant une roue cheminant en ligne droite, et roulant à la manière ordinaire, c'est-à-dire développant sa circonférence

sans glisser. Les points de la roue décrivent alors des lignes courbes; ceux de la circonférence parcourent des cycloïdes; les trajectoires des autres points, différentes de la cycloïde, forment avec elle une même famille de courbes. La loi que nous venons de citer indique l'existence d'une force centrifuge appliquée à chaque point de la roue : nous allons rechercher l'expression générale de ces forces, leur résultante, sa direction et son point d'application.

Pour cela il faut connaître la vitesse de chaque point de la roue, le rayon de courbure de sa trajectoire, et la direction de la normale à celle-ci. Remarquons d'abord que la parallèle à l'essieu menée par le point d'appui de la roue en est l'*axe instantané de rotation;* il résulte de là que toutes les normales aux courbes décrites rencontrent cet axe, ce qui suffit pour les déterminer.



A l'égard des rayons de courbure on les obtiendra, soit en partant de la relation entre les coordonnées de chaque trajectoire, soit en faisant usage de la considération des infiniment petits dans la génération même des courbes.

Quoique ce dernier moyen soit le plus simple, nous préférons cependant l'emploi de l'équation entre l'abscisse et l'ordonnée, parce qu'il met en évidence d'une manière plus nette la relation qui existe entre les trajectoires de tous les points de la roue. D'ailleurs, la singularité des conclusions qui vont ressortir de nos calculs, exige que nous établissions les démonstrations de nos formules le plus rigoureusement qu'il sera possible; ce n'est pas que l'usage des infiniment petits nous paraisse manquer de certitude dans les résultats qu'on en obtient, mais il se peut que quelques-uns de nos lecteurs ne partagent point notre avis.

Prenons pour axe des abscisses le chemin sur lequel roule la roue. Quant à l'axe des coordonnées, nous supposerons que c'est la verticale sur laquelle se trouvait à l'origine du mouvement le point quelconque M, que nous admettons s'être trouvé d'abord au-dessous du centre de

la roue. Cela posé, conservons les dénominations déjà adoptées, et de plus, nommons

V la vitesse de l'essieu;

R le rayon de la roue ou plutôt de la circonférence qui se développe sans glisser;

n la portion de la normale comprise entre le point quelconque M et l'axe instantané de rotation en C;

φ l'angle compris entre les deux plans OC, OM, menés par l'essieu et passant, le premier par l'axe instantané C, et l'autre par le point M;

ψ l'angle compris entre les deux plans CO, CM, menés par l'axe instantané C, passant, l'un par l'essieu, et le second par le point M;

r le rayon du point M ou sa distance à l'essieu;

nous aurons

$$x = R\varphi - r\sin\varphi,$$

$$y = R - r\cos\varphi.$$

On en déduit

$$x = R.\ \text{arc cos}\,\frac{R-y}{r} - \sqrt{r^2-(R-y)^2}.$$

Telle est la relation qui existe entre l'abscisse et l'ordonnée de la courbe décrite par le point M pris à la distance r de l'essieu. Le lecteur à qui les procédés du calcul différentiel sont familiers, en tirera sans peine les expressions suivantes :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{r^2-(R-y)^2}}{y}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{R^2-Ry-r^2}{y^3}.$$

Rappelons que le rayon de courbure ρ a pour expression

$$\rho = \pm\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

que l'on prend avec le signe supérieur ou avec le signe inférieur, suivant que l'on a $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ ou $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, c'est-à-dire suivant que le centre de courbure est situé au-dessus ou au-dessous de la courbe.

Substituant dans cette valeur de ρ celles de $\frac{dy}{dx}$ et de $\frac{d^2y}{dx^2}$ trouvées ci-dessus, on obtient

$$\rho = \pm \frac{(r^2 + 2Ry - R^2)^{\frac{3}{2}}}{R^2 - Ry - r^2}.$$

Remarquons en passant que les valeurs de l'abscisse et de l'ordonnée, celles des coefficients différentiels et celles du rayon de courbure deviennent identiques avec les quantités analogues relatives à la cycloïde, lorsque l'on pose

$$r = R;$$

c'est ce qui doit avoir lieu, en effet, d'après la génération des courbes que nous considérons.

3. Pour approprier l'expression précédente du rayon de courbure à l'usage que nous en voulons faire, nous allons la transformer et la simplifier.

Observons d'abord que l'on a entre les lignes R, r et y les relations toutes géométriques

$$r^2 + 2Ry - R^2 = n^2,$$
$$R^2 - Ry - r^2 = r(R\cos\varphi - r);$$

il résulte de là l'expression

$$\rho = \pm \frac{n^3}{r(R\cos\varphi - r)};$$

et comme l'on a aussi

$$r(R\cos\varphi - r) = n(R\cos\psi - n),$$

la valeur de ρ se présente sous la forme

$$\rho = \pm \frac{n^2}{R\cos\psi - n}.$$

Il nous reste à exprimer la vitesse de chaque point mobile en fonction de la vitesse de l'essieu. Rien de plus facile : la vitesse de l'axe instantané de rotation étant nulle, celles de deux points quelconques sont entre elles dans le même rapport que leurs distances au même axe. On peut donc écrire la relation simple

$$v = \frac{V}{R} \cdot n.$$

4. Au moyen des valeurs de la vitesse et du rayon de courbure, nous sommes en état d'obtenir celle de la force centrifuge qui sollicite le point quelconque M; on a

$$f = \mp dm \cdot \frac{V^2}{R^2} (R \cos \psi - n).$$

Le double signe de ρ a été renversé à cause que la force centrifuge est dirigée du centre de courbure vers la courbe. La force f tendra donc à soulever le point qu'elle sollicite ou à l'abaisser, suivant que sa valeur, abstraction faite du signe inférieur, sera positive ou négative. Cela du moins aura lieu sans restriction lorsque tous les points de la roue seront situés au-dessus du chemin qu'elle parcourt. Mais on comprend qu'une partie de la roue pourrait se trouver au contraire en-dessous, comme cela arrive à celles des waggons des chemins de fer qui sont entourées d'un rebord dont le diamètre est plus grand que le leur. C'est pourquoi, au lieu de considérer la force centrifuge elle-même, nous la décomposerons en deux autres : l'une verticale et passant par l'essieu, la seconde horizontale. La résultante des forces horizontales provenant de cette décomposition sera nulle si la roue est un solide de révolution autour de son essieu. Dans le cas contraire, on aura à considérer les intégrales définies

$$\sum f \sin \psi \quad \text{et} \quad \sum f \cos \psi.$$

Le signe $\sum$ s'étendant à tous les points matériels sollicités par les forces

f, on a de cette manière

$$\sum f \sin \psi = -\frac{V^2}{R^2} \sum dm \,(R \cos \psi - n) \sin \psi,$$

$$\sum f \cos \psi = -\frac{V^2}{R^2} \sum dm \,(R \cos \psi - n) \cos \psi.$$

Désignons par M la masse totale de la roue, et faisons attention que les sommes $\sum dm.n \sin \psi$ et $\sum dm.n \cos \psi$ ne sont autre chose que les moments de la roue pris par rapport aux axes des coordonnées, il viendra

$$\sum f \sin \psi = -\frac{V^2}{R^2} \sum dm \sin \psi \cos \psi,$$

$$\sum f \cos \psi = M \frac{V^2}{R^2} \left(1 - \frac{1}{M} \sum dm \cos^2 \psi\right).$$

5. Il est bien entendu que la roue est *centrée*, et que par conséquent l'essieu passe par son centre de gravité. Autrement il faudrait prendre en considération la position du centre de gravité qui ne serait plus sur la verticale menée par l'axe instantané. Comme une pareille extension du problème serait actuellement sans intérêt, nous supposerons que la roue est un solide de révolution. Nous laisserons de côté les calculs relatifs à la position du point d'application de la résultante des forces centrifuges, calculs qui exigeraient l'emploi des moments des composantes $f \sin \psi$ et $f \cos \psi$, pris par rapport à l'un des points de l'axe instantané de rotation. Plus loin, en donnant à la question toute la généralité qu'elle comporte, nous reviendrons sur la manière de tenir compte de toutes ces circonstances.

6. Pour le moment, nous n'avons à nous occuper que de l'expression

$$\sum f \cos \psi = M \frac{V^2}{R} \left(1 - \frac{1}{M} \sum dm \cos^2 \psi\right)$$

formée de cette autre

$$f \cos \psi = -dm \frac{V^2}{R^2} (R \cos \psi - n).$$

A la seule inspection de $f \cos \psi$, on reconnaît quels sont les points de la roue pour lesquels la valeur de cette composante est positive, nulle ou négative, c'est-à-dire les points que la force centrifuge tend à sou-

lever ou à abaisser, et ceux sur lesquels elle n'exerce aucune action. Ces derniers se meuvent évidemment dans les points d'inflexion de leurs trajectoires, pour lesquels on a

$$\frac{1}{\rho} = 0, \quad \text{ou} \quad R\cos\psi - n = 0.$$

Cette dernière équation entre n et ψ n'est autre chose que l'équation polaire d'une circonférence de cercle qui a pour diamètre le rayon de la roue et dont le centre est au milieu du rayon vertical qui passe par l'axe instantané. On conclut de là que *dans une roue en mouvement les seuls points sur lesquels la force centrifuge n'agit point ont pour lieu géométrique une surface cylindrique à base circulaire qui a pour diamètre le rayon de la roue, et dont l'axe, parallèle à l'essieu et à l'axe instantané de rotation, est placé entre ceux-ci au milieu de la distance qui les sépare.*

A l'extérieur de cette surface cylindrique, et au-dessus de l'axe instantané, on a

$$R\cos\psi - n < 0 \quad \text{et} \quad \cos\psi < 0,$$

et par suite

$$f\cos\psi > 0.$$

A l'intérieur, au contraire, on a

$$R\cos\psi - n > 0 \quad \text{et} \quad \cos\psi > 0,$$

et par conséquent

$$f\cos\psi < 0.$$

Au-dessous de l'axe instantané la valeur de $R\cos\psi - n$ est constamment négative; mais $\cos\psi$ étant négatif en même temps, la valeur de $f\cos\psi$ est négative.

Ainsi *tous les points situés dans l'intérieur de la surface cylindrique de rayon* $\frac{1}{2}R$ *placée en-dessous de l'essieu ou plutôt au-dessus de l'axe instantané et ceux qui se trouvent au-dessous de cet axe sont animés de forces centrifuges qui tendent à abaisser la roue; tous les autres points tendent, au contraire, à la soulever.*

7. Notre travail serait à peu près sans but si les forces qui tendent à soulever la roue faisaient équilibre à celles qui tendent à l'abaisser. Mais il n'en est point ainsi, cette compensation n'existe même jamais. Pour le montrer, reprenons l'expression de la résultante verticale des forces centrifuges,

$$\sum f \cos \psi = M \frac{V^2}{R} \left(1 - \frac{1}{M} \sum dm \cos^2 \psi\right).$$

Le terme $\sum dm \cos^2 \psi$ ne saurait surpasser M ni même l'égaler, car $\cos^2 \psi$ est toujours une fraction moindre que l'unité. Ainsi le facteur $\left(1 - \frac{1}{M} \sum dm \cos^2 \psi\right)$, nécessairement plus petit que l'unité, a toujours une valeur positive. Cette valeur dépend essentiellement de la forme du mobile et de la densité de ses différentes parties; elle sera donnée dans chaque cas par des intégrales définies.

Nommons k ce facteur, F l'effort vertical dont l'existence vient d'être démontrée, P le poids de la roue, et g l'intensité de la pesanteur. Nous aurons

$$F = k \frac{P}{g} \frac{V^2}{R},$$

expression qui donnera la valeur de F lorsque l'on connaîtra celle de k.

8. Remarquons ici l'absence de toute définition de la forme de la roue dans ce qui précède. Le solide qui roule peut en avoir une telle qu'on voudra l'imaginer, la généralité de nos formules n'en souffrira pas. Nous avons seulement supposé un solide tel que la résultante des forces centrifuges fût verticale. Cela arrive évidemment à tout solide de révolution qui a son axe de figure pour essieu, et peut être regardé comme sensiblement vrai pour des solides composés, comme les roues ordinaires des voitures, de parties distribuées symétriquement autour de l'essieu.

Quoi qu'il en soit, nous arrivons à cette conclusion : *une roue en mouvement est toujours sollicitée par une force verticale qui tend à la soulever, et cette force est proportionnelle au carré de la vitesse de la roue.*

On pourrait donc imprimer à une roue une vitesse telle que la résultante des forces centrifuges développées fût supérieure, non-seulement à son poids, mais encore à la charge que supporte l'essieu; de manière qu'elle n'exercerait aucune pression contre le sol.

Cette conclusion si singulière nous a engagé à détailler nos calculs de façon que chacun puisse les suivre facilement et les corriger s'ils étaient entachés d'inexactitude.

9. Nous allons maintenant présenter quelques applications du calcul à la recherche de la valeur F pour des solides de différentes formes, mais plus spécialement pour les anneaux cylindriques dans lesquels ils se décomposent naturellement.

Supposons premièrement un cylindre d'épaisseur uniforme de rayon r attaché à une circonférence de rayon R qui roule. Concevons ce cylindre divisé en tranches minces d'épaisseur variable par des plans parallèles à l'essieu menés par l'axe instantané, et chacune de ces tranches composée elle-même de filets déliés parallèles à l'axe du cylindre. Soit z son épaisseur, ϖ le poids de l'unité de volume de la matière homogène dont il est formé, nous aurons évidemment

$$dm = \frac{\varpi}{g} z . n dn . d\psi .$$

Par une première intégration qui embrasse tous les filets d'une même tranche on obtient sur-le-champ

$$\frac{\varpi}{g} z \cos\psi \, d\psi \left(\frac{n_1^2 - n_0^2}{2} \right) .$$

pour la portion de $\sum dm \cos^2\psi$ qui répond à cette tranche. Les limites n_1, n_0, sont relatives aux points extrêmes de la tranche que l'on suppose ici tout entière d'un même côté de l'axe instantané de rotation. S'il en était autrement, il faudrait prendre pour la première intégrale

$$\frac{\varpi}{g} z \cos^2\psi \, d\psi \left(\frac{n_1^2 + n_0^2}{2} \right) .$$

Dans les deux cas l'on a

$$n_1 = \mathrm{R}\cos\psi + \sqrt{r^2 - \mathrm{R}^2\sin^2\psi},$$
$$n_0 = \mathrm{R}\cos\psi - \sqrt{r^2 - \mathrm{R}^2\sin^2\psi};$$

d'où

$$\frac{n_1^2 - n_0^2}{2} = 2\mathrm{R}\cos\psi\sqrt{r^2 - \mathrm{R}^2\sin^2\psi},$$
$$\frac{n_1^2 + n_0^2}{2} = 2\mathrm{R}^2\cos^2\psi + r^2 - \mathrm{R}^2.$$

La deuxième intégration se fera sur les expressions

$$\frac{\varpi}{g} z.2\mathrm{R}\, d\psi \cos^3\psi \sqrt{r^2 - \mathrm{R}^2\sin^2\psi},$$
$$\frac{\varpi}{g} z.d\psi \cos^2\psi (2\mathrm{R}^2\cos^2\psi + r^2 - \mathrm{R}^2).$$

Pour celle qui est affectée d'un radical, nous poserons

$$\sin\psi = u, \quad \cos\psi.d\psi = du, \quad \cos^2\psi = 1 - u^2.$$

ce qui transforme la différentielle à intégrer dans cette autre équivalente,

$$\frac{\varpi}{g} z.2\mathrm{R}\, du\,(1 - u^2)\sqrt{r^2 - \mathrm{R}^2 u^2},$$

ou

$$\frac{\varpi}{g} z.2\mathrm{R}\, du \frac{(1 - u^2)(r^2 - \mathrm{R}^2 u^2)}{\sqrt{r^2 - \mathrm{R}^2 u^2}}.$$

Les limites de la variable étant

$$\psi_1 = +\arcsin\frac{r}{\mathrm{R}}, \quad \psi_0 = -\arcsin\frac{r}{\mathrm{R}},$$

celles de u seront

$$u_1 = \sin\psi_1 = \frac{r}{\mathrm{R}}, \quad u_0 = \sin\psi_0 = -\frac{r}{\mathrm{R}};$$

intégrant enfin et observant que l'on a

$$\int_{u_0}^{u_1} \frac{du}{\sqrt{r^2 - R^2 u^2}} = \frac{\pi}{R},$$

$$\int_{u_0}^{u_1} \frac{u^2\, du}{\sqrt{r^2 - R^2 u^2}} = \frac{1}{2}\frac{r^2}{R^2} \cdot \frac{\pi}{R},$$

$$\int_{u_0}^{u_1} \frac{u^4\, du}{\sqrt{r^2 - R^2 u^2}} = \frac{3}{4}\frac{r^2}{R^2} \cdot \frac{1}{2}\frac{r^2}{R^2} \cdot \frac{\pi}{R},$$

il vient, après toute réduction,

$$\sum dm \cos^2 \psi = \frac{\varpi}{g}\, z \,.\, 2R \,.\, \frac{\pi r^2}{8R^3}\,(4R^2 - r^2);$$

puis enfin,

$$F = \frac{\varpi}{g}\, z \pi r^2 \frac{V^2}{R} \cdot \frac{r^2}{4R^2}.$$

La valeur du coefficient k est ici $\frac{r^2}{4R^2}$. Différentions F par rapport à r, nous aurons la valeur de F pour un anneau d'épaisseur dr infiniment petite et de la largeur uniforme z, ayant r pour rayon. Cette valeur est donnée par la formule

$$\frac{dF}{dr} = \frac{\varpi}{g}\, z\, 2\pi r \frac{V^2}{R} \cdot \frac{1}{2}\frac{r^2}{R^2},$$

ce qui donne pour k,

$$k = \frac{1}{2}\frac{r^2}{R^2}.$$

10. Tout ceci est limité au cas où le rayon du cylindre ne dépasse point le rayon de la roue. La seconde des expressions différentielles qui est relative au cas contraire, s'intègre facilement en observant que l'angle ψ a pour limites

$$\psi_1 = +\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \psi_0 = -\frac{\pi}{2};$$

d'ailleurs, on sait que

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2\psi\, d\psi = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^4\psi\, d\psi = \frac{3}{4}\frac{\pi}{2};$$

il en résulte

$$\sum \cos^2\psi\, dm = \frac{\varpi}{g} z \frac{\pi}{2}\left(r^2 + \frac{1}{2}R^2\right),$$

et finalement

$$F = \frac{\varpi}{g} z\pi r^2 \frac{V^2}{R}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\frac{R^2}{r^2}\right);$$

on en tire

$$\frac{dF}{dr} = \frac{\varpi}{g} z \,.\, 2\pi r \frac{V^2}{R} \cdot \frac{1}{2}.$$

Les valeurs de k données par ces deux dernières formules, et celles fournies par les précédentes ont pour maximum la fraction numérique $\frac{1}{2}$. Ce maximum est très remarquable, en ce que l'on a toujours, en désignant par M_e la masse des parties extérieures au cylindre de rayon R, et par F_e l'effort correspondant,

$$F_e = \frac{1}{2} M_e \frac{V^2}{R} = \frac{1}{2}\frac{P}{g} \cdot \frac{V^2}{R}.$$

11. Si l'on avait à calculer F pour une sphère, on partirait du coefficient $\frac{dF}{dr}$ établi plus haut pour des anneaux cylindriques. Au moyen de la relation géométrique qui existe entre les cordes d'une sphere et leurs distances au centre, on substituerait dans ce coefficient la valeur de z en fonction de r. En intégrant et regardant $\frac{\varpi}{g}$ comme une quantité constante, on obtiendrait l'expression de l'effort F relatif à une sphere homogène, d'où l'on passerait, comme dans le cas des cylindres, au coefficient différentiel $\frac{dF}{dr}$ relatif à une couche sphérique homogene. Il suffirait ensuite de supposer ϖ variable avec r dans le nouveau coefficient différentiel pour arriver à l'expression de l'effort F dû au mouve-

ment d'une sphère dont la densité varierait de la surface au centre, suivant une loi donnée.

Toutefois il sera nécessaire, dans chaque cas particulier, de rechercher la position de l'axe instantané du mobile. S'il se trouvait dans l'intérieur de celui-ci, il faudrait le partager en deux par une surface cylindrique ayant pour axe l'*essieu* et pour rayon la distance de celui-ci à l'axe instantané. On traiterait séparément les deux parties du solide, ainsi qu'il a été expliqué précédemment pour un cylindre homogène.

12. Nous venons d'esquisser la marche à suivre dans divers cas d'application; présentons maintenant un exemple numérique de l'emploi de nos formules.

Les roues employées dans l'industrie des transports sont ordinairement trop chargées pour arriver à un état tel qu'elles ne pressent plus le sol sur lequel elles roulent. Néanmoins, comme on peut obtenir sur les chemins de fer d'assez grandes vitesses, il est intéressant de rechercher si les waggons se trouvent encore éloignés des singulières conditions mises en évidence dans nos calculs.

13. Une roue de waggon se compose ordinairement d'une jante cylindrique réunie, par des rais symétriquement placés, à une boîte destinée à recevoir l'essieu. La jante est entourée d'un rebord saillant qui a pour objet d'empêcher le véhicule de sortir de la voie. Dans une approximation, nous supposerons cylindriques le rebord, les rais, la boîte de l'essieu et l'essieu lui-même. De plus, pour éviter toute difficulté relativement aux rais, nous concevrons qu'ils soient remplacés par un solide de révolution dont la section cylindrique autour de l'essieu soit équivalente à la leur. De cette manière, la question sera simplifiée et se résoudra sans peine.

Nommons à cet effet :

R_0 le rayon extérieur du rebord et c sa largeur;

R le rayon de la roue;

r_0 le rayon intérieur de la jante et c_0 sa largeur;

r_1 le rayon extérieur de la boîte de l'essieu et c_1 sa largeur;

r_2 le rayon de l'essieu et c_2 sa demi-longueur;

N le nombre des rais et A la section de l'un d'entre eux.

Calculons maintenant les efforts auxquels donnent lieu les différentes parties de la roue.

L'effort dû au rebord saillant doit être tiré de la formule

$$\frac{dF}{dr} = \frac{\varpi}{g} z 2\pi r \frac{V^2}{R} \times \frac{1}{2},$$

dans laquelle on posera $z = c$, $r = R_0$. L'intégrale prise entre R_0 et R, a pour expression,

$$\frac{\varpi}{g} c \frac{V^2}{R} \pi \left(\frac{R_0^2 - R^2}{2} \right).$$

Les efforts dus à la jante, à la boîte de l'essieu et à l'essieu lui-même, calculés par la formule

$$\frac{dF}{dr} = \frac{\varpi}{g} z 2\pi r \frac{V^2}{R} \times \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2},$$

sont, pour la jante,

$$\frac{\varpi}{g} c_0 \frac{V^2}{R} \pi \left(\frac{R^4 - r_0^4}{4R^2} \right);$$

pour la boîte de l'essieu,

$$\frac{\varpi}{g} c_1 \frac{V^2}{R} \pi \left(\frac{r_1^4 - r_2^4}{4R^2} \right);$$

et pour l'essieu,

$$\frac{\varpi}{g} c_2 \frac{V^2}{R} \pi \left(\frac{r_2^4}{4R^2} \right).$$

Enfin pour les rais, ou plutôt pour le solide de révolution qui en tient lieu par hypothèse, on a

$$2\pi r z = NA,$$

d'où

$$\frac{dF}{dr} = \frac{\varpi}{g} NA \frac{V^2}{R} \cdot \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2};$$

de là on tire, pour l'effort dû aux rais,

$$\frac{\varpi}{g} NA \frac{V^2}{R} \cdot \left(\frac{r_2^3 - r_1^3}{6R^2} \right);$$

faisant la somme de ces efforts partiels, on a enfin

$$F = \frac{\varpi}{g} \cdot \frac{V^2}{R} \pi \left(c \frac{R_0^2 - R^2}{2} + c_0 \frac{R^4 - r_0^4}{4R^2} + c_1 \frac{r_1^4 - r_2^4}{4R^2} + c_2 \frac{r_2^4}{4R^2} + \frac{NA}{\pi} \cdot \frac{r_0^6 - r_1^6}{6R^2} \right).$$

14. Pour les roues des waggons employés sur les divers chemins, on peut prendre les nombres suivants :

$$R_0 = 0^m,47, \quad c = 0^m,03, \quad R = 0^m,45, \quad r_0 = 0^m,42, \quad c_0 = 0,10.$$
$$r_1 = 0^m,08, \quad c_1 = 0^m,16, \quad r_2 = 0,03, \quad c_2 = 0,80,$$
$$A = 0^{m.q},0014, \quad N = 12.$$

Avant d'appliquer ces nombres, nous modifierons un peu la forme de F en l'écrivant de cette manière,

$$F = \frac{\varpi}{g} \cdot \frac{V^2}{R^3} \cdot \frac{\pi}{4} \left[2c(R^2 R_0^2 - R^4) + c_0(R^4 - r_0^4) + c_1(r_1^4 - r_2^4) + c_2 r_2^4 + 4 \frac{NA}{6\pi}(r_0^6 - r_1^6) \right].$$

On trouve par le calcul

$$F = \frac{\varpi}{g} \cdot \frac{V^2}{R^3} \cdot \frac{\pi}{4} (0,000223560 + 0,000986929 + 0,000006424 + 0,000000648 + 0,000026301),$$

ou

$$F = \frac{\varpi}{g} \cdot \frac{V^2}{R^3} \cdot \frac{\pi}{4} \times 0,001243791.$$

Les nombres mis dans la parenthèse répondent respectivement aux quantités littérales placées dans l'expression de F. C'est à dessein que nous les avons isolés d'abord; le lecteur aura ainsi sous les yeux la mesure de l'influence particulière de chaque partie de la roue. Celle des parties centrales est presque nulle.

Nous pouvons supposer que l'on a $\varpi = 7202$, valeur qui se rapporte au fer fondu, et $g = 9,81$. D'après cela, on peut écrire

$$F = 7,87\, V^2;$$

pour chaque valeur de V, la valeur correspondante de F exprimera en kilogrammes l'intensité de la force qui tend à soulever la roue.

Un waggon chargé, pesant P kilogrammes, n'exerce donc contre les

rails que la pression P diminuée de l'effort 4F dû aux quatre roues, c'est-à-dire

$$(\tfrac{1}{4}P - 7{,}87\,V^2)^{kil.},$$

sur chaque point d'appui. Soit $P = 4000$; cherchons à quelle vitesse il n'y aurait plus de pression. Cette vitesse serait

$$V = \sqrt{\frac{1000}{7{,}87}};$$

c'est un peu plus de 11 mètres par seconde.

Pour un waggon vide du poids de 1000 kilogrammes, il suffit d'une vitesse de 5 mètres environ.

15. Aucune expérience n'a été faite dans le but de vérifier ces résultats de la théorie, car il ne paraît pas qu'on les ait soupçonnés jusqu'à présent. Un seul fait peut être cité à l'appui : nous voulons parler de la facilité avec laquelle les waggons oscillent transversalement aux rails.

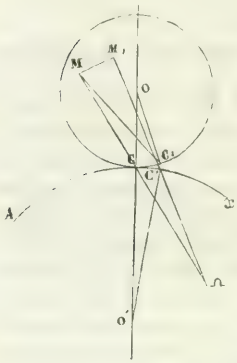
On ne peut s'empêcher de demander ce qui arrive lorsque la vitesse d'un waggon rend sa pression sur les rails *négative*. Supposons, s'il est possible, qu'un waggon s'élève d'une petite quantité au-dessus des rails. La vitesse de rotation des roues n'augmentera plus puisque le frottement à leur circonférence aura cessé d'avoir lieu. Les roues continueront donc à tourner en vertu de leur vitesse acquise, et lorsque celle-ci aura diminué d'une petite quantité, l'effort vertical qui soulevait le waggon ne sera plus assez considérable pour produire cet effet : c'est-à-dire qu'il n'y aura jamais de soulèvement sensible.

Arrêtons-nous dans ces déductions; c'est au lecteur qu'il appartient d'en provoquer de nouvelles et d'expliquer ce qu'elles pourront avoir de paradoxal. Nous allons reprendre la théorie générale de l'action des forces centrifuges; l'analyse détaillée qui précède était nécessaire pour établir d'une manière nette et rigoureuse des formules qui exciteraient au moins le doute si elles étaient annoncées sans cette précaution. Dégagé maintenant de l'obligation d'être minutieux, notre marche sera plus rapide et plus simple à la fois.

16. Jusqu'à présent l'hypothèse d'un chemin en ligne droite, sur lequel roule une circonférence de cercle, a servi de base à nos calculs; mais on conçoit qu'il pourrait avoir une courbure quelconque. Pour

montrer comment on peut apprécier l'influence de cette circonstance, nous supposerons que le chemin est une courbe plane comprise tout entière dans un plan perpendiculaire à l'essieu du mobile. On pourra regarder celui-ci comme roulant à chaque instant sur un chemin circulaire de la courbure qui a lieu au point où se trouve l'axe instantané de rotation. Le problème consistera uniquement à obtenir la valeur du rayon de courbure de la trajectoire d'un point matériel quelconque.

Conservons toujours les mêmes dénominations; nommons R′ le rayon de courbure CO′ du chemin ACx au point C. A partir de celui-ci portons les arcs infiniment petits CC_1, CC′ du même côté sur la circonférence de la roue et sur le chemin parcouru. En passant de la position actuelle à la position voisine, la roue amènera le point C_1 à coïncider avec C′. Alors la ligne MC_1 rencontrera quelque part la normale MC suffisamment prolongée à une distance de M *égale au rayon cherché,* puisque le point de rencontre ainsi obtenu appartiendra à deux normales infiniment voisines. La quantité angulaire dont la ligne MC_1 aura tourné pour arriver à sa nouvelle position M_1 C′, a pour mesure la somme des angles CMC_1 et $C\Omega C_1$, ou, en posant $CC_1 = CC' = ds$,



$$\frac{ds \cos \psi}{n} + \frac{ds \cos \psi}{\varrho - n}.$$

Le rayon OC_1 qui forme avec MC_1 un angle constant, aura tourné de la même quantité angulaire, laquelle a pour mesure la somme des angles COC_1 et CO′C′, c'est-à-dire

$$\frac{ds}{R} + \frac{ds}{R'}.$$

Égalant ces deux expressions, il vient

$$\cos \psi \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{\varrho - n} \right) = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'}.$$

Si la courbure au point C du chemin était en sens contraire de celle que nous avons supposée, c'est-à-dire si le centre du cercle osculateur tombait du même côté de l'axe instantané que le centre de la roue, on aurait

$$\cos\psi\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{\varrho-n}\right)=\frac{1}{R}-\frac{1}{R'},$$

relation qui ne diffère de la précédente qu'en ce que le signe de R′ y est changé. Ceci une fois entendu, nous aurons

$$\rho=\frac{n^2\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)}{\cos\psi-n\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)},$$

valeur qui reproduit celle que nous avons obtenue au commencement de ce Mémoire, lorsqu'on y fait $\frac{1}{R'}=0$.

17. On a également

$$\int\cos\psi=-dm\,\frac{V^2}{R^2}\,\frac{\cos\psi\left[\cos\psi-n\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)\right]}{\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}},$$

$$F=M\frac{V^2}{R^2}\left[1-\frac{1}{M\left(1+\frac{R}{R'}\right)}\sum dm\cos^2\psi\right],$$

expressions dont nous avons étudié déjà un cas particulier. Elles donneront lieu à une discussion analogue, mais avec des circonstances plus variées, à cause du nouvel élément introduit dans la question.

Les points pour lesquels $\int=0$ ont pour lieu géométrique la circonférence de cercle dont la relation

$$\cos\psi-n\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)=0$$

est l'équation polaire. Pour tous les points extérieurs, et d'un même côté de la tangente en C, la quantité $\cos\psi-n\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)$ est négative et $\int\cos\psi$ positif. Dans l'intérieur de cette circonférence, et de l'autre

côté de la tangente, le contraire a lieu. Le diamètre de celle-ci est moindre que le rayon R. Sa valeur

$$\frac{1}{\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}}=\frac{R}{1+\frac{R}{R'}}$$

diminue en même temps que R′.

18. Si nous écrivons

$$F=kM.\frac{V^2}{R},$$

on voit que le coefficient k augmente à mesure que R′ diminue. Sa valeur, lorsque R′ est donnée, atteint son maximum et reste la même pour les points du mobile dont la distance à l'essieu atteint ou dépasse celle qui sépare celui-ci de l'axe instantané de rotation. On devra donc, dans les applications, établir une distinction fondée sur la distance des différents points du solide à son axe de figure; les formules à employer pour l'intégration différeront suivant que cette distance sera moindre ou plus grande que R.

19. Lorsque R′ est négatif, c'est-à-dire lorsque le centre de courbure du chemin et l'essieu du mobile se trouvent d'un même côté par rapport à l'axe instantané, on a

$$\int\cos\psi=-dm.\frac{V^2}{R}.\frac{\cos\psi\left[\cos\psi-n\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}\right)\right]}{\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}},$$

et

$$F=M.\frac{V^2}{R}\left[1-\frac{1}{M\left(1-\frac{R}{R'}\right)}\sum dm.\cos^2\psi\right].$$

Tant que l'on a $R'>R$, le lieu géométrique des points pour lesquels on a $\int\cos\psi=0$ est une circonférence de cercle dont l'équation polaire est

$$\cos\psi-n\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}\right)=0,$$

et dont le diamètre

$$\frac{1}{\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}}=\frac{R}{1-\frac{R}{R'}}$$

est constamment supérieur à R. Il augmente à mesure que le rapport $\frac{R}{R'}$ approche de devenir égal à l'unité. Lorsque cette circonstance arrive, la circonférence embrasse toutes les parties de l'espace situées d'un même côté de la tangente au point de contact de la roue avec le chemin. La valeur de $\cos\psi$ demeurant positive pour tout point compris dans le lieu géométrique, et celle de $\cos\psi - n\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}\right)$ demeurant aussi positive, celle de $f\cos\psi$ est négative. Elle l'est également pour tous les points qui se trouvent de l'autre côté de la tangente, tandis que dans tout autre lieu de l'espace on a $f\cos\psi > 0$.

Quant à la valeur de F, dans le cas qui nous occupe, elle peut être positive, nulle ou négative, suivant la valeur du rapport $\frac{R}{R'}$. Lorsque $\frac{R}{R'}=1$, le coefficient k devient l'infini négatif. Mais alors aussi, comme on a nécessairement $V=0$, il en résulte $F=0$.

20. Lorsque R surpasse R′, l'équation polaire

$$\cos\psi + n\left(\frac{1}{R'}-\frac{1}{R}\right)=0$$

est encore celle d'une circonférence de cercle qui ne se trouve plus du même côté que l'essieu par rapport à l'axe instantané. Son diamètre

$$\frac{1}{\frac{1}{R'}-\frac{1}{R}}=\frac{R}{\frac{R}{R'}-1}$$

diminue avec R′. Pour tous les points qui s'y trouvent renfermés, la valeur de $\cos\psi + n\left(\frac{1}{R'}-\frac{1}{R}\right)$ est négative, et celle de $\cos\psi$ l'est aussi. On a donc $f\cos\psi < 0$ pour ces points. Il en est de même pour ceux qui se trouvent avec l'essieu de l'autre côté de la tangente. Les autres donnent $f\cos\psi > 0$.

A l'égard de F, on remarquera que le facteur

$$k = 1 + \frac{1}{M\left(\frac{R}{R'} - 1\right)} \sum \cos^2 \psi . dm,$$

susceptible, pour chaque valeur de R′, d'un maximum analogue à ceux des cas traités précédemment, varie en outre avec R′ de manière à prendre telle valeur que l'on voudra au-dessus de l'unité. Ce n'est pas que l'on puisse rendre F aussi grand que toute quantité donnée, car nous avons vu que pour $R = R'$, k étant infini, F est cependant nul.

21. Notre Mémoire serait incomplet si, après avoir montré le rôle que jouent les forces centrifuges dans quelques cas particuliers, nous négligions d'appliquer des considérations analogues au mouvement le plus général d'un solide.

Le lecteur aura remarqué l'emploi continuel de l'axe instantané de rotation dans les relations que nous avions à établir. Cet axe devant être en quelque sorte la base de nos recherches, nous allons tâcher de le définir, et montrer comment on peut le découvrir lorsque le mouvement d'un solide est connu. Il suffira pour cela de rappeler quelques propositions fondamentales de la mécanique et de les ramener par des transformations convenables à des énoncés d'une forme plus appropriée au sujet que nous avons traité.

22. Les géomètres voient, dans le mouvement le plus général d'un corps solide, deux circonstances bien distinctes qui le caractérisent en chaque instant : *une translation dans une certaine direction et une rotation autour d'un certain axe*. L'illustre auteur de la *Mécanique analytique*, guidé par l'interprétation la plus naturelle des formules du mouvement, avait considéré la translation de tous les points du corps dans la direction où se meut son centre de gravité et leur rotation autour d'un axe passant par ce point, comme les éléments le plus simplement définis dans lesquels se décompose tout déplacement infiniment petit.

Dans ces derniers temps, M. Chasles a fait voir qu'il existe toujours pour un corps qui se déplace, une ligne droite qui, si elle lui était attachée, ne ferait que glisser dans le sens de sa longueur; de manière que le mouvement, sous ce nouveau point de vue, se compose à chaque ins-

tant d'une translation et d'une rotation dans la direction et autour d'une même ligne. Le corps peut donc être représenté *comme un écrou tournant autour d'une vis*. Cette comparaison, due au même savant, donne également l'idée la plus claire de ce qui se passe; l'axe de la vis a été nommé *l'axe instantané de rotation*.

Les différents points d'un solide qui se meut parcourent donc à chaque instant des hélices ou plutôt des courbes qui leur sont tangentes et ont les mêmes plans osculateurs sans avoir les mêmes rayons de courbure. Toutefois ceux-ci sont dirigés perpendiculairement à l'axe instantané de rotation; et si nous revenons aux forces centrifuges, on voit qu'elles le sollicitent directement. De sorte que la connaissance de cet axe est d'abord indispensable pour se rendre compte du jeu des forces dues au mouvement général considéré seulement sous le rapport de la rotation, car nous montrerons que la translation qui l'accompagne est sans influence sur le résultat.

23. Admettons que le lecteur sait décomposer le mouvement en *translation du centre de gravité et rotation autour d'un axe passant par ce point;* et concevons le mobile partagé en filets à cette ligne. Tous les filets conserveront la même direction pendant le déplacement, et leurs projections sur un plan perpendiculaire à cette commune direction, formeront une figure plane invariable de forme mobile dans son propre plan. Or on sait (*Journal de Mathématiques*, tome III, page 488) que l'un des points d'une telle figure *demeure immobile pendant le mouvement*. A ce point correspond évidemment une file de molécules présentant les propriétés de l'axe instantané de rotation. Celui-ci peut se trouver en dehors du mobile, mais on doit en faire la recherche comme si tous les points de l'espace y étaient attachés invariablement.

Ceci bien compris, nommons V la vitesse du centre de gravité, ω la vitesse de rotation autour de l'axe relatif à ce point, et A l'angle compris entre cet axe et la direction de la vitesse V. Celle-ci, estimée suivant un plan perpendiculaire à l'axe, est donnée par l'expression V sin A.

Il est aisé de voir que tous les points compris dans un plan normal à la projection de la trajectoire du centre de gravité se meuvent, par le seul effet de la rotation, dans des directions parallèles, perpendiculaires à ce plan, mais semblables ou opposées, selon la position des points que l'on considère. Parmi ceux qui prennent ainsi un mouvement contraire

à celui du centre de gravité, abstraction faite de la translation dans le sens des filets parallèles, on distinguera spécialement le filet dont la distance R à l'axe de rotation a pour valeur

$$R = \frac{V \sin A}{\omega}$$

Les points qui le composent ayant d'une part, la vitesse $V \sin A$ du centre de gravité, et d'autre part, la vitesse $R\omega$ en sens contraire, ces deux vitesses s'annulent en vertu de la relation précédente. On en conclut que ces points sont situés sur l'*axe instantané de rotation*, tel que nous l'avons défini d'après l'idée de M. Chasles.

24. Conservant les dénominations adoptées au commencement de cet écrit, nous appellerons par les mêmes lettres affectées de l'indice zéro la force centrifuge, le rayon de courbure, et la vitesse de chaque point matériel, lorsqu'on fait abstraction du glissement le long de l'axe instantané. Nous aurons ainsi

$$f_0 = dm \frac{V_0^2}{\varrho_0},$$

$$f = dm \frac{V^2}{\varrho};$$

on a évidemment

$$v = \frac{V_0}{\sin A}.$$

A l'égard des rayons ρ, ρ_0, il existe entre eux une relation fort simple. Le petit arc auquel appartient le rayon ρ_0 est transformé sur une surface cylindrique du même rayon en arc d'hélice dont le rayon de courbure est donné par l'expression

$$\rho = \frac{1}{\varrho_0}\left(\frac{\varrho_0}{\sin A}\right)^2 = \frac{\varrho_0}{\sin^2 A}.$$

Substituant les valeurs de v et de ρ ainsi obtenues dans celle de f, il vient

$$f = dm \frac{V_0^2}{\varrho_0}.$$

Ainsi l'*action des forces centrifuges est indépendante du glissement le long de l'axe instantané de rotation.*

25. Pour obtenir la résultante générale de ces actions, il n'y aura donc qu'à déterminer les rayons de courbure des trajectoires et la vitesse du centre de gravité du mobile, estimée suivant un plan perpendiculaire à l'axe instantané de rotation.

A cet effet, nous adopterons pour plans coordonnés :

1°. Le plan mené par le centre de gravité et par l'axe instantané;

2°. Le plan passant par l'axe instantané, perpendiculaire au premier;

3°. Enfin un plan perpendiculaire aux deux autres mené par le centre de gravité du mobile.

Les intersections de ce troisième plan avec le second et le premier seront prises pour axes des x et des z; l'axe des y sera l'axe de rotation.

Les composantes de la force centrifuge dont chaque point est animé seront alors dans le sens des axes des coordonnées

$$dm\frac{V^2}{\varrho}\sin\psi, \qquad dm\frac{V^2}{\varrho}\cos\psi,$$

pour les x et les z; elles sont nulles pour l'axe des y.

Leurs moments seront nuls pour les plans des xy et des zy. Mais pour le plan des xz, ils auront respectivement pour valeurs

$$dm\frac{V^2}{\varrho}y\sin\psi, \qquad dm\frac{V^2}{\varrho}y\cos\psi.$$

Les intégrales de ces différentes expressions donneront la grandeur et le point d'application de chacune des résultantes. Il arrivera, dans le cas le plus général, que les forces centrifuges produiront un couple tendant à dévier l'axe instantané de sa direction.

26. Les vitesses se déduiront de celle du centre de gravité ou plutôt de celle de sa projection sur le plan des xz; on aura pour tous les points la relation

$$v = \frac{V}{R}n.$$

Quant aux rayons de courbure, ils dépendront de la nature du mouvement imprimé au corps. Imaginons trois axes qui lui soient invariablement attachés et qui le suivent dans l'espace; si l'on conçoit qu'à chaque instant l'axe instantané de rotation soit rapporté à ces trois axes, on ob-

tiendra un lieu géométrique des axes instantanés. Cette surface emportera avec elle le caractère particulier du mouvement; les lignes fixes auxquelles on la rattache pourront être choisies à volonté; les axes principaux de l'inertie qui passent par le centre de gravité simplifieront souvent, si on les adopte, cette recherche qui n'a rien en soi de compliqué.

D'autre part, il conviendra de rapporter à d'autres lignes fixes dans l'espace le lieu géométrique des axes instantanés de rotation. La seconde surface que l'on obtiendra de cette manière, permettra de représenter le mouvement tel qu'il aura eu lieu dans chaque instant. Il suffira de les mettre en contact suivant une génératrice qui soit la même sur les deux surfaces. La première, si elle applique successivement toutes ses génératrices sur celles de la seconde, en glissant le long de chacune d'elles d'une quantité convenable, prendra exactement les positions qu'elle doit occuper dans l'espace. Si l'on réalisait les deux lieux géométriques, en ayant soin de marquer sur chaque génératrice le point le plus rapproché du centre de gravité, la suite de ces points formerait pour chaque surface une courbe; on aurait l'exacte représentation du mouvement en maintenant le contact entre la surface mobile et la surface fixe, de manière que les deux courbes se coupent constamment sur l'axe instantané de rotation.

Telle est la marche à suivre pour analyser le mouvement d'un mobile dans le cas le plus général. Une fois ce résultat obtenu, il n'est pas difficile d'arriver aux rayons de courbure des trajectoires. Toutefois, ce problème ne pouvant être résolu qu'en traduisant en formules ce qui vient d'être dit, nous n'irons pas plus loin dans cette recherche.

27. Terminons par quelques mots sur les modifications que subissent nos formules, lorsque après avoir analysé le mouvement et déterminé l'axe instantané ainsi que les forces centrifuges dans un système, on reconnaît que ce système est entraîné tout entier dans une commune direction. Telle serait, pour la surface de la Terre, la rotation diurne de ce globe, combinée avec sa translation annuelle autour du Soleil, et même avec un mouvement général du système solaire. Concevons un point matériel mobile dans une circonférence autour d'un certain axe, et supposons que le centre de cette circonférence est emporté dans une certaine direction. On a démontré précédemment (**23**) qu'en nommant A l'angle compris entre l'axe de la rotation et la direction du mouvement imprimé

au système, les autres dénominations étant d'ailleurs conservées, l'axe instantané se trouve à la distance

$$R = \frac{V \sin A}{\omega}$$

de l'axe donné; qu'il lui est parallèle et rencontre celui des diamètres de la circonférence qui est perpendiculaire à la projection faite sur son plan, de la trajectoire parcourue par son centre.

Nous avons vu que la valeur de R a une grande influence sur la valeur de la force F. Lorsqu'elle est très grande relativement aux dimensions du mobile que l'on considère, on a, à très peu près,

$$\sum dm \cos^2 \psi = M;$$

et l'on conçoit que cette circonstance puisse contribuer à rendre insensibles les effets de la force F.

Ces conséquences ressortent mieux de la formule

$$F = M \frac{V^2}{R} \left(1 - \frac{1}{M} \sum dm \cos^2 \psi \right),$$

lorsqu'on la met sous la forme

$$F = M \omega V \sin A \left(1 - \frac{1}{M} \sum dm \cos^2 \psi \right).$$

En nous arrêtant ici, nous ne devons point dissimuler combien les conclusions de nos formules nous inspirent peu de confiance dans leur exactitude par leur singularité. En les publiant nous comptons que des esprits auxquels la mécanique sera plus familière, donneront l'explication de ce qu'il y a de paradoxal dans cet écrit. Nous avons été réservé sur les applications : quelque intérêt à cet égard que présente le système du monde, une semblable étude sortirait des limites de notre cadre; aussi ne faisons-nous que l'indiquer.

NOTE

SUR LES ENGRENAGES DE WHITE;

PAR TH. OLIVIER [*].

La démonstration relative aux engrenages de White, que M. Delaunay vient de publier dans ce Journal, n'est pas nouvelle. Cette démonstration est la première qui se soit présentée à mon esprit lorsque j'ai commencé à m'occuper de la théorie des engrenages. Je l'ai communiquée à plusieurs personnes, et en particulier à M. Arago, lorsqu'il était chargé du Cours de Machines à l'École polytechnique. Enfin je m'en suis constamment servi dans mes leçons à l'École centrale, depuis 1829. On ne peut en effet imaginer rien de plus simple quand il s'agit seulement de faire voir que les engrenages de White ont, en effet, les propriétés que leur attribuait ce mécanicien. C'est à cause de cette simplicité même que je tiens à mon droit de priorité. Ce droit, je l'établirai d'une manière incontestable par l'extrait suivant d'un Mémoire que j'ai composé en 1817, à l'École d'application de Metz, et qui a été visé (ainsi que le sont les travaux des élèves sous-lieutenants) par les officiers placés alors à la tête de l'École.

Extrait du Mémoire sur le projet de machine. — (École de Metz.)

« La première idée qui conduit à l'engrenage de White est celle-ci.

» Considérons l'engrenage composé d'une crémaillère et d'un pignon.

» Supposons la crémaillère composée de m bandes dentées réunies ensemble et de manière à ne former qu'une seule bande dentée; considérons le pignon comme composé aussi de m rondelles dentées; donnons à chaque rondelle du pignon un mouvement proportionnel de ro-

[*] Cette Note, accompagnée des pièces justificatives, a été communiquée à la Société Philomatique, dans sa séance du 21 mars 1840.

tation autour de l'axe et à chaque bande de la crémaillère un mouvement de translation correspondant à celui de la rondelle qui est chargée de la conduire.

» On voit qu'après ce mouvement, les extrémités des dents formeront une série d'hélices sur le cylindre du pignon et des lignes droites parallèles entre elles et obliques sur la crémaillère, et ce système se conduira parfaitement.

» Mais de cette idée on est conduit à cette conséquence, que vu le grand nombre de ces bandes dentées et des rondelles dentées (ou pignons) correspondantes, on peut diminuer la longueur des dents dans chaque système, et la diminuer d'autant plus, que le nombre des bandes sera plus grand; et en effet, la longueur de la dent n'est nécessaire que pour que, vu l'écartement des dents, lorsqu'une dent quitte, une nouvelle puisse prendre, et elle doit se mettre en prise un peu avant, et cela, pour qu'il n'y ait pas d'interruption dans le mouvement de rotation, ni de perte de temps; mais l'on voit que si la première dent de la première bande quitte, et que la deuxième dent de cette même bande ne puisse encore se mettre en prise, la première dent de la deuxième bande n'aura pas encore quitté, et ainsi de suite. De sorte que de proche en proche, on voit que pendant tout le temps du mouvement, on aura des bandes qui, alternativement, conduiront et ne serviront pas à conduire le pignon, *et vice versâ*.

» On sait que la quantité de glissement qui s'opère sur une dent d'une première roue par la dent correspondante de la deuxième roue, peut être rendue aussi petite que l'on veut, en rognant la longueur des dents; par conséquent, plus on augmentera le nombre des bandes, plus on arrivera à avoir un engrenage parfait, un engrenage dans lequel le frottement ira toujours en diminuant.

» Enfin, la surface sur laquelle s'opère le frottement est réduite à un point, au premier point de contact des deux dents en prise, lorsque l'on suppose les bandes en nombre infini.

» Les dents ont donc changé de forme; auparavant, la courbe qui les terminait était contenue dans un plan perpendiculaire à l'axe du mouvement de rotation; maintenant cette courbe se réduit à la ligne formée par le premier point de chaque dent de ce nombre infini de bandes, en sorte que la forme de la dent a disparu, elle n'est plus né-

cessaire, puisque son premier point seul suffit pour obtenir la ligne de contact qui seule forme actuellement la dent, et cette ligne est tracée sur la surface extérieure du noyau à denter au moyen de la machine. Pour une crémaillère, cette ligne est une droite; pour une roue elle est une hélice tracée sur le cylindre noyau de la roue ou pignon.

» De plus, on voit que chaque point de la ligne de contact de la première surface a son homologue sur la ligne de contact correspondante de la seconde surface, et que ces points homologues se touchent, pour se quitter immédiatement en tendant à glisser l'un sur l'autre.

» Le frottement est donc ici l'effet d'un roulement des lignes de contact les unes sur les autres, ce qui donne le frottement le plus doux que l'on connaisse dans les arts : celui dit *de deuxième espèce*.

» De cette discussion nous conclurons : Que la forme primitive des dents ne doit plus être prise en considération, puisque le premier point de contact de chaque dent est seul nécessaire, le seul considéré et employé ;

» Que le mouvement est uniforme, puisque l'on est parti d'un mouvement uniforme qui dépendait alors de la figure de la dent, et qui ne dépend plus maintenant que de ce que les lignes de contact qui forment l'arête extrême des dents, se roulent sans se glisser. Et l'on voit évidemment que cet engrenage, par l'usage continuel, *le travail*, tendra nécessairement à se perfectionner.

» La figure des dents du nouvel engrenage est arbitraire; elle ne dépend plus que de la ténacité de la matière employée, etc... »

Metz, 1[illegible] août 1817

Si dans les deux Mémoires présentés à l'Institut en 1825, je n'ai pas consigné cette démonstration, c'est qu'elle n'est pas assez générale.

J'avais besoin d'un autre mode de démonstration pour bien faire voir que l'on pourrait, d'après les procédés mécaniques de White, construire trois espèces d'engrenages : le premier ayant un frottement de roulement direct, le second ayant un frottement de roulement angulaire, et le troisième ayant un frottement de glissement angulaire. White n'avait pas aperçu les frottements angulaires; je crois être le premier qui ait signalé ce genre de frottement.

La méthode que j'ai employée dans les Mémoires présentés à l'Institut, avait non-seulement l'avantage d'être vraiment géométrique et rigoureuse, mais encore celui de bien faire voir, sans aucun doute, que pour les engrenages cylindriques et coniques, le frottement de *roulement direct* existait lorsque la ligne ξ, lieu des contacts successifs de deux dents, était une droite située dans le plan des axes; et que le frottement de *roulement angulaire* existait lorsque cette droite ξ n'étant pas située dans le plan des axes; dans l'un et l'autre de ces deux cas, les distances de chacun des points de la droite ξ aux deux axes, étant toujours dans un rapport constant et inverse de celui des vitesses de ces deux axes.

Cette même méthode me permettait aussi de faire voir que le frottement de *glissement angulaire*, non-seulement existait toujours dans les engrenages cylindriques et coniques à la White, lorsque les distances des points de la droite ξ aux deux axes n'étaient pas dans le rapport inverse des vitesses des axes, mais qu'il fallait impérieusement, dans ce cas, que la droite ξ fût hors des plans des axes, pour que l'engrenage fût possible.

D'ailleurs, c'est par la considération des surfaces idéales et de révolution engendrées par la ligne ξ, lieu des contacts successifs de deux dents en prise, que j'ai pu établir le théorème qui, à mon avis, constitue toute la théorie géométrique des engrenages à la White, de ceux dans lesquels les surfaces des dents ne se mettent successivement en contact que par un seul point. Voici ce théorème.

Étant donnés : 1° deux axes A et A′ animés, le premier d'une vitesse v et le second d'une vitesse v'; 2° deux surfaces ζ et ζ' fixées, la première à l'axe A, la seconde à l'axe A′.

Si ces deux surfaces en tournant respectivement autour de l'axe auquel chacune se trouve liée, se mettent successivement en contact par un seul point m, m', m'',... lesquels points forment dans l'espace une courbe ξ dite *lieu des contacts successifs des surfaces de deux dents homologues ou en prise;*

En faisant tourner la courbe ξ autour des axes, on obtiendra deux surfaces de révolution, l'une Φ, fixée à l'axe A; l'autre Φ', fixée à l'axe A′.

Les deux surfaces Φ et ζ se couperont suivant une courbe δ, les deux

surfaces Φ' et ζ' se couperont suivant une courbe δ'; et l'on pourra remplacer les surfaces ζ et ζ' par les courbes δ et δ', en ce sens que si l'on regarde ces deux courbes comme rigides, elles se conduiront l'une par l'autre, ainsi que le faisaient les deux surfaces ζ et ζ'; et le frottement qui se manifestera pour les courbes δ et δ' sera de même nature que celui qui se développerait sur les deux surfaces ζ et ζ'.

Cela posé :

1°. Si les distances aux deux axes de tout point m de la courbe ξ sont dans le rapport inverse de celui des vitesses v et v', le rapport de ces vitesses étant supposé être constant, être le même à chaque instant du mouvement, le frottement sera de *roulement;*

2°. Si le rapport des distances aux axes n'est pas constant ou n'est pas inverse du rapport constant des vitesses, le frottement sera de *glissement;*

3°. Chaque point m de la courbe ξ engendre un cercle en tournant, soit autour de l'axe A, soit autour de l'axe A'; désignant par C et C' les cercles engendrés par le point m, et respectivement autour des axes A et A', il pourra arriver que C et C' soient tangents l'un à l'autre au point m, ou qu'ils se croisent en ce point m. Lorsque les deux cercles sont tangents, le frottement est *direct;* lorsque les deux cercles se croisent, le frottement est *angulaire;* car dans le premier cas, les courbes δ et δ' ont même tangente au point m; dans le second cas, ces courbes se croisent en ce point m.

4°. Si les deux cercles C et C' sont tangents, alors le point m et les deux axes sont dans un même plan; dans ce cas les deux axes et la courbe ξ seront dans un même plan; dès lors les deux surfaces Φ et Φ' seront tangentes l'une à l'autre, suivant la courbe ξ. Dans ce cas, on retombe sur les engrenages cylindriques et coniques, et la courbe ξ doit impérieusement être une droite, si l'on veut que le frottement de roulement existe, et dès lors le frottement est de *roulement direct.* On ne peut pas construire un engrenage à la White dans lequel le frottement soit de *glissement direct.*

5°. Si les deux cercles C et C' se croisent, alors les axes peuvent être dans un même plan ou non; le point m est hors du plan des axes dans le premier cas; les deux surfaces Φ et Φ', dans tous les cas, se couperont suivant la courbe ξ.

Le frottement sera donc, dans tous les cas, un frottement *angulaire*, car les courbes δ et δ' se croiseront au point m, et l'on pourra construire deux espèces d'engrenages : dans l'un le frottement sera de *roulement angulaire*, dans l'autre le frottement sera de *glissement angulaire;* et pour l'un et l'autre, les vitesses des axes seront dans un rapport constant.

Je crois devoir consigner ici une idée que j'ai eue depuis plusieurs années, et que j'ai communiquée à plusieurs personnes.

Il s'agit d'une espèce toute particulière d'engrenages à la White, et auxquels je donnai le nom d'engrenages à *tire-bouchon,* n'ayant pas trouvé d'expression qui fût mieux en rapport avec la forme de ces sortes d'engrenages.

En se rappelant ce qui a été dit précédemment et ce que j'ai développé dans la Note placée à la suite de mon premier Mémoire sur les engrenages de White, publié dans ce Journal, on voit que l'idée géométrique est de considérer les courbes δ et δ' intersections des surfaces ζ et ζ' de deux dents en présence, par les surfaces de révolution Φ et Φ' engendrées par la ligne ξ des points successifs de contact des deux dents autour des axes A et A′ des roues dentées, comme deux lignes rigides, et que l'on peut remplacer les surfaces ζ et ζ' par ces courbes δ et δ'.

Cette idée géométrique me paraît devoir être facile à réaliser en pratique, et cela en prenant des tiges cylindriques que l'on plierait suivant la forme des courbes δ et δ', et dès lors les surfaces ζ et ζ' ne seraient autres que les surfaces de ces tiges ainsi pliées.

Je développe mon idée.

Prenons l'engrenage cylindrique pour lequel les surfaces idéales et de révolution Φ et Φ' engendrées autour des axes seront deux cylindres se coupant suivant deux droites parallèles aux axes, dont l'une sera considérée comme étant la ligne ξ, lieu des contacts des dents. Les courbes δ et δ' seront deux hélices tracées, la première sur le cylindre Φ, la seconde sur le cylindre Φ', et ces deux courbes couperont chacune les génératrices du cylindre sur lequel elle se trouve tracée sous le même angle α.

On sait qu'alors les deux courbes δ et δ' se conduiront uniformément et avec un frottement de roulement angulaire.

Concevons que le premier axe A soit une tige fixée par son extrémité à une rondelle circulaire V, et que cette rondelle V soit divisée en un nombre de parties égales, et que de chaque division s'élance une tige δ cylindrique tout d'abord, mais pliée ensuite sous la forme d'une hélice cylindrique et coupant les génératrices du cylindre sous l'angle α. De sorte que cette tige héliçoïdale soit fixée à la rondelle V par une de ses extrémités, l'autre extrémité étant libre comme dans un tire-bouchon.

Imaginons la même chose pour le deuxième axe A'; mais lorsque l'on mettra l'engrenage en présence, il sera placé *tête-bêche*, c'est-à-dire que les extrémités libres des tiges héliçoïdales δ seront tournées vers la rondelle V' sur laquelle seront fixées les tiges héliçoïdales δ'; et réciproquement, les extrémités libres des tiges héliçoïdales δ' seront tournées vers la rondelle V sur laquelle seront fixées les tiges héliçoïdales δ.

Si l'on considère deux dents ou tiges héliçoïdales δ et δ' devant s'engrener ou se conduire, on peut facilement concevoir qu'elles s'agraffent l'une l'autre à la façon de deux anneaux d'une chaîne, de sorte que la tige δ tourne autour de la tige δ', son extrémité libre venant embrasser cette tige δ' près de la rondelle V', pour qu'ensuite, après un certain angle de révolution des axes, l'extrémité libre de δ' se dégage de la tige δ et près de la rondelle V.

On voit tout de suite que les tiges héliçoïdales, formées ainsi que nous l'indiquons, ne donneront point les surfaces géométriques rigoureuses qui se mettraient pendant le mouvement de rotation des axes en contact par des points qui se trouveraient rigoureusement situés sur la droite géométrique ξ.

On aura donc tout d'abord un frottement de glissement angulaire, et de plus, les vitesses des axes ne seront pas dans un rapport constant.

Mais le frottement de glissement sera très petit et les variations dans l'uniformité du mouvement des axes seront aussi très petites, de sorte que par un travail soutenu pendant quelque temps, les tiges δ et δ' s'useront réciproquement, et l'on arrivera à avoir un engrenage géométrique.

Ce que je viens de dire pour l'engrenage cylindrique s'applique évidemment à l'engrenage conique où les axes se coupent, et à l'engrenage hyperboloïdique où les axes ne sont pas situés dans un même plan.

Ici je dois faire une remarque qui n'est pas sans importance.

Lorsque dans un engrenage le frottement de glissement, qu'il soit direct ou angulaire, a lieu, les dents s'usent l'une par l'autre, se déforment et tendent à prendre la forme qui permettra au frottement de roulement direct ou angulaire, d'exister. Dans les engrenages ordinaires le profil des dents qui donne le frottement de roulement, n'est autre que les cercles primitifs; de sorte que par le travail, l'engrenage se détruit sans cesse.

Dans les engrenages à la White, le profil des dents est arbitraire. Il suffit que le point de contact de deux dents se meuve sur la ligne ξ; dès lors l'engrenage par le travail détruit sur les surfaces ζ et ζ' des dents, tout ce qu'il est nécessaire de détruire pour arriver à la ligne ξ.

Cette destruction opérée, l'engrenage n'en subsiste pas moins, en ce sens que les dents existent toujours, quoique leur forme primitive soit altérée par le travail, et perfectionnée et amenée par ce même travail à la forme géométrique voulue.

On conçoit dès lors que pour ces sortes d'engrenages il faut que l'exécution primitive laisse peu à faire au travail des dents, s'usant l'une par l'autre, afin que l'engrenage puisse être promptement livré en bon état et satisfaisant à la condition du frottement de roulement.

MÉTHODE SIMPLE ET NOUVELLE

POUR

LA DÉTERMINATION COMPLÈTE DES SOMMES ALTERNÉES,

FORMÉES AVEC LES RACINES PRIMITIVES DES ÉQUATIONS BINOMES;

PAR M. AUGUSTIN CAUCHY [*].

Il est, dans la théorie des nombres, une question qui, depuis plus de trente ans, a beaucoup occupé les géomètres, et qui, tout récemment encore, a été mentionnée dans plusieurs Notes publiées par divers membres de l'Académie. Elle consiste à déterminer complétement la somme alternée des racines primitives d'une équation binome, ou, ce qui revient au même, la somme de certaines puissances de ces racines, savoir, des puissances qui ont pour exposants les carrés des nombres inférieurs au module donné. Supposons, pour fixer les idées, que le module soit un nombre premier impair. Le carré de la somme dont il s'agit se réduira, au signe près, au module, et sera d'ailleurs positif ou négatif, suivant que le module divisé par 4, donnera pour reste 1 ou 3. C'est ce que M. Gauss avait reconnu dans ses recherches arithmétiques imprimées au commencement de ce siècle. Mais lorsque du carré de la somme on veut revenir à la somme elle-même, on a un signe à déterminer; et cette détermination, comme l'ont observé MM. Gauss et Dirichlet, est un problème qui présente de grandes difficultés. Les méthodes à l'aide desquelles on est parvenu jusqu'ici à surmonter cet obstacle, sont celles que M. Gauss a développées dans son beau Mémoire qui a pour titre : *Summatio serierum quarumdam singularium*, et celle que M. Dirichlet a déduite de la considération des intégrales définies [**]. En réflé-

[*] Cet article et le suivant sont extraits des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*.

[**] Voyez aussi un Mémoire de M. Lebesgue, qui vient de paraître dans ce Journal (février 1840).

chissant sur cette matière, j'ai été assez heureux pour trouver d'autres moyens de parvenir au même but; et d'abord il est assez remarquable que la formule de M. Gauss, qui détermine complétement les sommes alternées avec leurs signes, se trouve comprise comme cas particulier dans une autre formule que j'ai donnée en 1817 dans le *Bulletin de la Société Philomatique*. Cette dernière formule, qui parut digne d'attention à l'auteur de la *Mécanique céleste*, sert à la transformation d'une somme d'exponentielles dont les exposants croissent comme les carrés des nombres naturels; et, lorsqu'on attribue à ces exposants des valeurs imaginaires, on retrouve avec la formule de M. Gauss la loi de réciprocité qui existe entre deux nombres premiers. Mais la formule de 1817 était déduite de la considération des fonctions réciproques, par conséquent de théorèmes relatifs au calcul intégral; et ce que les géomètres apprendront sans doute avec plaisir, c'est que, sans recourir ni au calcul intégral, ni aux séries singulières dont M. Gauss a fait usage, on peut directement, et par une méthode fort simple, transformer en produit une somme alternée, en déterminant le signe qui doit affecter ce même produit. Cette méthode a d'ailleurs l'avantage d'être applicable à d'autres questions du même genre. Ainsi en particulier l'on reconnaîtra sans peine que, si, n étant un nombre premier, $n-1$ est divisible par 3, ou par 5, etc., un facteur primitif de n, correspondant au diviseur 3, sera proportionnel au produit de $\frac{n-1}{3}$ facteurs trinomes, tandis qu'un facteur primitif de n, correspondant au diviseur 5, sera proportionnel au produit de $\frac{n-1}{5}$ facteurs pentanomes ou composés chacun de cinq termes; et le rapport du produit en question au facteur primitif de n sera la somme de certaines racines de l'unité respectivement multipliées par des coefficients qui seront équivalents, suivant le module n, à des quantités connues. J'ajouterai que des formules relatives à la détermination complète d'une somme alternée, dans le cas où n est un nombre premier, on déduit aisément les formules analogues qui se rapportent au cas où n est un nombre composé quelconque, et la démonstration du théorème suivant lequel, dans une semblable somme, ou la plupart des termes positifs, ou la moitié de ces termes, doivent offrir des exposants inférieurs à $\frac{1}{2}n$.

§ Ier. *Valeurs exactes des sommes alternées des racines primitives d'une équation binome.*

Nommons ρ l'une des racines primitives de l'équation binome

$$(1) \qquad x^n = 1,$$

et Δ une somme alternée de ces racines, qui soit en même temps une fonction alternée des racines primitives de chacune des équations que l'on peut obtenir, en remplaçant n par un diviseur de n. Si n est un nombre impair dont les facteurs premiers soient inégaux, la valeur de Δ sera égale, au signe près, à celle que donne la formule

$$(2) \qquad \Delta = 1 + \rho + \rho^4 + \rho^9 + \ldots + \rho^{(n-1)^2}.$$

Si d'ailleurs on pose, pour abréger,

$$(3) \qquad \omega = \frac{2\pi}{n},$$

on pourra prendre

$$(4) \qquad \rho = e^{\alpha\sqrt{-1}},$$

et alors la formule (1) deviendra

$$(5) \qquad \Delta = 1 + e^{\alpha\sqrt{-1}} + e^{4\alpha\sqrt{-1}} + \ldots + e^{(n-1)^2\alpha\sqrt{-1}}.$$

Or la valeur de Δ, donnée par l'équation (5), est ce que devient la somme des n premiers termes de la série

$$(6) \qquad 1, \quad e^{-a^2}, \quad e^{-4a^2}, \quad e^{-9a^2}, \quad \text{etc....}$$

quand on y remplace a^2 par $-\omega\sqrt{-1}$; et j'ai remarqué dès l'année 1817, dans le *Bulletin de la Société Philomatique*, comme dans mes leçons au Collége de France, que la considération des fonctions réciproques fournit entre les termes de la série (6) et ceux de la série semblable,

$$(7) \qquad 1, \quad e^{-b^2}, \quad e^{-4b^2}, \quad e^{-9b^2}, \ldots.$$

une relation exprimée par la formule

$$(8)\quad a^{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{1}{2}+e^{-a^2}+e^{-4a^2}+\ldots\right)=b^{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{1}{2}+e^{-b^2}+e^{-4b^2}+\ldots\right),$$

quand a et b représentent deux quantités positives, assujéties à vérifier la condition

$$(9)\qquad ab=\pi.$$

La formule (8) parut digne d'attention à l'auteur de la *Mécanique céleste*, qui me dit l'avoir vérifiée dans le cas où l'un des nombres a, b devient très petit. Effectivement la formule (8), qu'on peut encore écrire comme il suit,

$$a\left(\tfrac{1}{2}+e^{-a^2}+e^{-4a^2}+\ldots\right)=\pi^{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{1}{2}+e^{-\frac{\pi^2}{a^2}}+e^{-4\frac{\pi^2}{a^2}}+\ldots\right),$$

donnera sensiblement, si a se réduit à un très petit nombre α,

$$\alpha\left(\tfrac{1}{2}+e^{-\alpha^2}+e^{-4\alpha^2}+\ldots\right)=\tfrac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}};$$

et, pour vérifier cette dernière équation, il suffit d'observer que, d'après la définition des intégrales définies, le produit

$$\alpha\left(1+e^{-\alpha^2}+e^{-4\alpha^2}+\ldots\right)$$

a pour limite l'intégrale

$$(10)\qquad \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\tfrac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}.$$

Il est d'ailleurs facile de s'assurer que la formule (8) peut subsister, comme l'a remarqué M. Poisson, lors même que la constante a devient imaginaire. Nous ajouterons seulement qu'alors la partie réelle de cette constante devra être positive, si elle ne se réduit pas à zéro.

Lorsque, dans la série (6), on pose $a^2=-\omega\sqrt{-1}$, la valeur de ω étant fournie par l'équation (3), ou, ce qui revient au même,

$$(11)\qquad a^2=-\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1},$$

la formule (9), ou $a^2 b^2 = \pi^2$, donne

$$(12) \qquad b^2 = \frac{n\pi}{2}\sqrt{-1}.$$

Alors les termes distincts de la série (6) se réduisent à une partie de ceux que renferme le second membre de la formule (5), et les termes distincts de la série (7) à ceux qui composent le binome

$$(13) \qquad 1 + e^{-\frac{n\pi}{2}\sqrt{-1}}.$$

On doit donc s'attendre à voir l'équation (8) fournir la valeur du rapport qui existe entre la somme alternée Δ et le binome dont il s'agit. Or, en effet, pour obtenir cette valeur, il suffira de supposer, dans l'équation (8),

$$(14) \qquad a^2 = \alpha^2 - \frac{2\pi}{n}\sqrt{-1},$$

α^2 désignant un nombre infiniment petit. Soit, dans cette hypothèse,

$$(15) \qquad b^2 = \beta^2 + \frac{n\pi}{2}\sqrt{-1}.$$

β devra s'évanouir avec α, et comme la condition (9) donnera

$$\alpha^2\beta^2 + \pi\left(\frac{n}{2}\alpha^2 - \frac{2}{n}\beta^2\right)\sqrt{-1} = 0,$$

on en tirera sensiblement

$$\frac{4\beta^2}{n^2\alpha^2} = 1,$$

de sorte qu'on pourra prendre

$$(16) \qquad \frac{2\beta}{n\alpha} = 1.$$

Cela posé, si l'on multiplie par $n\alpha$ les deux membres de la formule (8), les termes de la somme alternée Δ ou du binome (13) s'y trouveront multipliés par des sommes qui se réduiront sensiblement, dans le pre-

mier membre, au produit

$$a^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}},$$

et, dans le second membre, au produit

$$b^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}.$$

Donc, en laissant de côté le facteur

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}},$$

qui deviendra commun aux deux membres de la formule, on trouvera définitivement

$$(17) \qquad a^{\frac{1}{2}} \Delta = b^{\frac{1}{2}} \left(1 + e^{-\frac{n\pi}{2}\sqrt{-1}}\right),$$

ou, ce qui revient au même,

$$(18) \qquad \Delta = \frac{b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}\left(1 + e^{-\frac{n\pi}{2}\sqrt{-1}}\right) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{a}\left(1 + e^{-\frac{n\pi}{2}\sqrt{-1}}\right),$$

la valeur de a étant fournie par l'équation (11), ou

$$a^2 = \frac{2\pi}{n} e^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}},$$

de laquelle on tirera (voir l'*Analyse algébrique*, chap. VII et IX),

$$a = \left(\frac{2\pi}{n}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}},$$

et par suite

$$(19) \qquad \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{a} = \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}} = \frac{n^{\frac{1}{2}}}{2}\left(1 + \sqrt{-1}\right).$$

Donc en supposant Δ déterminé par la formule (5), on aura, non-seu-

lement pour des valeurs impaires du nombre n, mais généralement, et quel que soit ce nombre,

$$(20)\qquad \Delta = \frac{n^{\frac{1}{2}}}{2}\left(1+\sqrt{-1}\right)\left(1+e^{-\frac{n\pi}{2}\sqrt{-1}}\right).$$

On trouvera en particulier, 1° si n est de la forme $4x$,

$$(21)\qquad \Delta = n^{\frac{1}{2}}\left(1+\sqrt{-1}\right);$$

2° si n est de la forme $4x+1$,

$$(22)\qquad \Delta = n^{\frac{1}{2}};$$

3° si n est de la forme $4x+2$,

$$(23)\qquad \Delta = 0;$$

4° si n est de la forme $4x+3$,

$$(24)\qquad \Delta = n^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}.$$

Ainsi, les formules (20), (21), (22), (23), (24), que M. Gauss a établies dans un de ses plus beaux Mémoires, et dont M. Dirichlet a donné une démonstration nouvelle qui a été justement remarquée des géomètres, se trouvent comprises comme cas particuliers dans la formule (8), de laquelle on déduit immédiatement l'équation (20) en attribuant à l'exposant $-a^2$ une valeur infiniment rapprochée de la valeur imaginaire $\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}$, ou, ce qui revient au même, en réduisant l'exponentielle e^{-a^2} à l'une des racines primitives de l'équation (1), savoir, à celle que détermine la formule (4).

Si l'on supposait a^2 déterminé non plus par la formule (11), mais par la suivante

$$(25)\qquad a^2 = -\frac{2m\pi}{n}\sqrt{-1},$$

m étant premier à n; alors, en opérant comme ci-dessus, on obtiendrait,

au lieu de la formule (20), une équation qui, combinée avec cette formule, reproduirait immédiatement la loi de réciprocité entre deux nombres premiers, ou même cette loi étendue à deux nombres impairs quelconques.

§ II. *Transformation des sommes alternées en produits.*

Soit

$$\rho$$

une racine primitive de l'équation

$$x^n = 1, \tag{1}$$

n étant un nombre premier impair. Les diverses racines primitives de l'équation (1) pourront être représentées, ou par

$$\rho,\ \rho^2,\ \rho^3, \ldots \rho^{n-1},$$

ou par

$$\rho^m,\ \rho^{2m},\ \rho^{3m}, \ldots \rho^{(n-1)m},$$

m étant premier à n. Soit d'ailleurs Δ une somme alternée de ces racines primitives. Cette somme sera de la forme

$$\Delta = \rho^h + \rho^{h'} + \rho^{h''} + \ldots - \rho^k - \rho^{k'} - \rho^{k''} - \ldots, \tag{2}$$

les exposants

$$1,\ 2,\ 3, \ldots n-1,$$

étant ainsi partagés en deux groupes

$$h,\ h',\ h'', \ldots \quad \text{et} \quad k,\ k',\ k'', \ldots$$

dont le premier pourra être censé renfermer les résidus quadratiques

$$1,\ 4,\ \text{etc.},$$

et le second les non-résidus suivant le module n. Si l'on suppose en particulier $n = 3$, on aura simplement

$$\Delta = \rho^1 - \rho^2 = \rho^1 - \rho^{-1},$$

en sorte qu'une somme alternée Δ pourra être représentée, au signe

près, par le binome

$$\rho^1 - \rho^{-1},$$

ou plus généralement par le binome

$$\rho^m - \rho^{-m},$$

m étant non divisible par 3. Si n devient égal à 5, les binomes de cette forme se réduiront, au signe près, à l'un des suivants

$$\rho^1 - \rho^4 = \rho^1 - \rho^{-1}, \quad \rho^2 - \rho^3 = \rho^2 - \rho^{-2},$$

et le produit de ces deux binomes

$$(\rho^1 - \rho^4)(\rho^2 - \rho^3) = \rho^2 + \rho^3 - \rho - \rho^4$$

représentera encore, au signe près, la somme alternée

$$\Delta = \rho + \rho^4 - \rho^2 - \rho^3,$$

qui pourra s'écrire comme il suit :

$$\Delta = (\rho^1 - \rho^{-1})(\rho^3 - \rho^{-3}).$$

J'ajoute qu'il en sera généralement de même, et que pour une valeur quelconque du nombre premier n, la somme alternée Δ pourra être réduite au produit P déterminé par la formule

$$(3) \qquad P = (\rho^1 - \rho^{-1})(\rho^3 - \rho^{-3}) \ldots [\rho^{n-2} - \rho^{-(n-2)}].$$

Effectivement ce produit, égal, au signe près, au suivant

$$(\rho^1 - \rho^n)(\rho^2 - \rho^{n-2}) \ldots \left(\rho^{\frac{n-1}{2}} - \rho^{-\frac{n+1}{2}}\right),$$

changera tout au plus de signe, quand on y remplacera ρ par ρ^m, attendu qu'alors les termes de la suite

$$\rho, \ \rho^2, \ \rho^3, \ldots \rho^{n-1},$$

se trouveront remplacés par les termes de la suite

$$\rho^m,\ \rho^{2m},\ \rho^{3m}, \ldots \rho^{(n-1)m},$$

qui sont les mêmes, à l'ordre près, et un binome de la forme

$$\rho^l - \rho^{-l}$$

par un binome de la même forme

$$\rho^{ml} - \rho^{-ml}.$$

Donc le produit P ne pourra représenter qu'une fonction symétrique ou une fonction alternée des racines primitives de l'équation (1). Donc il sera de l'une des formes

$$a,\ a\Delta,$$

a désignant une quantité entière positive ou négative, et son carré P^2 sera de l'une des formes

$$a^2,\ a^2\Delta^2.$$

Comme on tirera d'ailleurs de l'équation (3), non-seulement

$$P = \rho^{1+3+5+\ldots+(n-2)}(1-\rho^{-2})(1-\rho^{-6})\ldots[1-\rho^{-2(n-2)}],$$

ou, ce qui revient au même,

$$P = \rho^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}(1-\rho^{n-2})(1-\rho^{n-6})\ldots(1-\rho^4),$$

mais encore

$$P = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\rho^{-\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}(1-\rho^2)(1-\rho^6)\ldots(1-\rho^{n-4}),$$

et par suite,

$$\begin{aligned} P^2 &= (-1)^{\frac{n-1}{2}}(1-\rho^2)(1-\rho^4)(1-\rho^6)\ldots(1-\rho^{n-6})(1-\rho^{n-4})(1-\rho^{n-2}) \\ &= (-1)^{\frac{n-1}{2}}(1-\rho)(1-\rho^2)\ldots(1-\rho^{n-1}) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}n, \end{aligned}$$

il est clair que P^2 n'étant pas de la forme a^2, devra être de la forme $a^2\Delta^2$. On aura donc

$$(4)\qquad (-1)^{\frac{n-1}{2}} n = a^2\Delta^2, \quad P = a\Delta.$$

Or Δ^2 ne pouvant être qu'une fonction symétrique de $\rho, \rho^2, \ldots$ et par conséquent un nombre entier, la seule manière de vérifier la première des équations (4) sera de poser

$$a^2 = 1, \quad \Delta^2 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n.$$

On aura donc $$a = \pm 1,$$

et par conséquent,

$$(5)\qquad P = \pm \Delta;$$

et toute la difficulté se réduit à déterminer le signe qui doit affecter le second membre de la formule (5). Or si, dans la somme alternée

$$\Delta = \rho^h + \rho^{h'} + \rho^{h''} + \ldots - \rho^k - \rho^{k'} - \rho^{k''} - \text{etc.},$$

on remplace généralement

$$\rho^l \text{ par } \left(\frac{l}{n}\right),$$

cette somme sera remplacée elle-même par la suivante

$$\left(\frac{h}{n}\right) + \left(\frac{h'}{n}\right) + \ldots - \left(\frac{k}{n}\right) - \left(\frac{k'}{n}\right) - \text{etc.} = n - 1 \equiv -1, \pmod{n},$$

tandis que la somme alterne $-\Delta$ se changera en

$$-(n-1) \equiv 1, \pmod{n}.$$

Donc, pour décider si dans la formule (5) on doit réduire le double signe au signe $+$ ou au signe $-$, il suffira de chercher la quantité en laquelle se transforme le développement de P quand on y remplace chaque terme de la forme ρ^l par $\left(\frac{l}{n}\right)$, et de voir si cette quantité, divisée par 4, donne

pour reste -1 ou $+1$. Or, comme le développement de P se composera de termes de la forme

$$\pm \rho^{\pm 1 \pm 3 \pm 5 \pm \ldots},$$

le signe qui précède ρ étant le produit des signes qui précèdent les nombres 1, 3, 5..., la quantité dont il s'agit sera la somme des expressions de la forme

$$\pm \left(\frac{\pm 1 \pm 3 \pm 5 \pm \ldots}{n} \right),$$

le signe placé en dehors des parenthèses étant le produit des signes placés au dedans. Elle sera donc équivalente, suivant le module n, à la somme des expressions de la forme

$$(6) \qquad \pm [\pm 1 \pm 3 \pm 5 \pm \ldots \pm (n-2)]^{\frac{n-1}{2}}.$$

Ainsi, en particulier, elle sera équivalente, pour $n = 3$, à

$$1^2 - (-1)^2 = 2 \equiv -1, \pmod{3};$$

pour $n = 5$, à

$$(1+3)^2 + (-1+3)^2 - (-1+3)^2 - (1-3)^2 \equiv 4 \equiv -1, \pmod{5}.$$

D'ailleurs, si l'on suppose le nombre de lettres $a, b, c \ldots$, égal à m, la somme des expressions de la forme

$$(7) \qquad \pm (\pm a \pm b \pm c \pm \ldots)^m,$$

étant développée suivant les puissances ascendantes de $a, b, c \ldots$, ne pourra, si le signe extérieur est le produit des signes intérieurs, renfermer aucun terme dans lequel l'exposant de a, ou de b, ou de $c \ldots$ s'évanouisse, puisque le coefficient d'un semblable terme dans cette somme serait évidemment

$$2^{m-1} - 2^{m-1} = 0.$$

Donc la somme des expressions (7) se réduira au produit de leur nombre 2^m par le seul terme

$$1.2.3 \ldots m.abc \ldots;$$

et si l'on prend pour

$$a,\ b,\ c\ldots$$

les nombres

$$1,\ 3,\ 5\ldots\ 2m-1,$$

cette somme aura pour valeur le produit

$$2^m(1.2.3\ldots m)\,1.3.5\ldots(2m-1)=1.2.3.4\ldots 2m.$$

Donc la somme des expressions (6) aura elle-même pour valeur le produit

$$1.2.3\ldots(n-1)\equiv -1,\ (\text{mod. } n);$$

et P se transformera en une somme équivalente à -1, si l'on y remplace généralement ι^l par $\left(\frac{l}{n}\right)$; d'où il suit que l'équation (5) devra être réduite à

$$(8)\qquad P=\Delta.$$

En d'autres termes, on aura

$$(9)\qquad (\rho^1-\rho^{-1})(\rho^3-\rho^{-3})\ldots[\rho^{n-2}-\rho^{-(n-2)}]=\rho^h+\rho^{h'}+\rho^{h''}+\ldots-\rho^k-\rho^{k'}-\rho^{k''}-\ldots.$$

$h, h', h'',\ldots$ étant les résidus, et $k, k', k'',\ldots$ les non-résidus inférieurs au module n. Comme on aura d'ailleurs

$$(10)\qquad 0=1+\rho^h+\rho^{h'}+\rho^{h''}+\ldots+\rho^k+\rho^{k'}+\rho^{k''}+\ldots.$$

on tirera des formules (9) et (10), combinées entre elles par voie d'addition,

$$(11)\qquad (\rho^1-\rho^{-1})(\rho^3-\rho^{-3})\ldots[\rho^{n-2}-\rho^{-(n-2)}]=1+2\rho^h+2\rho^{h'}+2\rho^{h''}+\ldots;$$

par conséquent,

$$(12)\qquad (\rho^1-\rho^{-1})(\rho^3-\rho^{-3})\ldots[\rho^{n-2}-\rho^{-(n-2)}]=1+\rho+\rho^4+\rho^9+\ldots+\rho^{(n-1)^2}.$$

Des formules (9) et (12), relatives au cas où n est un nombre premier impair, on déduit aisément celles qui sont relatives au cas où n est un nombre composé quelconque, comme je le montrerai plus en détail

dans un autre article. J'observerai en finissant que, si, n étant un nombre premier de la forme $3x+1$, α désigne une racine primitive de l'équivalence

$$x^3 = 1,$$

et m une racine primitive de l'équivalence

$$x^{n-1} \equiv 1, \pmod{n},$$

on obtiendra un produit P proportionnel à un facteur primitif de n, non-seulement lorsqu'on supposera la valeur de P donnée par la formule (3), mais aussi lorsqu'on prendra

$$P = \left(\rho + \alpha\rho^{m^{\frac{n-1}{3}}} + \alpha^2\rho^{m^{2\frac{n-1}{3}}}\right)\left(\rho^m + \alpha\rho^{m^{1+\frac{n-1}{3}}} = \alpha^2\rho^{m^{1+2\frac{n-1}{3}}}\right)\ldots$$

le nombre des facteurs trinomes étant $\frac{n-1}{3}$. Le facteur primitif de n, auquel cette dernière valeur de P deviendra proportionnelle, sera

$$\Theta = \rho + \alpha\rho^m + \alpha^2\rho^{m^2} + \rho^{m^3} + \ldots + \alpha^2\rho^{m^{n-2}}.$$

On trouvera par exemple, pour $n = 7$, $m = 3$,

$$(\rho + \alpha\rho^2 + \alpha^2\rho^4)(\rho^3 + \alpha\rho^6 + \alpha^2\rho^5) = \alpha^2[\rho + \rho^6 + \alpha(\rho^3 + \rho^4) + \alpha^2(\rho^2 + \rho^5)],$$

ou, ce qui revient au même,

$$P = \alpha^2\Theta;$$

pour $n = 13$, $m = 6$,

$$(\rho + \alpha\rho^9 + \alpha^2\rho^3)(\rho^6 + \alpha\rho^2 + \alpha^2\rho^5)(\rho^{10} + \alpha\rho^{12} + \alpha^2\rho^4)(\rho^8 + \alpha\rho^7 + \alpha^2\rho^{11})$$
$$= (1 + 2\alpha)[\rho + \rho^8 + \rho^{12} + \rho^5 + \alpha(\rho^6 + \rho^9 + \rho^7 + \rho^4) + \alpha^2(\rho^{10} + \rho^2 + \rho^3 + \rho^{11})]$$

ou $$P = (1 + 2\alpha)\Theta, \text{ etc...}$$

D'ailleurs, pour établir la proportionnalité de P et de Θ considérés comme fonction de ρ, il suffira d'observer que P se change en $\frac{P}{\alpha}$ quand

on y remplace ρ par ρ^m. Quant au rapport $\frac{P}{\Theta}$, il ne pourra être qu'une fonction entière de α, que l'on pourra réduire à la forme

$$a + b\alpha;$$

et une méthode semblable a celle par laquelle nous avons déterminé le signe de Δ dans la formule (17), fera connaître les nombres entiers a, b, ou du moins des quantités équivalentes à ces mêmes nombres suivant le module n. Enfin l'on pourrait étendre les propositions que nous venons d'indiquer à des produits P composés de facteurs polynomes dont chacun offrirait plus de 3 termes; par exemple, 5 termes si $n - 1$ était divisible par 5, 7 termes si $n - 1$ était divisible par 7, etc...

SUR LA

SOMMATION DE CERTAINES PUISSANCES

D'UNE

RACINE PRIMITIVE D'UNE ÉQUATION BINOME,

Et en particulier, des puissances qui offrent pour exposants les résidus cubiques inférieurs au module donné;

PAR M. AUGUSTIN CAUCHY.

Le module p étant un nombre premier, concevons qu'une racine primitive d'une équation binome du degré p soit successivement élevée à des puissances qui offrent pour exposants les résidus quadratiques inférieurs au module p. La somme de ces puissances pourra seulement acquérir deux valeurs distinctes en vertu de la substitution d'une racine primitive à une autre; et la différence entre ces valeurs sera une fonction alternée que M. Gauss a le premier appris à déterminer. Or, après avoir exposé, dans la Note qui précède, une méthode fort simple qui reproduit les résultats de M. Gauss, j'ai dit que la même méthode pouvait être étendue à d'autres déterminations analogues. C'est ce que l'on verra dans cet article où la méthode dont il s'agit se trouvera particulièrement appliquée à la solution du problème que je vais indiquer.

Supposons que, le module p étant du nombre de ceux qui, divisés par 3, donnent 1 pour reste, on élève une racine primitive aux diverses puissances qui offrent pour exposants les résidus cubiques. La somme de ces puissances, quand on y remplacera la racine primitive donnée par d'autres, pourra successivement acquérir trois valeurs distinctes, et ces trois valeurs seront les trois racines d'une équation connue, à laquelle on parvient à l'aide de la théorie de M. Gauss. D'ailleurs la fonction alternée la plus simple que l'on puisse former avec ces trois valeurs est le produit des trois différences que l'on obtient en les retran-

chant l'une de l'autre. Or la détermination complète de cette fonction alternée est évidemment un problème analogue à celui dont j'ai donné deux solutions nouvelles dans l'article précédent. Seulement ce nouveau problème est d'un ordre plus élevé, attendu que les résidus quadratiques se trouvent ici remplacés par des résidus cubiques. Mais, quoiqu'en raison de cette circonstance la difficulté semble s'accroître, toutefois je parviens à la surmonter en suivant une marche semblable à celle que j'ai adoptée dans la Note citée.

J'indique aussi quelques-unes des conséquences auxquelles on se trouve immédiatement conduit par la solution du problème que je viens d'énoncer.

ANALYSE.

§ Ier. *Théorèmes divers, relatifs aux modules qui, divisés par* 3, *donnent l'unité pour reste.*

Soient p un nombre premier impair, θ une racine primitive de l'équation

$$(1) \qquad x^p = 1,$$

et t une racine primitive de l'équivalence

$$(2) \qquad x^{p-1} \equiv 1, \ (\text{mod. } p).$$

Les divers entiers inférieurs au module p seront équivalents, suivant ce module, aux divers termes de la progression géométrique

$$1, \ t, \ t^2, \ t^3, \ldots \ t^{p-2};$$

et en conséquence les diverses racines primitives de l'équation (1) pourront être représentées ou par les termes de la suite

$$\theta, \ \theta^2, \ \theta^3, \ldots \ \theta^{p-1},$$

ou par les termes de la suite

$$\theta, \ \theta^t, \ \theta^{t^2}, \ldots \ \theta^{t^{p-2}}.$$

Si d'ailleurs on nomme s la somme de ces racines primitives, c'est-à-dire si l'on pose

$$(3) \qquad s = \theta + \theta^t + \theta^{t^2} + \ldots + \theta^{t^{p-2}},$$

on aura évidemment $1 + s = 0$, ou, ce qui revient au même,

$$(4) \qquad s = -1.$$

Concevons maintenant que le module p, divisé par 3, donne l'unité pour reste, et posons

$$(5) \qquad \varpi = \frac{p-1}{3}.$$

La progression géométrique

$$1,\ t,\ t^2,\ t^3, \ldots t^{p-2},$$

pourra être décomposée en trois autres, savoir

$$\begin{array}{l} 1,\ t^3,\ t^6, \ldots\ t^{p-4}, \\ t,\ t^4,\ t^7, \ldots\ t^{p-3}, \\ t^2,\ t^5,\ t^8, \ldots\ t^{p-2}; \end{array}$$

et la somme s en trois parties correspondantes

$$s_0,\ s_1,\ s_2,$$

respectivement déterminées par les équations

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} s_0 = \theta \ + \theta^{t^3} + \theta^{t^6} + \ldots + \theta^{t^{p-4}}, \\ s_1 = \theta^t + \theta^{t^4} + \theta^{t^7} + \ldots + \theta^{t^{p-3}}, \\ s_2 = \theta^{t^2} + \theta^{t^5} + \theta^{t^8} + \ldots + \theta^{t^{p-2}}. \end{array} \right.$$

Cela posé, comme les divers résidus cubiques, inférieurs au module p, seront équivalents, suivant ce module, aux divers termes de la progression géométrique

$$1,\ t^3,\ t^6, \ldots\ t^{p-4},$$

il est clair que s_0 représentera la somme des puissances de θ qui offriront

pour exposants ces résidus cubiques. Quant aux sommes s_1, s_2, on les déduira évidemment de la somme s_0, en remplaçant la racine primitive θ de l'équation (1) par la racine primitive θ^t ou θ^{t^2}. Il y a plus : si à la racine primitive θ on substitue successivement toutes les autres, la somme des puissances de θ, qui offrent pour exposants les résidus cubiques inférieurs au module p, pourra seulement acquérir trois valeurs distinctes qui seront précisément

$$s_0,\ s_1,\ s_2.$$

Enfin, si l'on nomme S_0 la somme des puissances de θ qui ont pour exposants les cubes des nombres

$$0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots p-1,$$

et S_1, S_2, ce que devient S_0 quand on y remplace successivement θ par θ^t et par θ^{t^2}, on aura

$$(7) \qquad S_0 = 1 + 3s_0, \quad S_1 = 1 + 3s_1, \quad S_2 = 1 + 3s_2.$$

En effet, les nombres

$$1,\ 2,\ 3, \ldots p-1,$$

peuvent être censés représenter les diverses racines de l'équivalence

$$x^{p-1} \equiv 1, \quad \text{ou} \quad x^{3\varpi} \equiv 1, \quad (\text{mod. } p),$$

qui se décompose en plusieurs autres, savoir,

$$(8) \qquad x^3 \equiv 1, \quad x^3 \equiv t^3, \quad x^3 \equiv t^6, \ldots x^3 \equiv t^{p-4}, \quad (\text{mod. } p :$$

et par conséquent trois d'entre eux vérifieront chacune des équivalences (8). Donc si l'on pose

$$(9) \qquad S_0 = 1 + \theta^1 + \theta^{2^3} + \theta^{3^3} + \ldots + \theta^{(p-1)^3},$$

on aura encore

$$S_0 = 1 + 3(\theta + \theta^{t^3} + \theta^{t^6} + \ldots + \theta^{t^{p-4}}).$$

ou, ce qui revient au même,

$$S_0 = 1 + 3s_0.$$

On retrouve ainsi la première des formules (7), de laquelle on déduira la seconde et la troisième en remplaçant θ par θ^t et par θ^{t^2}.

Il est bon d'observer que, si t^{3m} désigne un terme quelconque de la suite

$$1,\ t^3,\ t^6, \ldots t^{p-4}.$$

un autre terme de la même suite sera équivalent à

$$-t^{3m} = (-t^m)^3;$$

et même, comme on aura

$$t^{\frac{p-1}{2}} = t^{3\frac{\varpi}{2}} \equiv -1, \quad (\text{mod. } p),$$

il est clair que le terme équivalent à $-t^{3m}$ sera

$$t^{\frac{p-1}{2}+3m} = t^{3\left(m+\frac{\varpi}{2}\right)}.$$

Cela posé, les différents termes de chacune des sommes

$$s_0,\ s_1,\ s_2,$$

seront deux à deux de la forme

$$\theta^t,\ \theta^{-t};$$

et comme θ étant une racine primitive de l'équation (1), θ^t, θ^{-t} représenteront deux expressions imaginaires conjuguées, la somme partielle

$$\theta^t + \theta^{-t}$$

se réduira simplement à une quantité réelle. Donc les trois sommes s_0, s_1, s_2 seront trois quantités réelles, et l'on pourra en dire autant des trois sommes S_0, S_1, S_2, qui seront d'ailleurs les trois racines d'une équation connue du troisième degré. Cette équation, et celle qui aura pour racines les trois autres sommes, pourront d'ailleurs s'obtenir à l'aide des considérations suivantes.

Si l'on élève au carré la valeur de s_0 fournie par la première des équations (6), on trouvera

$$(10)\quad \begin{cases} s_0^2 = \theta^{1+1} + \theta^{1+\varepsilon^3} + \theta^{1+\varepsilon^6} + \ldots\ldots\ldots + \theta^{1+\varepsilon^{p-4}} \\ \quad + \theta^{\varepsilon^3+\varepsilon^3} + \theta^{\varepsilon^3+\varepsilon^6} + \theta^{\varepsilon^3+\varepsilon^9} + \ldots\ldots\ldots + \theta^{\varepsilon^3+\varepsilon^{p-1}} \\ \quad + \text{etc.} \\ \quad + \theta^{\varepsilon^{p-1}+\varepsilon^{p-4}} + \theta^{\varepsilon^{p-4}+\varepsilon} + \theta^{\varepsilon^{p-4}+\varepsilon^3} + \ldots + \theta^{\varepsilon^{p-1}+\varepsilon^{p-5}}. \end{cases}$$

Dans le second membre de cette dernière formule, les termes que renferme une même colonne verticale se déduisent les uns des autres quand on remplace successivement dans le premier

$$\theta \text{ par } \theta^{\varepsilon^3}, \text{ ou par } \theta^{\varepsilon^6}, \ldots \text{ ou par } \theta^{\varepsilon^{p-4}}.$$

Donc la somme de ces termes se réduit toujours ou à l'une des sommes

$$s_0,\ s_1,\ s_2,$$

ou bien au nombre de ces termes, c'est-à-dire à $\frac{p-1}{3}$, dans le cas particulier où l'exposant de θ dans le premier terme s'évanouit, ce qui a lieu lorsque le premier terme est

$$\theta^{1+\varepsilon^{\frac{p-1}{2}}} = \theta^0 = 1.$$

Donc la formule (10) donnera

$$(11)\qquad s_0^2 = \frac{p-1}{3} + as_0 + bs_1 + cs_2,$$

a, b, c désignant trois nombres entiers dont la somme, inférieure d'une unité au nombre des termes

$$\theta^{1+\varepsilon},\quad \theta^{1+\varepsilon^3},\quad \theta^{1+\varepsilon^6}, \ldots \theta^{1+\varepsilon^{p-4}},$$

sera

$$(12)\qquad a + b + c = \frac{p-4}{3}.$$

Or, quoique au premier abord la détermination des entiers a, b, c

semble exiger le calcul numérique des divers termes de la suite

$$1+1,\quad 1+t^3,\quad 1+t^6,\ldots 1+t^{p-1},$$

néanmoins ce calcul n'est pas nécessaire, et la détermination dont il s'agit peut aisément s'effectuer, comme on va le voir, à l'aide d'une méthode analogue à celle que nous avons employée dans le précédent article.

La valeur de s_0^2 donnée par la formule (11) peut s'écrire comme il suit :

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} s_0^2 = \frac{p-1}{3}\theta^0 &+ a(\theta^1 + \theta^{t^2} + \ldots + \theta^{t^{p-1}}) \\ &+ b(\theta^t + \theta^{t^4} + \ldots + \theta^{t^{p-2}}) \\ &+ c(\theta^{t^3} + \theta^{t^5} + \ldots + \theta^{t^{p-3}}); \end{aligned}\right.$$

et, pour déduire celle-ci de la formule (10), il suffit d'y faire croître ou décroître d'un multiple de p, l'exposant l de chaque terme de la forme

$$\theta^l.$$

Or concevons que, dans l'une ou l'autre formule, on remplace généralement

$$\theta^l \text{ par } l^{\frac{p-1}{3}} = l^{\varpi}.$$

Comme l^{ϖ} croîtra ou décroîtra d'un multiple de p, en même temps que l, il est clair qu'après le remplacement dont il s'agit, les seconds membres des formules (10) et (13), se transformeront en deux quantités qui seront équivalentes entre elles suivant le module p. D'ailleurs m, l étant deux nombres entiers, on aura

$$\left.\begin{aligned} (t^{3m})^{\varpi} &= (t^m)^{p-1} \equiv 1, \\ (t^{3m+1})^{\varpi} &= (t^m)^{p-1} t^{\varpi} \equiv t^{\varpi}, \\ (t^{3m+2})^{\varpi} &= (t^m)^{p-1} t^{2\varpi} \equiv t^{2\varpi}, \end{aligned}\right\} \pmod{p},$$

et

$$(t^{3m} l)^{\varpi} \equiv (t^m)^{p-1} l^{\varpi} \equiv l^{\varpi}, \pmod{p}.$$

Donc les quantités dans lesquelles se transformeront les seconds mem-

bres des formules (10) et (13) seront équivalentes aux deux produits qu'on obtient en multipliant

$$\frac{p-1}{3} = \varpi,$$

d'un côté, par la somme

$$(1+t)^{\varpi} + (1+t^3)^{\varpi} + \ldots + (1+t^{p-4})^{\varpi},$$

d'un autre côté, par le trinome

$$a + bt^{\varpi} + ct^{2\varpi}.$$

On aura donc

$$(14)\quad a + bt^{\varpi} + ct^{2\varpi} \equiv (1+t)^{\varpi} + (1+t^3)^{\varpi} + \ldots + (1+t^{p-4})^{\varpi}, \pmod{p}.$$

De même, si, dans les seconds membres des formules (10) et (13), on remplace généralement

$$\theta^l \text{ par } l^{2\varpi},$$

on trouvera

$$(15)\quad a + bt^{2\varpi} + ct^{4\varpi} \equiv (1+t)^{2\varpi} + (1+t^3)^{2\varpi} + \ldots + (1-t^{p-4})^{2\varpi}, \pmod{p}.$$

Concevons à présent que, dans les seconds membres des formules (14), (15), on développe chaque binome de la forme

$$(1+t^{3m})^{\varpi} \quad \text{ou} \quad (1+t^{3m})^{2\varpi}.$$

La somme des valeurs que prendra un terme du développement, quand on attribuera successivement à m les diverses valeurs

$$0,\ 1,\ 2, \ldots \frac{p-4}{3} = \varpi - 1,$$

sera de la forme

$$1 + t^{3l} + t^{6l} + \ldots + t^{3(\varpi-1)l} = \frac{1-t^{(p-1)l}}{1-t^{3l}}.$$

Donc cette somme sera nulle, à moins qu'il ne s'agisse d'un terme dans lequel l'exposant de t soit multiple de $3\varpi = p - 1$. Il est aisé d'en conclure que les formules (14), (15) donneront

$$(16)\quad a + bt^{\varpi} + ct^{2\varpi} \equiv 2\varpi, \quad a + bt^{2\varpi} + ct^{\varpi} \equiv (2 + \Pi)\varpi. \pmod{p},$$

la valeur de Π étant

$$(17)\qquad \Pi = \frac{(\varpi+1)(\varpi+2)\ldots 2\varpi}{1.2.3\ldots\varpi}.$$

Soit d'ailleurs

$$(18)\qquad r = t^{\varpi};$$

r représentera une racine primitive de l'équation

$$(19)\qquad x^3 \equiv 1, \pmod{p},$$

et, comme on aura

$$\varpi = \frac{p-1}{3} \equiv -\frac{1}{3}, \pmod{p},$$

les formules (12), (13) donneront

$$(20)\quad a + b + c \equiv -\frac{1}{3}, \quad a + br + cr^2 \equiv -\frac{2}{3}, \quad a + br^2 + cr \equiv -\frac{2}{3} - \frac{\Pi}{3}, \pmod{p}.$$

Enfin l'on tirera de ces dernières

$$(21)\quad a \equiv -\frac{8}{9} - \frac{\Pi}{9}, \quad b \equiv -\frac{2}{9} - \frac{\Pi}{9}r, \quad c \equiv -\frac{2}{9} - \frac{\Pi}{9}r^2, \pmod{p}.$$

Les valeurs de a, b, c, étant ainsi déterminées, on pourra les substituer dans la formule (11), et dans celles qu'on en déduit lorsqu'on y remplace θ par θ^t ou par θ^{t^2}, c'est-à-dire, dans les trois équations

$$(22)\quad s'_0 = \varpi + as_0 + bs_1 + cs_2, \quad s'_1 = \varpi + as_1 + bs_2 + cs_0, \quad s'_2 = \varpi + as_2 + bs_1 + cs_0.$$

D'autre part, on aura, en vertu de l'équation (4),

$$(23)\qquad s_0 + s_1 + s_2 = -1.$$

et de cette dernière, combinée avec les formules (22), on tirera successivement

$$(24)\qquad s_0^2 + s_1^2 + s_2^2 = 2\varpi + 1, \quad s_0 s_1 + s_1 s_2 + s_2 s_0 = -\varpi:$$

$$(25)\qquad s_0^2 s_1 + s_1^2 s_2 + s_2^2 s_0 = bp - \varpi^2, \quad s_0 s_1^2 + s_1 s_2^2 + s_2 s_1^2 = cp - \varpi^2:$$

$$(26)\qquad (s_0 - s_1)(s_1 - s_2)(s_2 - s_0) = (c - b)p;$$

$$(27)\qquad s_1 s_2 s_3 = \frac{\varpi(2\varpi + 1)}{3} - \frac{b + c}{3} p;$$

puis, en ayant égard à la formule (12),

$$(28)\qquad s_0 s_1 s_2 = \frac{1}{3} ap - \frac{\varpi^2 - 3\varpi - 1}{3}.$$

Il suit des formules (23), (24), (28), que s_0, s_1, s_2 sont les trois valeurs de s propres à vérifier l'équation

$$(29)\qquad s^3 + s - \varpi s + \frac{\varpi^2 - 3\varpi - 1 - ap}{3} = 0.$$

Si, dans cette dernière, on pose

$$S = 1 + 3s \quad \text{ou} \quad s = \frac{S - 1}{3},$$

on obtiendra la suivante

$$(30)\qquad S^3 - 3ps - pA = 0,$$

la valeur de A étant

$$(31)\qquad A = 8 - p + 9a.$$

L'équation (30) étant précisément celle qui a pour racines les trois sommes réelles

$$S_0,\ S_1,\ S_2,$$

le produit des différences entre ces trois racines, savoir,

$$(S_0 - S_1)(S_1 - S_2)(S_2 - S_0) = 3^3 (s_0 - s_1)(s_1 - s_2)(s_2 - s_0),$$

aura pour carré, d'après une règle connue, le binome

$$4(3p)^3 - 27(Ap)^2 = 27p^2(4p - A^2).$$

On aura donc

$$(32) \qquad 27(s_0 - s_1)^2(s_1 - s_2)^2(s_2 - s_0)^2 = p^2(4p - A^2).$$

D'autre part, si l'on pose

$$(33) \qquad B = b - c,$$

l'équation (26) donnera

$$(34) \qquad (s_0 - s_1)(s_1 - s_2)(s_2 - s_0) = -Bp;$$

et l'on tirera des formules (32), (34),

$$(35) \qquad 4p = A^2 + 27B^2.$$

Enfin les équations (31), (33), jointes aux formules (21), donneront

$$(36) \qquad A \equiv -\Pi, \quad B \equiv \frac{r^2 - r}{9}\Pi, \quad (\text{mod. } p).$$

Donc, 1° l'équation (35) pourra être vérifiée, comme l'a dit M. Jacobi, par des nombres entiers $\pm A$, $\pm B$, et la quantité A dont la valeur numérique sera inférieure à

$$\sqrt{4p - 27} = \tfrac{1}{2}\sqrt{p^2 - (p - 8)^2 - 44},$$

par conséquent à $\frac{1}{2}p$, pourra être complétement déterminée, ainsi que la quantité B, inférieure elle-même, abstraction faite du signe, à $\frac{1}{2}\sqrt{p}$, à plus forte raison à $\frac{1}{2}p$, par le moyen des formules (36); 2° si, dans la formule (30), on substitue la valeur de A choisie de manière à vérifier non-seulement la formule (35), mais encore la condition (31), présentée sous la forme

$$A \equiv -(p + 1), \quad (\text{mod. } 9),$$

l'équation (30) aura pour racines réelles les trois sommes

$$S_0, \quad S_1, \quad S_2.$$

Cette dernière conclusion s'accorde avec des remarques déjà faites par M. Libri et par M. Lebesgue (voir ce Journal, février 1840). Nous ajouterons que, l'équation (28) pouvant être réduite à

$$(37) \qquad 27\, s_0 s_1 s_2 = (A+3)p - 1,$$

et le produit $s_0 s_1 s_2$ étant nécessairement une quantité entière, on aura par suite

$$(38) \qquad (A+3)p \equiv 1, \quad (\text{mod. } 27).$$

Ainsi, en particulier, on trouve pour $p = 7$,

$$A = 1, \quad (1+3)7 = 28 \equiv 1, \quad (\text{mod. } 27);$$

pour $p = 13$,

$$A = -5, \quad (-5+3)13 = -26 \equiv 1, \quad (\text{mod. } 27),$$

etc... De plus la fonction alternée la plus simple que l'on puisse former avec les trois quantités s_0, s_1, s_2, ou le produit

$$(s_0 - s_1)(s_1 - s_2)(s_2 - s_0),$$

dont le carré peut se déduire de la formule (29) ou (30), offrira une valeur qui sera complétement déterminée par la formule (34).

§ II. *Conséquences diverses des principes établis dans le premier paragraphe.*

On peut, des formules établies dans le premier paragraphe, déduire diverses conséquences que nous nous bornerons à indiquer.

D'abord il résulte de la formule (34) que les trois sommes

$$s_0, \quad s_1, \quad s_2,$$

rangées d'après leur ordre de grandeur, seront trois termes consécutifs de la suite périodique

$$s_0, \quad s_1, \quad s_2, \quad s_0, \quad s_1, \quad s_2, \ldots$$

si B est négatif, et trois termes consécutifs de la suite périodique

$$s_0,\ s_2,\ s_1,\ s_0,\ s_2,\ s_1, \ldots$$

si B est positif. Ajoutons que l'ordre de grandeur des sommes

$$S_0,\ S_1,\ S_2,$$

sera, en vertu des formules (7), précisément le même que l'ordre de grandeur des sommes

$$s_0,\ s_1,\ s_2.$$

Observons encore qu'en vertu du théorème de Lagrange, les racines de l'équation (30), rangées dans leur ordre de grandeur, seront respectivement

$$S = -(3p)^{\frac{1}{2}}\mathcal{E} + \tfrac{1}{6}\alpha A, \quad S = -\tfrac{1}{3}\alpha A, \quad S = (3p)^{\frac{1}{2}}\mathcal{E} + \tfrac{1}{6}\alpha A,$$

les valeurs de α, $\mathcal{E}$ étant données par les formules

$$\alpha = 1 + \frac{A^2}{3^3 p} - \frac{6}{1.2}\frac{A^4}{3^6 p^2} + \frac{9.8}{1.2.3}\frac{A^6}{3^9 p^3} - \text{etc.} \ldots,$$

$$\mathcal{E} = 1 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\frac{A^2}{3^3 p} + \frac{5.7.9}{4.6.8}\frac{A^4}{3^6 p^2} + \text{etc.}\right),$$

et que les séries, dont les sommes représentent les seconds membres de ces formules, seront toujours convergentes, eu égard à la condition

$$A^2 < 4p.$$

Pour obtenir l'ordre de grandeur tel que nous venons de l'indiquer, il suffit d'observer que cet ordre reste le même pour toutes les valeurs de A qui vérifient la condition $A^2 < 4p$, et que les trois racines de l'équation (30), rangées d'après cet ordre, seront évidemment

$$-\sqrt{3p},\ 0,\ \sqrt{3p},$$

si l'on remplace A par zéro.

Enfin, si l'on cherche le nombre des solutions que peut admettre

chacune des formules

$$x + y \equiv z, \quad x + y + z \equiv 0, \quad (\text{mod. } p),$$

quand on prend pour x, y, z des résidus cubiques positifs et inférieurs à p, on conclura de la formule (11) que ce nombre est

$$a\varpi = \frac{p-1}{3}\,\frac{p+A-8}{9}.$$

Si l'on assujétissait x, y, z à vérifier la condition

$$x < y < z,$$

le nombre des solutions deviendrait

$$\frac{a\varpi}{1.2.3} = \frac{p-1}{2}\,\frac{p+A-8}{3^4}$$

dans le cas où 2 ne serait pas résidu cubique de p, et

$$\frac{a\varpi}{1.2.3} - \frac{1}{2}\,\varpi = \frac{p-1}{2}\,\frac{p+A-35}{3^4}$$

dans le cas contraire. D'ailleurs ce nombre de solutions sera pair, attendu que trois valeurs données de

$$x, \; y, \; z,$$

pourront être remplacées par trois autres valeurs de la forme

$$p - z, \quad p - y, \quad p - x;$$

et, pour qu'il s'évanouisse, il faudra que l'on ait, dans le premier cas,

$$p + A - 8 = 0,$$

dans le second cas, $\quad p + A - 35 = 0.$

Or ces dernières formules, jointes à la condition

$$-A < \frac{p}{2},$$

donneront, dans le premier cas,

$$\tfrac{1}{2}p < 8, \quad p < 16,$$

et dans le second cas,

$$\tfrac{1}{2}p < 35, \quad p < 70.$$

D'ailleurs les seuls nombres premiers, inférieurs à 16, et de la forme $3\varpi + 1$, sont 7 et 13, pour lesquels la condition

$$p + A - 8 = 0$$

est effectivement vérifiée; et l'on reconnaîtra pareillement que la condition

$$p + A - 35 = 0$$

se vérifie pour les nombres premiers 31, 43, qui, seuls au-dessus de 70, sont de la forme $3\varpi + 1$, et offrent des résidus cubiques dont l'un est égal à 2.

Au reste, les formules obtenues dans le premier paragraphe peuvent encore être déduites, comme je le montrerai dans un autre article, de la considération des facteurs primitifs du nombre premier p; et l'on peut, à l'aide des mêmes méthodes, établir des formules analogues qui soient relatives, non plus aux résidus cubiques, mais aux résidus des puissances supérieures à la troisième.

NOTE

SUR UN THÉORÈME DE FERMAT;

PAR M. LEBESGUE.

Théorème. « Si l'on admet que l'équation $X^n + Y^n = Z^n$ soit im-
» possible en nombres entiers, il en résultera que l'équation
» $x^{2n} + y^{2n} = z^2$ l'est également. »

Démonstration. Dans l'équation $x^{2n} + y^{2n} = z^2$ on peut toujours supposer les inconnues x, y, z premières deux à deux, de sorte qu'il y aura nécessairement deux inconnues impaires et l'une paire, puisqu'elles ne sauraient être toutes trois impaires. Il faut encore que z soit impair, puisqu'un carré pair ne saurait avoir la forme $4k + 2$. On peut, d'après cela, considérer l'équation $(2^a x)^{2n} + y^{2n} = z^2$, où x, y, z seront supposés impairs. Cela posé, en faisant $x = pq$, sous l'hypothèse de p et q impairs et premiers entre eux, il en résultera

$$z \pm y^n = 2p^{2n}, \quad z \mp y^n = 2^{2na-1}.q^{2n},$$

et par conséquent,

$$z = p^{2n} + 2^{2na-2}.q^{2n}, \quad \pm y^n = p^{2n} - 2^{2na-2}.q^{2n}.$$

1°. Pour $n = 1$, on a la solution connue

$$z = p^2 + (2^{a-1}q)^2, \quad \pm y = p^2 - (2^{a-1}q)^2, \quad x = 2^a pq;$$

2°. Pour $n = 2$, l'équation $\pm y^n = p^{2n} - 2^{2na-2}.q^{2n}$ ne peut subsister avec le signe inférieur, on prendra donc $y^2 = p^4 - 2^{4a-2}q^4$; donc si l'on pose $q = rs$, il en résultera $p^2 \pm y = 2r^4$, $p^2 \mp y = 2^{4a-3}.s^4$, et par suite l'équation $p^2 = r^4 + (2^{a-1}s)^4$, où les inconnues sont impaires et premières entre elles. Ainsi l'équation $(2^a x)^4 + y^4 = z^2$ entraîne l'équation $(2^{a-1}s)^4 + r^4 = p^2$, celle-ci entraîne semblablement $(2^{a-2}t)^4 + u^4 = v^2$, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on trouve $P^4 + Q^4 = R^2$,

où P, Q, R sont des nombres impairs, ce qui est impossible. Il est donc prouvé que $x^4 + y^4 = z^2$ est impossible, ainsi qu'on l'a déjà démontré par la méthode de Fermat. L'équation $x^{2n} + y^{2n} = z^2$ sera par conséquent impossible pour toutes les valeurs paires de n.

3°. Pour le cas de n impair, l'équation $\pm y^n = p^{2n} - 2^{2an-2}.q^{2n}$ pourra s'écrire $y^n = p^{2n} - 2^{2an-2}.q^{2n}$, en supposant y positif ou négatif. Soit donc $y = rs$, en supposant r et s impairs premiers entre eux, et l'un d'eux négatif s'il est nécessaire; il faudra poser $r^n = p^n + 2^{an-1}.q^n$, $s^n = p^n - 2^{an-1}.q^n$; d'où $r^n - s^n = 2^a q^n$. Quel que soit le signe de s, cette dernière équation a toujours la forme $X^n + Y^n = Z^n$; donc l'impossibilité de cette équation entraîne celle de l'équation $x^{2n} + y^{2n} = z^2$.

Il résulte donc des théorèmes démontrés par Fermat et Euler, par MM. Legendre et Dirichlet, et en dernier lieu par M. Lamé, que l'impossibilité de l'équation $x^{4n} + y^{4n} = z^2$, et celle de l'équation $x^n + y^n = z^n$ pour $n = 3, 5, 7$, entraînent celle de l'équation $x^{2n} + y^{2n} = z^2$ pour

$$n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 - 12 - 14, 15, 16 - 18 - 20, 21, 22 - 24, 25, 26, 27, 28 - 30, \text{etc.}$$

Les recherches que j'ai faites sur l'équation $x^n + y^n = z^n$ m'ont conduit à démontrer l'impossibilité de quelques équations indéterminées dont je m'occuperai dans un autre article.

NOTE

SUR UNE FORMULE DE M. CAUCHY:

PAR M. LEBESGUE.

Dans le *Compte rendu des séances de l'Académie des Sciences*, 6 avril 1840 [*], M. Cauchy a montré que les théorèmes les plus élevés de la théorie des résidus quadratiques peuvent être déduits de la formule

$$a^{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{1}{2}+e^{-a^2}+e^{-4a^2}+e^{-9a^2}+\ldots\right)=b^{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{1}{2}+e^{-b^2}+e^{-4b^2}+e^{-9b^2}+\ldots\right), \quad (1)$$

où l'on suppose $ab=\pi$, formule dont la démonstration remonte à l'année 1817.

La formule de M. Cauchy ne diffère que par la forme de celle-ci,

$$\pi+2\pi\sum e^{-4k\pi^2n^2}=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{k}}+\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{k}}\sum e^{-\frac{n^2}{4k}}, \quad (2)$$

les sommes étant prises de $n=0$ à $n=\infty$: car si l'on fait $\frac{1}{4k}=a^2$, $4k\pi^2=b^2$, d'où $ab=\pi$, on retrouve la formule (1). L'équation (2) a été donnée par M. Poisson dans le *Journal de l'École Polytechnique*, XIXe cahier, page 420.

La supposition $a^2=\frac{1}{4k}=\pi x$ change les formules (1) et (2) en

$$\sqrt{\frac{1}{x}}=\frac{1+2e^{-\pi x}+2e^{-4\pi x}+2e^{-9\pi x}+\ldots}{1+2e^{-\frac{\pi}{x}}+2e^{-\frac{4\pi}{x}}+2e^{-\frac{9\pi}{x}}+\ldots}. \quad (3)$$

M. Jacobi a montré depuis long-temps que cette formule (3) est une conséquence de la théorie des fonctions elliptiques.

On sait, en effet, que si l'on pose

[*] L'article cité se trouve reproduit ci-dessus (page 154).

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \mathrm{K}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}} = \mathrm{K}', \quad k^2+k'^2=1,$$

et

$$e^{-\frac{\pi \mathrm{K}'}{\mathrm{K}}} = q,$$

on aura $\sqrt{\frac{2\mathrm{K}}{\pi}} = 1+2q+2q^4+2q^9+\ldots$ (V. *Fund. nova*, p. 30, 85, 184.

Cela posé, voici textuellement la démonstration de M. Jacobi (Journal de M. Crelle, tome III, page 307) :

« M. Poisson, dans ses savantes recherches sur les intégrales défi-
» nies, a fait connaître plusieurs propriétés de la fonction Θx [*]. Les
» méthodes délicates propres à cet illustre géomètre trouvent une
» belle vérification dans la théorie des fonctions elliptiques. Par exem-
» ple, M. Poisson démontre, dans le XIXe cahier du *Journal de l'École*
» *Polytechnique*, la formule remarquable

$$\sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{1+2e^{-\pi x}+2e^{-4\pi x}+\ldots}{1+2e^{-\frac{\pi}{x}}+2e^{-\frac{4\pi}{x}}+\ldots}.$$

» Soit $x = \frac{\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}$; en mettant au lieu du module k son complément
» $k' = \sqrt{1-k^2}$, x deviendra $\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{K}'} = \frac{1}{x}$. Or on a

$$\sqrt{\frac{2\mathrm{K}}{\pi}} = 1+2q+2q^4+2q^9+\ldots = 1+2e^{-\pi x}+2e^{-4\pi x}+2e^{-9\pi x}+\ldots,$$

» et par suite, en changeant K en K',

$$\sqrt{\frac{2\mathrm{K}'}{\pi}} = 1+2e^{-\frac{\pi}{x}}+2e^{-\frac{4\pi}{x}}+2e^{-\frac{9\pi}{x}}+\ldots;$$

» de là on tire sur-le-champ la formule de M. Poisson. »

---

[*] La fonction Θx, ou $\Theta\left(\frac{2\mathrm{K}x}{\pi}\right)$ selon les *Fund. nova*, est

$$1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+2q^{16}\cos 8x-\ldots = (1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots$$
$$\times(1-2q\cos 2x+q^4)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\ldots$$

Cette belle formule est prouvée directement et indépendamment de la théorie des fonctions elliptiques, à la page 180 des *Fund. nova*.

On peut donc déduire de la théorie des fonctions elliptiques, tous les résultats que M. Cauchy a tirés de sa formule. C'est un nouvel exemple à joindre à ceux déjà donnés par M. Jacobi (Journal de M. Crelle, tome II, pages 191 et 309).

De plus, comme la division de la lemniscate se rapporte elle-même aux fonctions elliptiques, on peut voir par un article de M. Jacobi (Journal de M. Crelle, tome XIX, page 314) et par l'extrait d'une lettre de M. Lejeune-Dirichlet à M. Liouville (page 72 de ce volume), que les propriétés des nombres de la forme $a + b\sqrt{-1}$ se déduiront également de la théorie des fonctions elliptiques.

Au reste, beaucoup de propriétés des nombres sont des conséquences plus ou moins immédiates de certaines identités. Les unes sont empruntées à l'algèbre élémentaire, leur nombre pourrait être augmenté. D'autres sont empruntées à une algèbre plus élevée : telles sont les formules singulières de M. Gauss et autres semblables. D'autres dépendent de l'analyse infinitésimale, ou de certaines intégrales définies, telles que les fonctions elliptiques et les intégrales eulériennes de seconde espece. Ces dernières applications deviendront sans doute de plus en plus nombreuses et reculeront les bornes de l'arithmétique transcendante: mais peut-être conviendra-t-il, cependant, de chercher des démonstrations purement arithmétiques des théorèmes obtenus par cette voie. Ainsi les belles propositions de M. Dirichlet sur le nombre des formes réduites pour un déterminant donné, par leur élégance et leur simplicité, permettent d'espérer qu'on en obtiendra un jour quelque démonstration plus arithmétique. On a déjà des exemples de ces sortes de simplifications. Ainsi M. Jacobi, après avoir tiré de la considération des fonctions elliptiques un théorème remarquable sur le nombre de solutions de l'équation

$$4n = x^2 + y^2 + z^2 + u^2,$$

en a donné une autre plus élémentaire et fort ingénieuse : *In gratiam virorum arithmeticorum* (voyez Journal de M. Crelle, tome XII, page 167, *De compositione numerorum e quatuor quadratis*).

OBSERVATIONS

SUR UN MÉMOIRE DE M. PAUL BRETON;

PAR M. CH. DELAUNAY,
Répétiteur à l'École Polytechnique

M. Breton vient de publier dans ce Journal un Mémoire sur les forces centrifuges développées dans le mouvement des corps qui roulent; les résultats auxquels il est arrivé m'ont paru tellement en opposition avec ce qu'on démontre journellement dans les cours de mécanique, que j'ai voulu m'assurer s'ils étaient bien exacts; j'ai reconnu, en effet, que la théorie exposée dans ce Mémoire est complétement fausse, et c'est ce que je vais tâcher d'expliquer dans cette Note.

Considérons une roue bien centrée, douée d'un mouvement de rotation uniforme autour de son axe, et supposons d'abord que l'axe ne se déplace pas. En vertu de ce mouvement, un point quelconque m de la roue, situé à une distance r de l'axe, décrit d'un mouvement uniforme un cercle de rayon r; la direction de la vitesse constante v de ce point change à chaque instant, et ce changement de direction est dû aux liaisons qui existent entre le point m et les autres points du système; la force qui le produit est $\frac{mv^2}{r}$, et par conséquent le point m réagit sur le système, comme le ferait une force égale à $\frac{mv^2}{r}$, et de sens contraire à la précédente. C'est ainsi qu'on est conduit à la considération des forces centrifuges qui se développent dans le mouvement de rotation d'un corps autour d'une droite, et dans le cas actuel, puisque nous supposons la roue bien centrée, nous trouverions qu'il y a équilibre entre toutes les forces centrifuges, seules forces qui résultent du mouvement de la roue.

Si maintenant nous supposons que l'axe de la roue ait en même temps un mouvement uniforme de translation dirigé perpendiculairement à sa

longueur, nous retomberons dans le cas qui a d'abord été examiné en détail par M. Breton, c'est-à-dire dans le cas d'une roue qui roule sur un plan horizontal. Alors le point m ne décrit plus un cercle, mais bien une courbe du genre des cycloïdes et *la vitesse de ce point change à chaque instant, non-seulement de direction, mais aussi de grandeur*. Ces deux changements sont encore dus aux liaisons qui existent entre le point m et les autres points de la roue; les forces qui les produisent sont : 1° une force dirigée suivant le rayon de courbure ρ de la trajectoire du point m, et égale à $\frac{mv^2}{\rho}$; 2° une force dirigée suivant la tangente à la courbe, dans le sens du mouvement, et égale à $m\frac{dv}{dt}$. Le point m réagit donc sur les autres points du système comme le feraient deux forces égales et contraires aux précédentes. M. Breton n'a pensé qu'à la première de ces deux forces, et c'est ce qui l'a conduit à des résultats aussi singuliers; s'il eût tenu compte de la force tangentielle, il aurait trouvé que toutes les forces que le mouvement développe dans le corps se font équilibre, comme je vais facilement le faire voir.

J'emploierai pour cela les notations du Mémoire relatives à la figure de la page 121, et j'appellerai de plus ω l'angle OMC.

L'expression de la force centrifuge est (page 124)

$$f = m\frac{V^2}{R^2}(n - R\cos\psi).$$

Appelons k la force tangentielle dirigée en sens contraire du mouvement, et nous aurons

$$k = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2s}{dt^2};$$

or les valeurs de x, y et $\frac{dy}{dx}$, en fonction de φ, donnent

$$\frac{ds}{dt} = \frac{dx}{dt}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{d\varphi}{dt}\sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr\cos\varphi};$$

on en déduit, en remarquant que $\frac{d\varphi}{dt}$ est constant,

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \frac{Rr\sin\varphi}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr\cos\varphi}} = \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \frac{Rr\sin z}{n}.$$

Le triangle OCM donne $\frac{r \sin \varphi}{n} = \sin \psi$; d'ailleurs $\frac{d\varphi}{dt}$ est égal à $\frac{V}{R}$; on a donc enfin pour la force tangentielle cherchée,

$$k = m \frac{V^2}{R} \sin \psi.$$

Pour trouver la résultante des deux forces f et k, nous remarquerons que le triangle OCM donne $\sin \omega = \frac{R \sin \psi}{r}$, et par suite,

$$\cos \omega = \frac{\sqrt{r^2 - R \sin \psi^2}}{r} = \frac{n - R \cos \psi}{r};$$

si donc nous projetons les forces f et k sur la tangente au cercle de rayon r passant par le point M, nous trouverons pour la somme des projections

$$f \sin \omega - k \cos \omega = 0;$$

nous trouverons de même pour la somme des projections F des forces f et k sur le prolongement du rayon OM,

$$F = f \cos \omega + k \sin \omega = m \frac{V^2}{R^2} \cdot \frac{n^2 + R^2 - 2nR \cos \psi}{r} = m \frac{V^2}{R^2} r$$

Les deux forces f et k ont donc pour résultante une force F dirigée suivant le prolongement du rayon OM, et égale à la force centrifuge qui se développait au point m lorsque la roue n'avait qu'un mouvement uniforme de rotation autour de son axe; il y a donc équilibre entre toutes les forces développées dans la roue par le mouvement de roulement. On peut, du reste, voir *à priori* et sans calcul qu'il en doit être ainsi; mais il était bon de montrer comment cette conséquence résulte des formules mêmes de M. Breton.

SUR L'IRRATIONNALITÉ DU NOMBRE $e = 2,718\ldots$;

PAR J. LIOUVILLE.

On prouve dans les éléments que le nombre e, base des logarithmes népériens, n'a pas une valeur rationnelle. On devrait, ce me semble, ajouter que la même méthode prouve aussi que e ne peut pas être racine d'une équation du second degré à coefficients rationnels, en sorte que l'on ne peut pas avoir $ae + \frac{b}{e} = c$, a étant un entier positif et b, c, des entiers positifs ou négatifs. En effet, si l'on remplace dans cette équation e et $\frac{1}{e}$ ou e^{-1} par leurs développements déduits de celui de e^x, puis qu'on multiplie les deux membres par $1.2.3\ldots n$, on trouvera aisément

$$\frac{a}{n+1}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \ldots\right) \pm \frac{b}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+2} + \ldots\right) = \mu,$$

μ étant un entier. On peut toujours faire en sorte que le facteur

$$\pm \frac{b}{n+1}$$

soit positif; il suffira de supposer n pair si b est <0 et n impair si b est >0; en prenant de plus n très grand, l'équation que nous venons d'écrire conduira dès lors à une absurdité; car son premier membre étant essentiellement positif et très petit, sera compris entre 0 et 1, et ne pourra pas être égal à un entier μ. Donc, etc.

ADDITION

A LA

NOTE SUR L'IRRATIONNALITÉ DU NOMBRE e;

PAR J. LIOUVILLE.

On peut étendre au carré du nombre e le théorème que nous avons démontré dans le dernier cahier de ce Journal; en d'autres termes, on peut prouver que l'équation $ae^2 + be^{-2} = c$ est impossible, a désignant un entier positif, et b, c des entiers positifs, nuls ou négatifs.

En effet, représentons avec Legendre par $\mathrm{E}(x)$ la partie entière contenue dans un nombre positif quelconque x: la somme

$$\mathrm{E}\left(\frac{m}{2}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{m}{4}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{m}{8}\right) + \ldots\ldots$$

indiquera combien de fois le facteur 2 entre dans le produit $1.2.3\ldots m$: cette somme est évidemment plus petite que $\frac{m}{2} + \frac{m}{4} + \frac{m}{8} + \ldots$, c'est-à-dire plus petite que m; de plus, elle a pour valeur $m-1$ ou $m-2$ respectivement, lorsque m est une puissance exacte de 2 ou une telle puissance augmentée d'une unité; on voit par là que la fraction irréductible équivalente à $\frac{2^m}{1.2.3\ldots m}$ est de la forme $\frac{2^{\alpha_m}}{p_m}$, α_m étant un exposant essentiellement positif qui devient égal à 1 quand on a $m = 2^i$ et égal à 2 quand $m = 2^i + 1$; ajoutons que si n est un entier $> m$, p_n sera divisible par p_m.

Cela posé, j'observe que, d'après une formule connue, on a

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\left(1 + \frac{xe^{\theta x}}{n+1}\right).$$

θ désignant un certain nombre compris entre 0 et 1. Soient $\frac{\beta}{\gamma}$ les va-

leurs de $\frac{e^{bx}}{n+1}$ relatives à $x=2$ et $x=-2$, lesquelles deviendront plus petites que tout nombre donné, en prenant n suffisamment grand. En faisant, comme ci-dessus,

$$\frac{2^m}{1.2.3\ldots m}=\frac{2^{\alpha_m}}{p_m},$$

nous obtiendrons

$$e^2=1+\ldots+\frac{2^{\alpha_m}}{p_m}\ldots\ldots+\frac{2^{\alpha_n}}{p_n}(1+2\beta),$$

$$e^{-2}=1-\ldots\pm\frac{2^{\alpha_m}}{p_m}\ldots\ldots\pm\frac{2^{\alpha_n}}{p_n}(1-2\gamma).$$

Substituant ces valeurs dans l'équation $ae^2+be^{-2}=c$, puis multipliant les deux membres par p_n, on trouve ensuite, sans difficulté,

$$a.2^{\alpha_n}.2\beta\mp b.2^{\alpha_n}.2\gamma=\mu,$$

μ étant un entier. Or cette équation est absurde; en effet on pourra rendre de même signe les deux facteurs a et $\mp b$; il suffira, par exemple, de prendre $n=2^i$ si b est <0, et $n=2^i+1$ si b est >0; d'ailleurs, dans la première de ces deux hypothèses, on aura $\alpha_n=1$, et dans la seconde, $\alpha_n=2$; dès lors, en donnant à i une valeur très considérable, on voit que la somme $a.2^{\alpha_n}.2\beta\mp b.2^{\alpha_n}.2\gamma$ sera essentiellement positive et très petite, de sorte qu'elle ne pourra pas être égale à un entier μ. Donc, etc.

MÉMOIRE D'ANALYSE INDÉTERMINÉE,

Démontrant que l'équation $x^7 + y^7 = z^7$ est impossible en nombres entiers;

PAR G. LAMÉ.

De tous les théoremes sur les nombres, énoncés par Fermat, un seul reste incomplétement démontré. Ce théorème dit que l'équation $x^n + y^n = z^n$ est impossible en nombres entiers, lorsque l'exposant n est plus grand que 2. Euler a démontré cette impossibilité pour $n = 3$, et par suite pour tout multiple de 3, $(n = 3i)$; Fermat lui-même pour $n = 4$, $(n = 4i)$; M. Dirichlet pour $n = 14$, $(n = 14i)$; enfin Legendre, en complétant un travail de M. Dirichlet, pour $n = 5$, $(n = 5i)$.

Je me propose dans ce Mémoire d'établir la même impossibilité pour $n = 7$, et conséquemment aussi pour tous les multiples de 7, impairs et non divisibles par 3 ou 5, les seuls qui ne rentrent pas dans les cas précédemment traités. Je présente ici cette démonstration sans recourir à aucune théorie étrangère, et sans m'appuyer sur les propriétés secondaires que Legendre a réunies dans le second supplément à la première édition de sa *Théorie des Nombres*. Tous les lemmes nécessaires à cette démonstration particulière sont démontrés directement, et uniquement en vue du nombre 7.

§ I.

Si l'équation $x^7 + y^7 = z^7$ est possible en nombres entiers, on peut supposer l'existence d'une solution pour laquelle x, y, z n'auraient aucun facteur commun; car, si Δ représente le plus grand commun diviseur entre trois nombres Δx, Δy, Δz, qui vérifient l'équation proposée, on pourra diviser l'identité $(\Delta x)^7 + (\Delta y)^7 = (\Delta z)^7$ par Δ^7, et

l'on aura l'équation

$$(1) \qquad x^7 + y^7 = z^7,$$

dans laquelle x, y, z, ne peuvent plus être divisibles tous les trois par un même nombre. Alors x, y, z, sont nécessairement premiers deux à deux, car un facteur premier δ ne pourrait diviser deux de ces nombres sans diviser le troisième.

Des trois nombres x, y, z, un est nécessairement pair, et les deux autres impairs. Il serait possible qu'aucun d'eux ne fût divisible par 7 : car les nombres premiers avec 7 étant compris dans les six formes $7i \pm 1$, ± 2, ± 3, leurs septièmes puissances le sont dans celles-ci : $49i \pm 1$, ± 19, ± 18, et la somme de trois des six restes ± 1, ± 19, ± 18, peut être nulle. Ainsi, il y a lieu de considérer deux cas différents : 1° celui où 7 ne divise ni x, ni y, ni z; 2° celui où 7 divise un de ces nombres.

Premier cas.

§ II.

L'équation proposée (1) étant mise successivement sous les trois formes

$$(2) \quad \begin{cases} x^7 = (z-y)[(z-y)^6 + 7y(z-y)^5 + 3.7y^2(z-y)^4 + 5.7y^3(z-y)^3 + 5.7y^4(z-y)^2 + 3.7y^5(z-y) + 7y^6] = (z-y)X, \\ y^7 = (z-x)[(z-x)^6 + 7x(z-x)^5 + 3.7x^2(z-x)^4 + 5.7x^3(z-x)^3 + 5.7x^4(z-x)^2 + 3.7x^5(z-x) + 7x^6] = (z-x)Y, \\ z^7 = (x+y)[(x+y)^6 - 7y(x+y)^5 + 3.7y^2(x+y)^4 - 5.7y^3(x+y)^3 + 5.7y^4(x+y)^2 - 3.7y^5(x+y) + 7y^6] = (x+y)Z, \end{cases}$$

X et $(z-y)$, ou Y et $(z-x)$, ou Z et $(x+y)$ ne pourraient avoir d'autre facteur premier commun que 7; car δ, nombre premier, divisant X et $(z-y)$, ou Y et $(z-x)$, ou Z et $(x+y)$, diviserait $7y^6$ et $(z-y)$, ou $7x^6$ et $(z-x)$, ou $7y^6$ et $(x+y)$; et si δ était autre que 7, il diviserait y et $(z-y)$, d'où y et z, ou x et $(z-x)$, d'où x et z, ou y et $(x+y)$, d'où y et x. Mais dans le cas actuel, x, y, z sont tous les trois premiers avec 7; donc les six nombres X, $(z-y)$, Y, $(z-x)$, Z, $(x+y)$, sont tous premiers entre eux. Ce qui conduit aux trois décompositions suivantes :

$$(3) \quad \begin{cases} x = m\mu, & X = m^7, & z - y = \mu^7; \\ y = n\nu, & Y = n^7, & z - x = \nu^7; \\ z = p\rho, & Z = p^7, & x + y = \rho^7; \end{cases}$$

les six nombres m, μ, n, ν, p, ρ, étant premiers entre eux.

Les équations (3) donnent aisément

$$x + y - z = \mu(m - \mu^6) = \nu(n - \nu^6) = \rho(\rho^6 - p).$$

La valeur commune des trois derniers produits étant divisible séparément par μ, par ν, par ρ, facteurs premiers entre eux, le sera nécessairement par le produit de ces facteurs, et l'on pourra poser

$$(4) \qquad \mu(m - \mu^6) = \nu(n - \nu^6) = \rho(\rho^6 - p) = A\mu\nu\rho = x + y - z;$$

A étant un nombre entier. On déduit de là

$$(5) \qquad m = \mu^6 + A\nu\rho, \quad n = \nu^6 + A\rho\mu, \quad p = \rho^6 - A\mu\nu.$$

D'où il suit que le nombre A est premier avec μ, ν, ρ; car si A et μ, par exemple, avaient un facteur premier commun δ, m serait divisible par δ, d'après la première (5); m et μ ne seraient donc pas premiers entre eux. Par la même raison, A est premier avec m, n, p; ainsi A est premier avec x, y, z. Les groupes (4) et (5) donnent successivement

$$A\mu\nu\rho = x + y - z = m\mu + n\nu - p\rho = \mu^7 + \nu^7 - \rho^7 + 3A\mu\nu\rho;$$

ce qui donne la relation

$$(6) \qquad \rho^7 - \nu^7 - \mu^7 = 2A\mu\nu\rho.$$

§ III.

La troisième colonne du groupe (3) conduit aux valeurs suivantes

$$2x = \mu^7 - \nu^7 + \rho^7, \quad 2y = -\mu^7 + \nu^7 + \rho^7, \quad 2z = \mu^7 + \nu^7 + \rho^7,$$

qui transforment ainsi l'équation (1)

$$(7) \qquad (\mu^7 - \nu^7 + \rho^7)^7 + (-\mu^7 + \nu^7 + \rho^7)^7 = (\mu^7 + \nu^7 + \rho^7)^7.$$

Mais on a généralement, comme il est facile de le vérifier par le développement des puissances indiquées,

$$(8) \qquad \begin{cases} (c + b + a)^7 - (c - b + a)^7 - (c + b - a)^7 + (c - b - a)^7 \\ = 7.8abc\,[3(a^4 + b^4 + c^4) + 10(a^2b^2 + c^2a^2 + b^2c^2)]; \end{cases}$$

si donc on pose, pour simplifier,

$$(9) \qquad \mu^7 = a, \quad \nu^7 = b, \quad \rho^7 = c,$$

l'équation (8) est réduite par celle (7) à

$$(10) \quad (c-b-a)^7 = 7.8abc[3(a^4+b^4+c^4)+10(a^2b^2+c^2a^2+b^2c^2)];$$

et l'équation (6) donnant

$$c-b-a = 2A\mu\nu\rho, \text{ et } (c-b-a)^7 = 2^7A^7abc,$$

cette valeur substituée, l'équation (10) devient

$$(11) \qquad 2^4A^7 = 7[3(a^4+b^4+c^4)+10(a^2b^2+c^2a^2+b^2c^2)];$$

d'où l'on voit que A est nécessairement divisible par 7.

L'équation (11), combinée avec celle (6), démontre que A est essentiellement un carré. Voici comment s'établit cette propriété, importante pour la question actuelle.

Si l'on résout l'équation (11) par rapport à a^2, il vient

$$3a^2 = -5(b^2+c^2) + 2\sqrt{4b^4+5b^2c^2+4c^4+\tfrac{3}{7}2^2A^7};$$

la quantité soumise au radical devant être un carré φ^2, si l'on pose, pour simplifier, $b^2+c^2 = \psi$, on aura

$$(12) \qquad 3a^2 = 2\varphi - 5\psi, \quad \tfrac{12}{7}A^7 = \varphi^2 + 3b^2c^2 - 4\psi^2;$$

mais l'équation (6) donne, en désignant par P le produit $\mu\nu\rho$,

$$a = c-b-2AP, \quad a^2 = \psi - 2cb - 4AP(c-b-AP),$$

ou simplement, en remarquant que $c-b-AP = a+AP = x$,

$$a^2 = \psi - 2cb - 4APx;$$

cette valeur de a^2 substituée dans la première des équations (12) donne $\varphi = 4\psi - 3cb - 6APx$. Enfin cette valeur de φ transforme facilement la seconde équation (12) dans la suivante :

$$(13) \quad A[\tfrac{1}{7}A^6 + Px(4\psi - 3cb - 3APx)] = (\psi - cb)^2 = (b^2 - cb + c^2)^2.$$

Or, dans le premier membre, A est premier avec la parenthèse; car un facteur premier δ, qui diviserait A et cette parenthèse, diviserait le produit $Px(4\psi - 3cb)$. Mais A est premier avec P et avec x; δ diviserait donc $(4\psi - 3cb)$; divisant le second membre de l'équation (13), ou $(\psi - cb)$, δ diviserait $(4\psi - 3cb) - 4(\psi - cb) = cb = \rho^7 \nu^7$, c'est-à-dire ρ ou ν, qui ne doivent avoir aucun facteur commun avec A. D'après cela, l'équation (13) ne pourra se décomposer que de la manière suivante :

$$(14)\quad b^2 - cb + c^2 = BG,\quad A = B^2,\quad \tfrac{1}{7}A^6 + Px(4\psi - 3cb - 3APx) = G^2.$$

B et G étant des nombres premiers entre eux. *Ainsi* A *est un carré*. Soit pris $D = G - 2BPa$; la première des équations (14), combinée avec la relation (6), devient alors

$$(15)\qquad a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca + ab = BD.$$

§ IV.

Si l'on réunit les équations (6), (15) et (11), on formera le groupe suivant :

$$(16)\quad \begin{cases} abc = P^7; \\ c - a - b = 2B^2P; \\ a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca + ab = BD; \\ 3(a^4 + b^4 + c^4) + 10(a^2b^2 + c^2a^2 + b^2c^2) = \frac{16}{7}B^{14}. \end{cases}$$

Il s'agit d'éliminer a, b, c, entre ces quatre équations, afin d'obtenir une équation finale entre les trois nombres B, D, P. La seconde (16), élevée au carré et combinée avec la troisième, donne

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2BD - 4B^4P^2,\quad -bc - ca + ab = 4B^4P^2 - BD;$$

d'où il est facile de conclure successivement, par l'élévation au carré, et en ayant égard aux deux premières (16),

$$a^4 + b^4 + c^4 + 2(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) = (2BD - 4B^4P^2)^2,$$
$$b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 = (4B^4P^2 - BD)^2 - 4B^2P^8.$$

Enfin ces valeurs substituées dans la quatrième (16), donnent pour l'équation finale cherchée,

$$\tfrac{16}{7}B^{14} = 3(2BD - 4B^4P^2)^2 + 4(4B^4P^2 - BD)^2 - 16B^2P^8.$$

Si l'on développe les carrés indiqués dans le second membre, cette dernière équation devient divisible par $16B^2$, et peut s'écrire ainsi

$$(17) \qquad 7\left(\frac{B^6}{7}\right)^2 + P^8 = D^2 - 5B^3P^2D + 7B^6P^4;$$

B est divisible par 7, comme on l'a vu (§ III); ainsi $\frac{B^6}{7}$ est un nombre entier.

§ V.

On établit facilement que $P = \mu\nu\rho$ est un nombre pair; en effet, l'équation $x + y - z = AP$ exige que AP soit divisible par 2, puisque des trois nombres x, y, z, un seul est pair et les deux autres sont impairs; or A ne saurait être divisible par 2, qui divise ou x, ou y, ou z, avec lesquels A doit être premier; donc 2 divisera P, c'est-à-dire l'un des trois nombres μ, ν, ρ; et A ou B^2, et par suite B sera un nombre impair. D'ailleurs un des trois nombres μ, ν, ρ, ou des trois autres $a = \mu^7$, $b = \nu^7$, $c = \rho^7$, étant pair, le premier membre de la troisième équation (16) est essentiellement impair, d'où il suit que non-seulement B, mais aussi D est impair.

Il résulte de là que l'équation (17) est impossible en nombres entiers, avec ces conditions; car elle peut se mettre sous la forme

$$P^2(7B^6P^2 - 5B^3D - P^6) = 7\left(\frac{B^6}{7}\right)^2 - D^2.$$

et le premier membre, étant divisible par P^2, est de la forme $4i$, puisque P est pair; tandis que les carrés de nombres impairs $\left(\frac{B^6}{7}\right)^2$ et D^2 étant de la forme $(8n+1)$, le second membre sera de la forme $(8n+6)$ ou $(4i+2)$. Il résulte de l'incompatibilité de ces deux formes, que l'équation (17) est impossible avec les conditions imposées aux nombres B, D, P; et par conséquent que l'équation (1) ne saurait être satisfaite par des nombres entiers x, y, z, sans que 7 soit facteur de l'un de ces nombres.

Deuxième cas.

§ VI.

L'un des nombres x, y, z, est divisible par 7. L'équation (1) peut toujours être mise sous les trois formes (2). Si 7 divise x, il divisera sept fois x^7, ne pourra diviser X qu'une seule fois, puisqu'il ne divise pas y, et divisera six fois $(z-y)$; les nombres $(z-x)$, Y, $(x+y)$, Z, seront premiers entre eux; on aura ainsi les trois décompositions

$$(18)\quad \begin{cases} x = 7m\mu, & X = 7m^7, & z-y = 7^6\mu^7 = a; \\ y = n\nu, & Y = n^7, & z-x = \nu^7 = b; \\ z = p\rho, & Z = p^7, & x+y = \rho^7 = c; \end{cases}$$

et l'on déduira de ce groupe, comme de celui (3), les conséquences suivantes :

$$(19)\quad \begin{cases} x+y-z = 7\mu(m-7^5\mu^6) = \nu(n-\nu^6) = \rho(\rho^6-p) = 7A\mu\nu\rho = 7AP; \\ m = 7^5\mu^6 + A\nu\rho, \qquad n = \nu^6 + 7A\rho\mu, \quad p = \rho^6 - 7A\mu\nu; \\ 7AP = x+y-z = 7m\mu + n\nu - p\rho = 7^6\mu^7 + \nu^7 - \rho^7 + 3.7AP; \\ c-a-b = 2.7AP. \end{cases}$$

A est un nombre entier, nécessairement premier avec 7P; car 7 ne pourrait diviser A sans diviser m, d'où il suivrait que $X = 7m^7$ contiendrait plus d'une fois le facteur 7; et un facteur premier δ ne pourrait diviser à la fois A et μ, ou ν, ou ρ, sans diviser aussi m, ou n, ou p, d'où il suivrait que les nombres m, μ, n, ν, p, ρ, ne seraient pas premiers entre eux. Par la même raison, A est premier avec m, n, p, et par suite avec x, y, z; d'où il suit que A est impair, car 2 divise l'un des nombres x, y, z; or 7AP est pair comme $x+y-z$, donc $P = \mu\nu\rho$ est pair, c'est-à-dire que l'un des trois nombres μ, ν, ρ, est divisible par 2, tandis que m, n, p, restent tous les trois impairs.

On déduit encore du groupe (18), troisième colonne,

$$2x = c-b+a, \quad 2y = c+b-a, \quad 2z = c+b+a,$$

ce qui transforme l'équation (1) en celle-ci,

$$(c+b+a)^7 - (c-b+a)^7 - (c+b-a)^7 = 0,$$

et la formule générale (8) se réduit encore à celle (10). Or on a actuellement $7abc = (7\mu\nu\rho)^7$, et $c - b - a = 2.7A\mu\nu\rho$; la substitution de ces valeurs dans la formule (10) donne, en supprimant le facteur commun $(7\mu\nu\rho)^7$,

$$(20) \qquad 2^4 A^7 = 3(a^4 + b^4 + c^4) + 10(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2).$$

Si 7 divisait z, et non x, le groupe (18) serait remplacé par celui-ci

$$(18\ bis) \qquad \begin{cases} x = m\mu, & X = m^7, & z - y = \mu^7 = a; \\ y = n\nu, & Y = n^7, & z - x = \nu^7 = b; \\ z = 7p\rho, & Z = 7p^7, & x + y = 7^6\rho^7 = c; \end{cases}$$

et les formules (19) deviendraient

$$(19\ bis) \qquad \begin{cases} x + y - z = \mu(m - \mu^6) = \nu(n - \nu^6) = 7\rho(7^5\rho^6 - p) = 7A\mu\nu\rho = 7AP; \\ \qquad m = \mu^6 + 7A\nu\rho, \quad n = \nu^6 + 7A\rho\mu, \quad p = 7^5\rho^6 - A\mu\nu; \\ 7AP = x + y - z = m\mu + n\nu - 7p\rho = \mu^7 + \nu^7 - 7^6\rho^7 + 3.7AP; \end{cases}$$

on démontrerait de la même manière que le nombre entier A est premier avec μ, ν, 7ρ, m, n, p, x, y, z, et conséquemment impair, tandis que P est pair. Enfin la relation de même forme $c - a - b = 2.7AP$, et les valeurs de $2x$, $2y$, $2z$, déduites de la troisième colonne (18 *bis*), conduiraient de la même manière à l'équation (20).

Ainsi, quel que soit celui des trois nombres x, y, z, que 7 divise, l'équation (20) subsiste; A étant toujours le nombre qui vérifie l'équation

$$(21) \qquad c - b - a = 2.7AP = 2.7A\mu\nu\rho;$$

les valeurs de c, b, a, étant

$$(22) \qquad \begin{cases} a = 7^6\mu^7, & b = \nu^7, & c = \rho^7, & \text{si 7 divise } x; \\ a = \mu^7, & b = 7^6\nu^7, & c = \rho^7, & \text{si 7 divise } y; \\ a = \mu^7, & b = \nu^7, & c = 7^6\rho^7, & \text{si 7 divise } z; \end{cases}$$

et l'on a, dans tous les cas,

$$(23) \qquad \begin{cases} 7abc = (7\mu\nu\rho)^7 = 7^7 P^7; \\ x = a + 7AP, \quad y = b + 7AP, \quad z = c - 7AP. \end{cases}$$

§ VII.

Si l'on résout l'équation (20) par rapport à a^2, il vient

$$3a^2 = -5(b^2+c^2) + 2\sqrt{4b^4 + 5c^2b^2 + 4c^4 + 12A^7},$$

et le radical devant être un nombre entier φ, on aura, en posant $b^2+c^2=\psi$,

$$(24) \qquad 3a^2 = 2\varphi - 5\psi, \quad 12A^7 = \varphi^2 + 3b^2c^2 - 4\psi^2.$$

Mais l'équation (21) donne

$$a = c - b - 2.7AP, \quad a^2 = \psi - 2bc - 4.7AP(c - b - 7AP),$$

ou, comme $\qquad c - b - 7AP = a + 7AP = x,$

plus simplement $\qquad a^2 = \psi - 2bc - 4.7APx;$

cette valeur de a^2, substituée dans la première (24), donne

$$\varphi = 4\psi - 3bc - 6.7APx;$$

enfin cette valeur de φ, substituée dans la dernière (24), la rend divisible par 12; et le résultat, mettant A comme facteur, est

$$(25) \quad A[A^6 + 7Px(4\psi - 3bc - 3.7APx)] = (\psi - bc)^2 = (b^2 - bc + c^2)^2.$$

Si A, premier avec 7P et avec x, et divisant $(\psi - bc)^2$, avait un facteur premier δ commun avec la parenthèse, qu'il multiplie dans le premier membre de l'équation (25), δ diviserait $(4\psi - 3bc)$ et $(\psi - bc)$, par suite bc, conséquemment b ou c, ι ou ρ; A ne serait donc pas premier avec 7P. Donc le seul moyen de décomposer l'équation (25) est celui-ci :

$$(26) \quad b^2 - bc + c^2 = BG, \quad A = B^2, \quad A^6 + 7Px(4\psi - 3bc - 3.7APx) = G^2;$$

B et G étant deux nombres premiers entre eux, et tous les deux impairs, car $(b^2 - bc + c^2)$ est toujours impair, que l'un des deux nombres b et c soit pair, ou qu'ils soient tous les deux impairs, seuls cas

possibles. Il est donc démontré que A *est un carré*. Soit pris $D = G - 2.7BPa$, d'où $G = D + 2.7BPa$, la première (26) devient

$$b^2 - bc + c^2 = BD + 2.7B^2Pa = BD + a(c - b - a),$$

ou bien

$$(27) \qquad a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca + ab = BD;$$

D est impair, comme G et B.

§ VIII.

Les équations (20), (21), (23) et (27) fournissent le groupe suivant :

$$(28) \qquad \begin{cases} c - b - a = 2.7B^2P; \\ a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca + ab = BD, \\ abc = 7^6P^7; \\ 3(a^4 + b^4 + c^4) + 10(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) = 16B^{14}. \end{cases}$$

Il s'agit d'éliminer a, b, c, entre ces quatre équations. Le carré de la première combiné avec la seconde, donne

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2BD - 4.7^2B^4P^2, \quad -bc - ca + ab = 4.7^2B^4P^2 - BD;$$

et de ces deux nouvelles équations, élevées au carré, on déduit

$$a^4 + b^4 + c^4 + 2(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) = (2BD - 4.7^2B^4P^2)^2,$$
$$b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 = (4.7^2B^4P^2 - BD)^2 - 4.7^7B^2P^8;$$

ces valeurs, substituées dans la quatrième (28), donnent une équation finale où $16B^2$ peut être supprimé comme facteur commun, et qui donne définitivement

$$B^{12} + 7(7^3P^4)^2 = (D - \tfrac{5}{2}7^2P^2B^3)^3 + 3(\tfrac{1}{2}7^2P^2B^3)^2.$$

En posant

$$(29) \qquad D = D_1 + \tfrac{5}{2}7^2P^2B^3,$$

on a plus simplement

$$(30) \qquad B^{12} + 7(7^3P^4)^2 = D_1^3 + 3(\tfrac{1}{2}7^2P^2B^3)^2.$$

Le nombre P étant divisible par 2, et P^2 par 4, $\frac{1}{2}P^2$ sera entier et pair, D_1 impair comme D et B. La différence des deux carrés de nombres impairs $(B^6)^2$ et D_1^2 étant divisible par 8, ainsi que le terme $7(7^3P^{4\,2}$, il faut que 8 divise le terme $3(\frac{1}{2}7^2P^2B^2)^2$, ce qui exige que P soit au moins divisible par 4. B et 7P devant être premiers entre eux, l'équation (30) démontre que D_1 est premier avec B et avec 7P. L'équation (30) ne présente plus la même circonstance d'incompatibilité de formes que celle (17); aussi la démonstration de son impossibilité exige une recherche plus laborieuse.

Puisque P est pair, et même de la forme $4i$, soit posé $P = 2P_0$; P_0 sera pair, et l'équation (30) devient

$$D_1^2 = B^{12} - 12.7^4P_0^4B^6 + 2^8.7^7P_0^8 = (B^6 - 6.7^4P_0^4)^2 + (2^8.7^7 - 2^2.3^2.7^8)P_0^8;$$

mais on a $\quad (2^8.7^7 - 2^2.3^2.7^8) = 2^2.7^7.(2^6 - 3^2.7) = 2^2.7^7;$

on a donc simplement

$$D_1^2 = (B^6 - 6.7^4P_0^4)^2 + 7(2.7^3P_0^4)^2. \tag{31}$$

§ IX.

Pour satisfaire à cette équation on pourrait s'appuyer sur des théorèmes concernant les formes quadratiques et leurs diviseurs; mais, sans rien emprunter à des théories étrangères, il suffit ici de résoudre directement l'équation indéterminée $t^2 = u^2 + 7v^2$, dans laquelle les nombres t, u, impairs, et v pair, doivent être premiers entre eux. Cette équation peut se mettre sous la forme $(t-u)(t+u) = 7v^2$; les facteurs $(t-u)$ et $(t+u)$ étant pairs, ne pourront avoir un facteur premier commun δ autre que 2, car alors δ divisant leur somme $2t$ et leur différence $2u$, diviserait t et u, qui doivent rester premiers entre eux.

Si donc on pose $V = 2^iMN$, M et N étant deux nombres impairs, premiers entre eux, la seule manière de décomposer l'équation $(t-u)(t+u) = 7v^2$, compatible avec les conditions imposées aux nombres t, u, v, sera donnée par le groupe suivant :

$$v = 2^iMN, \quad t \mp u = 7.2^mM^2, \quad t \pm u = 2^nN^2, \quad m + n = 2i;$$

d'où l'on déduit

$$t = 7 \cdot 2^{m-1} M^2 + 2^{n-1} N^2, \quad \mp u = 7 \cdot 2^{m-1} M^2 - 2^{n-1} \cdot N^2;$$

t et u devant être impairs, il faut nécessairement que l'un des exposants $(m-1)$ ou $(n-1)$ soit zéro, et leur somme $(m+n-2)$ étant $2(i-1)$, celui qui restera sera nécessairement pair.

Il suit de là qu'en posant $2^{i-1} M = g$, $N = f$, ou $M = g$, $2^{i-1} N = f$; ce qui donne dans les deux cas $2^{i-1} MN = fg$, et $v = 2^i MN = 2fg$, on aura définitivement

$$v = 2fg, \quad t = f^2 + 7g^2, \quad \pm u = f^2 - 7g^2.$$

pour satisfaire généralement à l'équation indéterminée $t^2 = u^2 + 7v^2$.

§ X.

D'après cette solution, l'équation (31) conduit au groupe suivant :

$$(32) \quad D_1 = f^2 + 7g^2, \quad \pm B^6 \mp 6.7^4 P_0^4 = f^2 - 7g^2, \quad fg = 7^3 P_0^4;$$

f ne peut être divisible par 7, sans quoi 7 diviserait D_1 et B, ce qui ne peut avoir lieu; f et g sont nécessairement premiers entre eux; car un facteur premier δ qui les diviserait tous deux, ainsi que leur produit $7^3 P_0^4$, diviserait aussi P_0, et par suite B^6 et B; B et P_0 ne seraient donc pas premiers entre eux. Ainsi la troisième équation (32) ne peut être décomposée que de cette manière,

$$(33) \quad P_0 = Q_1 P_1, \quad f = Q_1^4, \quad g = 7^3 \cdot P_1^4;$$

Q_1 est premier avec $7P_1$; comme P_0 est divisible par 2, Q_1 ou P_1 est pair.

La seconde (32) devient

$$\pm B^6 = (Q_1^4 \pm 3.7^4 . P_1^{4})^2 - 7(2^3 . 7^3 P_1^4)^2;$$

le signe inférieur est inadmissible, car il en résulterait

$$7 \cdot 2^3 \cdot 7^3 . P_1^{4})^2 = (Q_1^4 - 3.7^4 \cdot P_1^{4})^2 + B^6.$$

et le second membre, somme de deux carrés impairs, serait de la forme

$8n+2$, tandis que le premier est divisible par 8. On a donc nécessairement

$$(34)\qquad (Q_1^4 + 3.7^4 P_1^4)^2 = (B^3)^2 + 7(2^3.7^3 P_1^4)^2.$$

Ici, comme pour l'équation (31), on devra poser

$$(35)\quad Q_1^4 + 3(7^2 P_1^2)^2 = f_1^2 + 7g_1^2,\ \pm B^3 = f_1^2 - 7g_1^2,\ f_1 g_1 = 2^2.7^3 P_1^4;$$

f_1 et g_1 sont nécessairement l'un pair et l'autre impair, comme Q_1 et P_1, et pour que B reste impair; ainsi f_1 et g_1 n'ont pas le facteur commun 2; ils ne sauraient non plus avoir de commun un autre facteur premier δ, qui les divisant tous deux, ainsi que leur produit $2^2.7^3.P_1^4$, diviserait $7P_1$, par suite B et Q_1, en sorte que B et $7P = 2.7P_1Q_1$ ne seraient pas premiers entre eux; f_1 n'est donc pas divisible par 7.

§ XI.

Avant d'aller plus loin, il importe de remarquer que l'équation $t^2 + 3u^2 = v^2 + 7w^2$, dans laquelle t et u sont premiers entre eux ainsi que v et w, et les deux membres des nombres impairs, exige que t et v soient pairs ensemble, ou impairs ensemble.

En effet, de t et u l'un doit être pair et l'autre impair; il en est de même de v et w. Or si t et w étaient pairs, u et v seraient impairs, le premier membre serait de la forme $(4n+3)$, et le second de celle $(4n+1)$ qui est incompatible avec la première; si u et v étaient pairs, t et w impairs, le premier membre aurait au contraire la forme $4n+1$, et le second celle $4n+3$, d'où résulterait la même impossibilité. Donc t et v sont pairs ou impairs ensemble, u et w impairs ou pairs tous les deux.

§ XII.

Il résulte de ce lemme, de ce que f_1 et g_1 sont premiers entre eux, et de la première équation du groupe (35), que la troisième équation du même groupe pourra se décomposer de l'une ou de l'autre des deux manières suivantes :

$$P_1 = P_2 Q_2 \begin{cases} f_1 = 2^2 Q_2^4, & g_1 = 7^3 P_2^4, \quad \text{si } Q_1 \text{ pair}, \quad P_1, P_2, Q_2, \text{ impairs}. \\ f_1 = Q_2^4, & g_1 = 2^2\, 7^3.P_2^4, \quad \text{si } P_1 \text{ pair}, \quad Q_1, Q_2, \text{ impairs} \end{cases}$$

La première équation (35) devient ainsi

$$Q_1^4 = 2^4 Q_2^8 - 3.7^4 Q_2^4 P_2^4 + 7^7 P_2^8, \text{ si } Q_1 \text{ pair, } P_2 \text{ et } Q_2 \text{ impairs:}$$
$$Q_1^4 = Q_2^8 - 3.7^4 P_2^4 Q_2^4 + 2^4.7^7 P_2^8, \text{ si } Q_1, Q_2 \text{ impairs.}$$

Ce sont maintenant ces deux équations qu'il s'agit de résoudre en nombres entiers. Or la première est impossible avec les conditions que Q_1 soit pair, que P_2, Q_2, facteurs de P_1, soient impairs; en effet, cette équation peut se mettre sous la forme

$$16\left[\left(\frac{Q_1}{2}\right)^4 - Q_2^8\right] = 7(7^3 P_2^4)^2 - 3(7^2 Q_2^2 P_2^2)^2,$$

et les deux membres sont incompatibles, l'un étant de la forme $4.4n$, tandis que l'autre est de la forme $4.(2n+1)$.

La même impossibilité n'existe plus pour la seconde équation

$$(36) \qquad Q_1^4 = Q_2^8 - 3.7^4 P_2^4 Q_2^4 + 2^4.7^7 P_2^8.$$

Comme elle peut se mettre sous la forme

$$(Q_1^2)^2 + 3(7^2 P_2^2 Q_2^2)^2 = (Q_2^4)^2 + 7(2^2.7^3.P_2^4)^2,$$

que Q_1 et Q_2 sont impairs, le lemme précédent (§ XI) exige que P_2 soit divisible par 2. On peut donc poser $P_2 = 2\Pi_2$; l'équation dont il s'agit devient

$$Q_1^4 = Q_2^8 - 3.2^4.7^4 \Pi_2^4 Q_2^4 + 2^{12}.7^7 \Pi_2^8 = (Q_2^4 - 3.2^3.7^4 \Pi_2^4)^2 + 2^6.7^7(2^6 - 7.3^2)\Pi_2^8,$$

et comme $2^6 - 7.3^2 = 64 - 63 = 1$, plus simplement

$$(37) \qquad Q_1^4 = (Q_2^4 - 3.2^3.7^4 \Pi_2^4)^2 + 7(2^3.7^3 \Pi_2^4)^2.$$

§ XIII.

Pour résoudre l'équation (37), on peut poser

$$(38) \quad Q_1^2 = f_2^2 + 7g^2, \quad \pm Q_2^4 \mp 3.2^3 7^4 \Pi_2^4 = f_2^2 - 7g_2^2, \quad f_2 g_2 = 2^2 7^3 \Pi_2^4;$$

f_2 ne peut être divisible par 7, puisque Q_1 ne peut l'être; f_2 et g_2 sont premiers entre eux, sans quoi un facteur premier δ qui les diviserait

tous deux, ainsi que leur produit, diviserait Q_1 et Q_2 qui doivent être premiers entre eux. Puisque Q_1 est impair, il faut que l'un des deux nombres f_2 et g_2 soit pair et l'autre impair; or ce ne peut être f_2 qui soit pair, car g_2 étant alors impair, le second membre de l'équation $Q_1^2 = f_2^2 + 7g_2^2$ serait de la forme $4n + 3$, ou de l'une des deux formes $8n + 3$, $8n + 7$, tandis que le premier membre ne peut être que de la forme $8n + 1$; donc g_2 est pair et f_2 impair.

D'après ces conditions, la troisième équation (38) ne peut se décomposer que de la manière suivante :

$$\Pi_2 = Q_3 P_3, \quad f_2 = Q_3^4, \quad g_2 = 2^2 . 7^3 P_3^4 \quad (Q_3 \text{ premier avec } 2 . 7 . Q_2 .$$

La seconde des équations (38) devient ainsi

$$\pm Q_2^4 = Q_3^8 \pm 3.2^3.7^4 Q_3^4 P_3^4 - 7^7 . 2^4 . P_3^8 = (Q_3^4 \pm 2^2.3.7^4 P_3^4)^2 - 2^4 . 7^7 . 3^2 . 7 + 1 . P_3^8,$$

et comme $7.3^2 + 1 = 64 = 2^6$, plus simplement

$$\pm Q_2^4 = (Q_3^4 \pm 2^2 . 3 . 7^4 P_3^4)^2 - 7(2^5 . 7^3 . P_3^4)^2.$$

On voit qu'on ne peut admettre le signe inférieur, car on en déduirait $7(2^5 . 7^3 P_3^4)^2 = Q_2^4 + (Q_3 - 3.2^2.7^4 P_3^4)^2$, et Q_2, Q_3, étant impairs, le second membre serait de la forme $8n + 2$, et incompatible avec le premier, divisible par 2^{10}. On a donc nécessairement

$$(39) \qquad (Q_3^4 + 2^2 . 3 . 7^4 P_3^4)^2 = Q_2^4 + 7(2^5 . 7^3 . P_3^4)^2.$$

§ XIV.

Pour résoudre l'équation (39), on posera

$$(40) \quad Q_3^4 + 2^2 . 3 . 7^4 P_3^4 = f_3^2 + 7g_3^2, \quad \pm Q_2^2 = f_3^2 - 7g_3^2, \quad f_3 g_3 = 2^4 . 7^3 . P_3^4;$$

on verra, comme ci-dessus, que f_3 est premier avec 7 et avec g_3; et la première (40), d'après le lemme du § XI, exige que f_3 soit impair et g_3 pair. Il n'y a donc d'autre moyen que le suivant de décomposer la troisième (40),

$$P_3 = Q_4 P_4, \quad f_3 = Q_4^4, \quad g_3 = 2^4 . 7^3 . P_4^4 \quad Q_4 \text{ premier avec } 2 . 7 . Q_3 .$$

La première équation (40) devient

$$Q_3^4 = Q_4^8 - 2^2.3.7^4.P_4^4 Q_4^4 + 7^7.2^8.P_4^8 = (Q_4^4 - 2.3.7^4 P_4^4)^2 + 2^2.7^7(2^6 - 3^2.7)P_4^8,$$

et comme $(2^6 - 3^2.7) = 1$, plus simplement

$$(41) \qquad Q_3^4 = (Q_4^4 - 2.3.7^4.P_4^4)^2 + 7(2.7^3.P_4^4)^2.$$

Pour résoudre cette équation (41), il faut encore poser

$$(42) \quad Q_3^2 = f_4^2 + 7g_4^2, \quad \pm Q_4^4 \mp 2.3.7^4.P_4^4 = f_2^2 - 7g^2, \quad fg = 7^3 P_4^4;$$

f_4 est encore nécessairement premier avec 7 et avec g_4; et, comme la première (38), la première (42) démontre que f_4 est impair et g_4 pair. On est ainsi conduit à la décomposition suivante de la dernière (42):

$$P_4 = Q_5 P_5, \quad f_4 = Q_5^4, \quad g_4 = 7^3 P_5^4 \quad (Q_5 \text{ premier avec } 2.7.Q_4; P_5 \text{ pair}).$$

La seconde (42) devient

$$\pm Q_4^4 = Q_5^8 \pm 2.3.7^4 P_5^4 Q_5^4 - 7^7 P_5^8 = (Q_5^4 \pm 3.7^4 P_5^4)^2 - 7^7(3^2.7 + 1)P_5^8,$$

ou, comme $3^2.7 + 1 = 2^6$, plus simplement

$$\pm Q_4^4 = (Q_5^4 \pm 3.7^4 P_5^4)^2 - 7(2^3.7^3 P_5^4)^2,$$

et l'on voit que P_5 étant pair, le signe inférieur ne peut être admis. On a donc nécessairement

$$(43) \qquad (Q_5^4 + 3.7^4 P_5^4)^2 = Q_4^4 + 7(2^3.7^3.P_5^4)^2.$$

Pour résoudre cette équation (43), il faut encore poser

$$(44) \quad Q_5^4 + 3.7^4 P_5^4 = f_5^2 + 7g_5^2, \quad \pm Q_4^2 = f_5^2 - 7g_5^2, \quad f_5 g_5 = 2^2.7^3 P_5^4;$$

P_5 étant pair, le lemme établi (§ XI) démontre que g_5 est pair; on voit encore que f_5 est premier avec $7.g_5$, ce qui conduit à la décomposition

$$P_5 = Q_6 P_6, \quad f_5 = Q_6^4, \quad g_5 = 2^2.7^3.P_6^4 \quad (Q_6 \text{ premier avec } 2.7.Q_5).$$

La première (44) devient

$$(45)\qquad Q_5^4 = Q_6^8 - 3.7^4 P_6^4 Q_6^4 + 2^4.7^7 P_6^8.$$

§ XV.

Or cette équation (45) est de la même forme que l'équation (36), et composée de nombres beaucoup plus petits. Ainsi, s'il existe des nombres U, V, W, premiers entre eux, qui vérifient l'équation

$$(46)\qquad U^4 = V^8 - 3.7^4.V^4W^4 + 2^4.7^7W^8,$$

il existera par cela même une autre solution, composée de nombres beaucoup plus petits. D'où il résulte que l'équation (46) est impossible en nombres entiers finis. Donc l'équation (36) est impossible aux mêmes conditions, et par suite l'équation (1) est dans le même cas.

Nota. Pour s'assurer que les nombres de la solution (45) sont réellement beaucoup moindres que ceux de la solution (36), il suffira de remarquer que $P_2 = 2Q_3 Q_4 Q_5 Q_6 P_6$. Le nombre P_6 est, dans l'équation (45), l'homologue de P_2, dans celle (36); P_6 étant nécessairement pair, ainsi que $P_5 = Q_6 P_6$, ne peut être moindre que 2; $g_4 = 7^3 P_5^4$ est donc plus grand que $7^3.2^4$; $Q_3 = \sqrt{f_4^2 + 7g_4^2}$ surpasse donc $\sqrt{1 + 7^7.2^8}$, et à plus forte raison Q_3 surpasse $2^5.7^3 = 10976$; ainsi P_6 est au moins 22 000 fois plus petit que P_2.

Rapport sur le Mémoire précédent; par M. A. Cauchy.

Extrait des *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences, tome IX, p. 359.

« L'Académie nous a chargés, M. Liouville et moi, de lui rendre compte d'un Mémoire de M. Lamé sur le dernier théorème de Fermat.

» On sait que Fermat, l'un des plus beaux génies qui aient illustré la France, a donné des énoncés de plusieurs théorèmes, parmi lesquels il en est deux dont la démonstration a été pendant long-temps recherchée avec ardeur par divers géomètres. De ces théorèmes il n'en reste plus qu'un seul qui ne soit pas aujourd'hui complétement démontré : c'est le théorème relatif aux puissances des nombres entiers, et suivant lequel une

puissance d'un degré n supérieur au second, ne peut résulter de l'addition de deux puissances du même degré. On sait toutefois que le théorème, une fois démontré pour une valeur particulière de n, l'est en même temps pour tous les multiples de cette valeur, et que, d'après les principes établis par Fermat lui-même, ce théorème se démontre assez facilement pour $n = 4$. De plus, Euler et M. Legendre sont parvenus à le démontrer encore pour les valeurs 3 et 5 de l'exposant n. Mais leurs démonstrations sont fondées sur la théorie des formes quadratiques des nombres premiers; et les difficultés que M. Legendre a eu à surmonter, pour le cas de $n = 5$, laissaient peu d'espoir d'appliquer avec succès les mêmes principes aux cas où n acquiert des valeurs plus considérables. Toutefois, cette considération n'a pas empêché M. Lejeune-Dirichlet, dont les recherches sur la théorie des nombres avaient été utiles à M. Legendre, de s'occuper de nouveau du dernier théorème de Fermat; et à l'aide d'un artifice particulier de calcul, il est parvenu à le démontrer pour le cas où l'on suppose $n = 14$. M. Lamé a considéré à son tour un cas qui renferme le précédent, savoir, le cas où l'on suppose $n = 7$; et les savants apprendront avec plaisir qu'il est parvenu effectivement au but qu'il s'était proposé d'atteindre.

« Pour démontrer l'impossibilité de résoudre en nombres entiers une équation de la forme

$$x^7 + y^7 + z^7 = 0,$$

où z est supposé négatif, M. Lamé n'a point recours à la théorie des formes quadratiques des nombres premiers. Après avoir prouvé comme à l'ordinaire que

$$x, \quad y, \quad z,$$

peuvent être supposés premiers entre eux, il démontre un lemme, digne de remarque, savoir, que le rapport entre la somme

$$x + y + z$$

des trois inconnues et la racine 7e du produit des trois sommes

$$x + y, \quad x + z, \quad y + z,$$

ou de ce produit, multiplié par 7, est un carré parfait; puis à l'aide de ce lemme il prouve facilement qu'il est impossible de supposer les trois inconnues non divisibles par 7, ce que l'on savait déjà. Enfin, en supposant l'une des inconnues divisible par 7, et s'appuyant sur le lemme dont il s'agit, il remplace l'équation proposée, du 7e degré, par une autre équation dont le premier membre est du 4e degré, le second membre étant du 8e, et qui peut être présentée sous la forme

$$z^4 = x^8 - 3x^4y^4 + \frac{16}{7}y^8;$$

puis il démontre l'impossibilité de résoudre cette dernière équation, à l'aide d'une suite

d'opérations semblables à celle que fournit la résolution d'une équation de la forme

$$x^2 - y^2 = A.$$

» En lisant avec soin le Mémoire de M. Lamé, nous nous sommes demandé, 1° si le lemme dont il a fait usage se trouve compris dans quelque autre proposition plus générale relative à une valeur quelconque de n; 2° s'il ne serait pas possible d'abréger encore la démonstration donnée par M. Lamé pour le cas de $n = 7$. Nous avons reconnu qu'effectivement le lemme de M. Lamé est une conséquence nécessaire d'un théorème d'analyse qui nous semble assez curieux pour mériter d'être indiqué dans ce rapport. Voici l'énoncé de ce nouveau théorème.

» Si l'on retranche la somme des puissances $n^{ièmes}$ de deux inconnues x, y de la puissance $n^{ième}$ de leur somme

$$x + y,$$

le reste sera divisible algébriquement, non-seulement par le produit

$$nxy(x + y),$$

comme on le reconnaît aisément, mais encore, pour des valeurs de n supérieures à 3, par le trinome

$$x^2 + xy + y^2 = \frac{x^3 - y^3}{x - y},$$

et même par le carré de ce trinome, lorsque n divisé par 6 donnera pour reste l'unité. En appliquant ce théorème aux cas où l'on a

$$n = 3, \quad n = 5, \quad n = 7,$$

on obtient successivement les formules

$$(x + y)^3 - x^3 - y^3 = 3xy(x + y),$$
$$(x + y)^5 - x^5 - y^5 = 5xy(x + y)(x^2 + xy + y^2),$$
$$(x + y)^7 - x^7 - y^7 = 7xy(x + y)(x^2 + xy + y^2)^2,$$

dont la dernière conduit sans peine au lemme de M. Lamé.

» Quant à la seconde question, nous avons reconnu qu'on abrège la démonstration de M. Lamé quand on commence par établir l'impossibilité de résoudre l'équation

$$z^3 = x^4 - \frac{3}{4}x^2y^2 + \frac{1}{2}y^4,$$

en prenant pour x, y, z, des nombres premiers entre eux, et pour y un carré pair. Au reste, la méthode par laquelle on y parvient ne diffère pas au fond de celle qui sert

à démontrer l'impossibilité de résoudre en nombres entiers l'équation

$$z^2 = x^4 + y^4,$$

et servirait pareillement à établir l'impossibilité de résoudre en nombres entiers une multitude d'équations de la forme

$$z^2 = x^4 - Ax^2y^2 + By^4.$$

» Nous ne terminerons pas ce rapport sans rappeler qu'à une époque antérieure, M. Lamé s'était déjà occupé de la théorie des nombres. Au moment où l'Académie proposa pour sujet de prix le dernier théorème de Fermat, elle reçut un Mémoire qui ne résolvait pas, il est vrai, la question proposée; mais qui renfermait du moins des théorèmes curieux sur l'impossibilité de la résoudre sans que certains nombres, égaux, par exemple, à l'unité augmentée du double ou du quadruple de l'exposant, fussent diviseurs de l'une des inconnues. L'un de nous, nommé Commissaire à cette époque avec M. Legendre, se rappelle encore avoir lu ces théorèmes dans le Mémoire envoyé au concours. Si l'auteur, que nous avons su depuis être M. Lamé, ne parvint pas alors à remplir entièrement le vœu de l'Académie, son travail n'était pourtant pas sans mérite, et son nouveau Mémoire prouve qu'il est capable de lutter avec avantage contre les difficultés qui dans cette matière n'ont pu être jusqu'à présent complétement surmontées par les géomètres.

» En résumé, vos Commissaires pensent que le Mémoire de M. Lamé est digne de l'approbation de l'Académie, et d'être inséré dans le recueil des *Savants étrangers*.»

Les conclusions de ce rapport sont adoptées.

« *Post-scriptum*. On démontre aisément le nouveau théorème énoncé dans ce rapport de la manière suivante :

» Soient $1, \quad \alpha, \quad \beta,$

les trois racines de l'équation $x^3 = 1.$

On aura, non-seulement $1 + \alpha + \beta = 0,$

mais encore, en supposant n non divisible par 3,

$$(1) \qquad 1 + \alpha^n + \beta^n = 0,$$

et de plus $x^2 + xy + y^2 = (x - \alpha y)(x - \beta y).$

» Cela posé, je dis que, si l'on prend pour n un nombre premier impair supérieur à 3, l'expression

$$(2) \qquad (x - y)^n - x^n - y^n$$

sera divisible par le trinome $x^2 + xy + y^2,$

et même par le carré de ce trinome, lorsque n divisé par 3 donnera pour reste l'unité. Effectivement, pour établir cette proposition, il suffira de faire voir qu'en supposant

$$x = \alpha y \quad \text{ou} \quad x = \beta y,$$

on réduit à zéro l'expression (2), et de plus sa dérivée relative à x, savoir

$$(3) \qquad n[(x+y)^{n-1} - x^{n-1}],$$

lorsque n divisé par 6 donnera 1 pour reste. Or, lorsqu'on suppose, par exemple, $x = \alpha y$, les expressions (2) et (3) deviennent proportionnelles aux suivantes

$$(1+\alpha)^n - 1 - \alpha^n = -1 - \alpha^n + (-\beta)^n,$$
$$n[(1+\alpha)^{n-1} - \alpha^{n-1}] = n[(-\beta)^{n-1} - \alpha^{n-1}],$$

et il est clair qu'elles s'évanouissent, la première en vertu de la formule (1), pour les valeurs impaires de n non divisibles par 3; la seconde en vertu des formules

$$\alpha^3 = 1, \quad \beta^3 = 1,$$

pour les valeurs impaires de n, qui, divisées par 3, donnent 1 pour reste. »

EXTRAIT

D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. LIOUVILLE,

PAR M. STERN.

« Je viens de lire dans votre Journal (février 1840) le beau Mémoire de M. Lebesgue, à la fin duquel il propose une question concernant la détermination du signe dans la formule

$$\frac{1}{\sqrt{p}} = \pm \Pi \operatorname{cotang} a \frac{2\pi}{p},$$

que j'ai donnée dans le Journal de M. Crelle (le double signe y a été omis par inadvertance). Je vais y répondre en peu de mots.

» On sait que les racines de l'équation

$$(1) \quad x^{p-1} - \frac{1}{4} p\, x^{p-3} + \frac{1}{16} p \frac{(p-3)}{1.2} x^{p-5} \ldots \pm \frac{1}{2^{p-1}} p = 0$$

sont $\sin \frac{2\pi}{p}, \quad \sin 2 \frac{2\pi}{p}, \ldots \sin (p-1) \frac{2\pi}{p}.$

En faisant $p = 2m + 1$ et $x^2 = y$, on réduit cette équation à la suivante

$$(2) \qquad y^m - \frac{1}{4} p y^{m-1} \ldots \pm \frac{1}{2^{p-1}} p = 0.$$

Si p est un nombre premier de la forme $4n + 3$, et qu'on désigne par a_1, $a_2, \ldots a_m$ les résidus quadratiques, les racines de l'équation (2) seront

$$\sin^2 a_1 \frac{2\pi}{p}, \quad \sin^2 a_2 \frac{2\pi}{p}, \ldots \sin^2 a_m \frac{2\pi}{p},$$

et l'on aura $\sin^2 a_1 \frac{2\pi}{p} \sin^2 a_2 \frac{2\pi}{p} \ldots \sin^2 a_m \frac{2\pi}{p} = \frac{2^{p-1}}{p},$

ou

$$(3) \qquad \Pi \sin a \frac{2\pi}{p} = \pm \frac{\sqrt{p}}{2^m}.$$

Il est évident qu'on doit prendre le signe supérieur ou inférieur, selon que le nombre des résidus qui sont plus grands que $\frac{p-1}{2}$ est pair ou impair. D'ailleurs on sait que dans la congruence

$$1.2\ldots\frac{p-1}{2} \equiv \pm 1 \pmod{p},$$

la détermination du signe dépend de la même condition; et comme M. Jacobi a montré (Journal de M. Crelle, tome IX, page 192) qu'on a toujours

$$1.2\ldots\frac{p-1}{2} \equiv (-1)^N \pmod{p},$$

N désignant le nombre des diviseurs quadratiques de la forme $t^2 + pu^2$, on aura

$$(4) \qquad \Pi \sin a\frac{2\pi}{p} = (-1)^N \frac{\sqrt{p}}{2^m}.$$

On sait aussi que p étant un nombre premier de la forme $4n+3$, les expressions

$$\cos a_1\frac{2\pi}{p}, \quad \cos a_2\frac{2\pi}{p}, \ldots \cos a_m\frac{2\pi}{p}$$

sont les racines de l'équation

$$x^m + \frac{1}{2}x^{m-1} - \frac{1}{2^2}(m-1)x^{m-2}\ldots \mp \frac{1}{2^m} = 0,$$

où l'on doit prendre le signe supérieur ou inférieur, selon qu'on a

$$p = 8k+7, \quad p = 8k+3.$$

On aura donc

$$(5) \qquad \Pi \cos a\frac{2\pi}{p} = \frac{1}{2^m}$$

pour le cas $p = 8k+7$,

et

$$(6) \qquad \Pi \cos a\frac{2\pi}{p} = -\frac{1}{2^m}$$

pour le cas $p = 8k+3$.

En combinant les équations (5) et (6) avec l'équation (4), on trouve

$$(7) \qquad \Pi \operatorname{cotang} a\frac{2\pi}{p} = (-1)^{N}\frac{1}{\sqrt{p}}$$

pour le cas $p = 8k + 7$,

et

$$(8) \qquad \Pi \operatorname{cotang} a\frac{2\pi}{p} = (-1)^{N+1}\frac{1}{\sqrt{p}}$$

pour le cas $p = 8k + 3$. On voit donc que le signe est tout-à-fait déterminé.

» On a aussi

$$\Pi \operatorname{tang} a\frac{2\pi}{p} = (-1)^{N}\sqrt{p},$$

$$\Pi \operatorname{tang} a\frac{2\pi}{p} = (-1)^{N+1}\sqrt{p},$$

selon que $p = 8k + 7$ ou $p = 8k + 3$.

» Je profite de cette occasion pour faire une remarque sur la détermination du signe dans la congruence

$$2b \equiv \pm r^2 \pmod{p},$$

que M. Gauss a donnée dans son premier Mémoire sur les résidus biquadratiques (p. 31). Comme la détermination *générale* de ce signe n'a pas réussi à l'illustre géomètre, elle semble appartenir aux plus profonds mystères de la théorie des nombres. Il est d'autant plus remarquable, que pour le cas $p=8n+5$, on puisse donner une formule qui détermine en même temps la valeur et le signe de b; car alors on a

$$(9) \qquad 2^{n}(1.2\ldots n) \equiv 2.4\ldots 2n,$$

$$(10) \qquad 2^{n+1}(4n+3.4n+4\ldots 5n+3) \equiv 1.3\ldots 2n+1 \pmod{p},$$

et $4n+3 \equiv -(4n+2)$, $4n+4 \equiv -(4n+1), \ldots 5n+3 \equiv -(3n+2)$.

Il suit donc

$$(11) \qquad 2^{n+1}(4n+2.4n+1\ldots 3n+2) \equiv (-1)^{n+1}(1.3\ldots 2n+1).$$

et en multipliant cette formule par la formule (9), on a

$$2^{2n+1}(4n+2\ldots 3n+2) \equiv (-1)^{n+1}(n+1\ldots 2n+1),$$

et

$$(12)\qquad 2^{2n+1} \equiv (-1)^{n+1}\frac{n+1.n+2\ldots 2n+1}{3n+2\ldots 4n+2}.$$

Mais M. Gauss a démontré, dans le Mémoire cité, que g étant une racine primitive, le nombre 2 est congru à un des nombres $g, g^5, \ldots g^{p-5}$ ou à un des nombres $g^3, g^7, \ldots g^{p-2}$, selon qu'on a $b = 8m+2$ ou $b = 8m+6$. On aura donc $2^{2n+1} \equiv g^{2n+1}$, selon que b est contenu dans la première forme ou dans la seconde. Et comme on a

$$b \equiv g^{2n+1}.a \quad (Ib., \text{page } 27),$$

la valeur de a étant déterminée par la congruence

$$(13)\qquad 2a \equiv \frac{4n+2\ldots 2n+2}{1\ldots 2n+1} \pmod{p},$$

il en suit $b \equiv 2^{2n+1}.a$ ou $-b \equiv 2^{2n+1}.a$, selon qu'on a $b = 8m+2$ ou $b = 8m+6$, c'est-à-dire qu'il faut toujours fixer le signe de manière qu'on ait

$$b \equiv 2 \pmod{8}.$$

En combinant les formules (12) et (13), on trouve

$$\pm 2b \equiv (-1)^{n+1}\frac{3n+1\ldots 2n+2}{1\ldots n},$$

et le signe est déterminé par la congruence

$$b \equiv 2, \pmod{8}.$$

» J'ai déjà consigné plusieurs des remarques précédentes dans un Mémoire que j'ai présenté à l'Académie des Sciences au courant de l'année 1837, mais sur lequel on n'a pas encore fait de rapport. »

(20 mai 1840.)

SUR LES

VARIATIONS SÉCULAIRES DES ÉLÉMENTS ELLIPTIQUES

DES SEPT PLANÈTES PRINCIPALES :

MERCURE, VÉNUS, LA TERRE, MARS, JUPITER, SATURNE ET URANUS;

PAR M. LE VERRIER [*].

1. L'orbite d'une planète qui circulerait seule autour du Soleil serait une ellipse ayant l'un de ses foyers au centre d'attraction. Cette orbite aurait une forme, une position invariables; et elle serait complétement déterminée par son grand axe, son excentricité, la longitude du périhélie, l'inclinaison de son plan sur un plan de position donnée, et la longitude de son nœud.

La présence de plusieurs planètes autour du Soleil rend la détermination de leurs mouvements beaucoup moins simple. Elles agissent les unes sur les autres, proportionnellement à leurs masses, et en raison inverse des carrés de leurs distances respectives; et par là elles sont sans cesse entraînées hors de l'ellipse qu'elles décriraient si elles n'étaient soumises qu'à l'action du Soleil. On parvient toutefois à représenter facilement leur marche par les considérations suivantes. Admettons qu'à une époque donnée l'action perturbatrice des planètes vienne à cesser sur l'une d'elles; à l'instant elle se mettra en mouvement sur une ellipse dont les éléments différeront en général de ceux de l'ellipse primitive. Il

[*] Cet article ne doit être considéré que comme un extrait détaillé du Mémoire que j'ai présenté à l'Académie des Sciences, en septembre 1839, et qui sera bientôt publié en entier dans la *Connaissance des Temps*.

est donc permis de considérer chacune des planètes comme se mouvant sur une ellipse de forme et de position variables. D'ailleurs, la petitesse des masses perturbatrices rend les variations séculaires des éléments elliptiques fort lentes et négligeables dans un intervalle de quelques années; de sorte qu'il suffit de connaître ces éléments, ainsi que la position correspondante de la planète dans son ellipse à une époque donnée, pour juger de toutes les circonstances du mouvement dans les environs de cette époque.

La détermination des éléments variables des orbites offre encore un intérêt tout particulier, en ce qu'elle seule peut nous permettre de juger si notre système planétaire réunit quelques conditions de stabilité. Malheureusement la question n'est susceptible de solution que par les méthodes d'approximation. On se fonde sur ce que les masses perturbatrices, les excentricités et les inclinaisons respectives des orbites étant fort petites, on peut développer les fonctions perturbatrices en séries ordonnées suivant les puissances et les produits de ces quantités. Ce développement étant admis, et en laissant de côté les *variations périodiques* qui ne font osciller les éléments qu'entre d'étroites limites, on reconnaît que les grands axes sont constants. La démonstration comprend les termes qui dans *la fonction perturbatrice* sont du premier et du second ordre, par rapport aux masses; et elle s'étend à toutes les puissances des excentricités et des inclinaisons. Mais comme elle repose sur le développement en série de la fonction perturbatrice, elle n'est concluante qu'autant qu'il demeure prouvé que les inclinaisons et les excentricités resteront toujours très petites. La détermination de ces éléments acquiert ainsi une double importance. Nous nous proposons de l'étudier ici, en commençant par les excentricités et les longitudes des périhélies qui sont liées étroitement.

Variations séculaires des excentricités et des longitudes des périhélies.

2. Désignons par e l'excentricité de Mercure, par ϖ la longitude de son périhélie, et posons

$$h = e \sin \varpi,$$

$$l = e \cos \varpi.$$

Lorsqu'on connaîtra h et l, on calculera e et ϖ par les formules

$$\left.\begin{aligned} e &= \sqrt{h^2 + l^2}, \\ \operatorname{tang} \varpi &= \frac{h}{l}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Désignons d'ailleurs pour Vénus, la Terre, Mars, Jupiter, Saturne et Uranus, les mêmes quantités par les mêmes lettres affectées des indices $'$, $''$, $'''$, ^{IV}, ^{V}, ^{VI}.

Les variations de h et l, h' et l',... en se bornant aux termes du premier degré par rapport aux excentricités, dépendront des équations linéaires suivantes

$$\left.\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= [(0,1) + (0,2) + \ldots]\, l - \boxed{0,1}\, l' - \text{etc.} \ldots = 0, \\ \frac{dl}{dt} &= -[(0,1) + (0,2) + \ldots]\, h + \boxed{0,1}\, h' + \text{etc.} \ldots = 0, \\ \frac{dh'}{dt} &= [(1,0) + (1,2) + \ldots]\, l' - \boxed{1,0}\, l - \text{etc.} \ldots = 0, \\ \frac{dl'}{dt} &= -[(1,0) + (1,2) + \ldots]\, h' + \boxed{1,0}\, h + \text{etc.} \ldots = 0, \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

pour l'intelligence desquelles nous renverrons à la *Mécanique céleste*, (livre II, § 55). Les coefficients $(0,1)$, $(0,2)$,... $\boxed{0,1}$, $\boxed{0,2}$ .... ne dépendent que des masses perturbatrices et des grands axes des orbites : ils sont liés deux à deux par des relations telles que les suivantes

$$\left.\begin{aligned} m\sqrt{a}\,(0,1) &= m'\sqrt{a'}\,(1,0), \\ m\sqrt{a}\,\boxed{0,1} &= m'\sqrt{a'}\,\boxed{1,0}, \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

m, a, m', a', etc.,... désignant respectivement les masses et les grands axes de Mercure, Vénus, etc.

3. Pour intégrer ces équations, on pose

$$h = \mathrm{N}\sin(gt+\theta), \quad l = \mathrm{N}\cos(gt+\theta),$$
$$h' = \mathrm{N}'\sin(gt+\theta), \quad l' = \mathrm{N}'\cos(gt+\theta),$$
$$\text{etc.}, \qquad \text{etc.},$$

et la substitution de ces expressions dans les équations différentielles conduit aux sept relations

$$\left.\begin{array}{l}
(g-(0,1)-(0,2)-(0,3)-(0,4)-(0,5)-(0,6))\mathrm{N} + \boxed{0,1}\,\mathrm{N}' + \boxed{0,2}\,\mathrm{N}'' + \boxed{0,3}\,\mathrm{N}''' \\
\qquad + \boxed{0,4}\,\mathrm{N}^{\mathrm{IV}} + \boxed{0,5}\,\mathrm{N}^{\mathrm{V}} + \boxed{0,6}\,\mathrm{N}^{\mathrm{VI}} = 0, \\
(g-(1,0)-(1,2)-(1,3)-(1,4)-(1,5)-(1,6))\mathrm{N}' + \boxed{1,0}\,\mathrm{N} + \boxed{1,2}\,\mathrm{N}'' + \boxed{1,3}\,\mathrm{N}''' \\
\qquad + \boxed{1,4}\,\mathrm{N}^{\mathrm{IV}} + \boxed{1,5}\,\mathrm{N}^{\mathrm{V}} + \boxed{1,6}\,\mathrm{N}^{\mathrm{VI}} = 0, \\
(g-(2,0)-(2,1)-(2,3)-(2,4)-(2,5)-(2,6))\mathrm{N}'' + \boxed{2,0}\,\mathrm{N} + \boxed{2,1}\,\mathrm{N}' + \boxed{2,3}\,\mathrm{N}''' \\
\qquad + \boxed{2,4}\,\mathrm{N}^{\mathrm{IV}} + \boxed{2,5}\,\mathrm{N}^{\mathrm{V}} + \boxed{2,6}\,\mathrm{N}^{\mathrm{VI}} = 0, \\
(g-(3,0)-(3,1)-(3,2)-(3,4)-(3,5)-(3,6))\mathrm{N}''' + \boxed{3,0}\,\mathrm{N} + \boxed{3,1}\,\mathrm{N}' + \boxed{3,2}\,\mathrm{N}'' \\
\qquad + \boxed{3,4}\,\mathrm{N}^{\mathrm{IV}} + \boxed{3,5}\,\mathrm{N}^{\mathrm{V}} + \boxed{3,6}\,\mathrm{N}^{\mathrm{VI}} = 0, \\
(g-(4,0)-(4,1)-(4,2)-(4,3)-(4,5)-(4,6))\mathrm{N}^{\mathrm{IV}} + \boxed{4,0}\,\mathrm{N} + \boxed{4,1}\,\mathrm{N}' + \boxed{4,2}\,\mathrm{N}'' \\
\qquad + \boxed{4,3}\,\mathrm{N}''' + \boxed{4,5}\,\mathrm{N}^{\mathrm{V}} + \boxed{4,6}\,\mathrm{N}^{\mathrm{VI}} = 0, \\
(g-(5,0)-(5,1)-(5,2)-(5,3)-(5,4)-(5,6))\mathrm{N}^{\mathrm{V}} + \boxed{5,0}\,\mathrm{N} + \boxed{5,1}\,\mathrm{N}' + \boxed{5,2}\,\mathrm{N}'' \\
\qquad + \boxed{5,3}\,\mathrm{N}''' + \boxed{5,4}\,\mathrm{N}^{\mathrm{IV}} + \boxed{5,6}\,\mathrm{N}^{\mathrm{VI}} = 0, \\
(g-(6,0)-(6,1)-(6,2)-(6,3)-(6,4)-(6,5))\mathrm{N}^{\mathrm{VI}} + \boxed{6,0}\,\mathrm{N} + \boxed{6,1}\,\mathrm{N}' + \boxed{6,2}\,\mathrm{N}'' \\
\qquad + \boxed{6,3}\,\mathrm{N}''' + \boxed{6,4}\,\mathrm{N}^{\mathrm{IV}} + \boxed{6,5}\,\mathrm{N}^{\mathrm{V}} = 0.
\end{array}\right\} \quad (4)$$

Entre ces relations on élimine les rapports de six des coefficients N, N', N'',.. au septième, et il reste ainsi une équation en g qui est du septième degré. On en trouvera la démonstration au § **6**, où nous donnerons

un moyen de former cette équation par les fonctions symétriques. Soient g, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 et g_6 ses différentes racines. Pour chacune d'elles on obtiendra une solution différente du système des équations (4), et en réunissant ces solutions on aura des intégrales générales de la forme

$$\left.\begin{aligned} h &= \mathrm{N}\sin(gt+\varepsilon) + \mathrm{N}_1\sin(g_1t+\varepsilon_1) + \text{etc.},\\ l &= \mathrm{N}\cos(gt+\varepsilon) + \mathrm{N}_1\cos(g_1t+\varepsilon_1) + \text{etc.},\\ h' &= \mathrm{N}'\sin(gt+\varepsilon) + \mathrm{N}'_1\sin(g_1t+\varepsilon_1) + \text{etc.},\\ l' &= \mathrm{N}'\cos(gt+\varepsilon) + \mathrm{N}'_1\cos(g_1t+\varepsilon_1) + \text{etc.},\\ &\text{etc.,} \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

dans lesquelles il y aura encore quatorze arbitraires, savoir ε, ε_1, ε_2,... et N^{ν_1}, $\mathrm{N}_1^{\nu_1}$, $\mathrm{N}_2^{\nu_1}$,...; en supposant que les rapports

$$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}^{\nu_1}},\ \frac{\mathrm{N}'}{\mathrm{N}^{\nu_1}},\ \ldots\ldots\ \frac{\mathrm{N}_1}{\mathrm{N}_1^{\nu_1}},\ \frac{\mathrm{N}'_1}{\mathrm{N}_1^{\nu_1}},\ \ldots\ldots$$

soient ceux qui ont été déterminés par les équations (4).

Ces arbitraires dépendront des valeurs des excentricités et des positions des périhélies à l'origine du temps; et en dénotant ces valeurs par les mêmes lettres que ci-dessus, mais affectées d'un indice (0), et exprimant qu'elles satisfont aux intégrales générales, on obtiendra quatorze équations entre les quatorze arbitraires. On pourrait résoudre ces équations directement; mais les relations (3) qui existent entre les coefficients $\boxed{0,1}$ et $\boxed{1,0}$,... fournissent entre les différents systèmes de solutions les conditions suivantes

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{N}\mathrm{N}_1 m\sqrt{a} + \mathrm{N}'\mathrm{N}'_1 m'\sqrt{a'} + \mathrm{N}''\mathrm{N}''_1 m''\sqrt{a''} + \ldots\ldots = 0,\\ &\mathrm{N}\mathrm{N}_2 m\sqrt{a} + \mathrm{N}'\mathrm{N}'_2 m'\sqrt{a'} + \mathrm{N}''\mathrm{N}''_2 m''\sqrt{a''} + \ldots\ldots = 0,\\ &\text{etc.;} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

et ces conditions permettent d'éliminer d'une maniere simple toutes les inconnues; N^{ν_1} et ε, par exemple. Posons, pour abréger,

$$\left.\begin{aligned} h_0 m\sqrt{a}\,\frac{N}{N^{VI}} + h'_0 m'\sqrt{a'}\,\frac{N'}{N^{VI}} + \ldots + h^{VI}_0 m^{VI}\sqrt{a^{VI}} &= n,\\ l_0\, m\sqrt{a}\,\frac{N}{N^{VI}} + l'_0 m'\sqrt{a'}\,\frac{N'}{N^{VI}} + \ldots + l^{VI}_0 m^{VI}\sqrt{a^{VI}} &= d,\\ m\sqrt{a}\left(\frac{N}{N^{VI}}\right)^2 + m'\sqrt{a'}\left(\frac{N'}{N^{VI}}\right)^2 + \ldots + m^{VI}\sqrt{a^{VI}} &= D, \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

on obtient les deux équations

$$\left.\begin{aligned} n &= DN^{VI}\sin\mathcal{E},\\ d &= DN^{VI}\cos\mathcal{E}, \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

dont on déduit

$$\operatorname{tang}\mathcal{E} = \frac{n}{d}, \quad (8^*)$$

$$N^{VI} = \frac{\sqrt{n^2+d^2}}{D} = \frac{n}{D\sin\mathcal{E}}. \quad (9)$$

De ces deux expressions de N^{VI}, la seconde doit être seule conservée, quand on veut déterminer le signe qu'il faut attribuer à N^{VI}, suivant la valeur adoptée pour l'angle $\mathcal{E}$.

4. Les intégrales (5) peuvent donner à la rigueur toutes les circonstances des variations des éléments des orbites. Mais, ainsi que Lagrange l'a remarqué, elles sont d'une discussion très difficile. Nous allons chercher à établir directement les relations qui pourraient exister à une même époque entre les grandeurs des excentricités et les positions relatives des périhélies, et qui seraient indépendantes du plus ou moins grand éloignement de cette époque par rapport à nous.

Il existe sept intégrales de cette espèce, distinctes les unes des autres, et dont la relation connue entre les excentricités, les masses et les grands axes, n'est qu'une conséquence. On trouvera la démonstration de cette dernière relation

$$m\sqrt{a}\,e^2 + m'\sqrt{a'}\,e'^2 + m''\sqrt{a''}\,e''^2 + \ldots\ldots = \text{constante}, \quad (10)$$

dans la *Mécanique céleste* (livre II, § 57). Nous allons développer ici les autres, en ne considérant que trois planètes pour plus de simplicité dans l'écriture.

Multiplions la première des équations (2) par $m\sqrt{a}\mathrm{N}$, la troisième par $m'\sqrt{a'}\mathrm{N}'$, la cinquième par $m''\sqrt{a''}\mathrm{N}''$; ajoutons membre à membre les équations résultantes, puis multiplions par

$$m\sqrt{a}\mathrm{N}h + m'\sqrt{a'}\mathrm{N}'h' + m''\sqrt{a''}\mathrm{N}''h''$$

les deux membres de la relation ainsi obtenue. Nous formerons l'équation

$$\left(m\sqrt{a}\mathrm{N}h + m'\sqrt{a'}\mathrm{N}'h' + m''\sqrt{a''}\mathrm{N}''h''\right)\left(m\sqrt{a}\mathrm{N}\frac{dh}{dt} + m'\sqrt{a'}\mathrm{N}'\frac{dh'}{dt} + m''\sqrt{a''}\mathrm{N}''\frac{dh''}{dt}\right)$$

$$= \left(m\sqrt{a}\mathrm{N}h + m'\sqrt{a'}\mathrm{N}'h' + m''\sqrt{a''}\mathrm{N}''h''\right)\left\{\begin{array}{l} m\sqrt{a}\,\mathrm{N}\,b\,l - m\sqrt{a}\,\mathrm{N}\,\boxed{0,1}\,l' - m\sqrt{a}\,\mathrm{N}\,\boxed{0,2}\,l'' \\ + m'\sqrt{a'}\,\mathrm{N}'\,b'\,l' - m'\sqrt{a'}\,\mathrm{N}'\,\boxed{1,0}\,l - m'\sqrt{a'}\,\mathrm{N}'\,\boxed{1,2}\,l'' \\ + m''\sqrt{a''}\,\mathrm{N}''\,b''\,l'' - m''\sqrt{a''}\,\mathrm{N}''\,\boxed{2,0}\,l - m''\sqrt{a''}\,\mathrm{N}''\,\boxed{2,1}\,l', \end{array}\right\} \quad (11)$$

dans laquelle nous avons posé pour abréger,

$$(0,1) + (0,2) = b,$$
$$(1,0) + (1,2) = b',$$
$$(2,0) + (2,1) = b''.$$

En opérant d'une manière analogue sur la seconde, la quatrième et la sixième des équations (2), nous obtiendrons cette autre relation :

$$\left(m\sqrt{a}\mathrm{N}l + m'\sqrt{a'}\mathrm{N}'l' + m''\sqrt{a''}\mathrm{N}''l''\right)\left(m\sqrt{a}\mathrm{N}\frac{dl}{dt} + m'\sqrt{a'}\mathrm{N}'\frac{dl'}{dt} + m''\sqrt{a''}\mathrm{N}''\frac{dl''}{dt}\right)$$

$$= \left(m\sqrt{a}\mathrm{N}l + m'\sqrt{a'}\mathrm{N}'l' + m''\sqrt{a''}\mathrm{N}''l''\right)\left\{\begin{array}{l} -m\sqrt{a}\,\mathrm{N}\,b\,h + m\sqrt{a}\,\mathrm{N}\,\boxed{0,1}\,h' + m\sqrt{a}\,\mathrm{N}\,\boxed{0,2}\,h'' \\ -m'\sqrt{a'}\,\mathrm{N}'b'\,h' + m'\sqrt{a'}\,\mathrm{N}'\,\boxed{1,0}\,h + m'\sqrt{a'}\,\mathrm{N}'\,\boxed{1,2}\,h'' \\ -m''\sqrt{a''}\,\mathrm{N}''b''h'' + m''\sqrt{a''}\,\mathrm{N}''\,\boxed{2,0}\,h + m''\sqrt{a''}\,\mathrm{N}''\,\boxed{2,1}\,h'. \end{array}\right\} \quad (12)$$

La somme des seconds membres de ces deux équations est nulle en vertu des rapports qui existent entre N, N′ et N″. Pour le reconnaître, effectuons cette somme après avoir développé les calculs indiqués; supprimons les termes qui se détruisent identiquement, et en changeant convenablement les coefficients $\boxed{0,1}$, $\boxed{1,0}$ ... les uns dans les au-

tres, en vertu des relations (3), nous trouverons qu'elle peut s'écrire comme il suit :

$$
\begin{aligned}
& m\,m'\sqrt{aa'}\left[-N^2\,\boxed{1,0}+N'^2\,\boxed{0,1}+NN'(b'-b)-NN'\,\boxed{1,2}+N'N''\,\boxed{0,2}\right](hl'-h'l)\\
&+m\,m''\sqrt{aa''}\left[-N^2\,\boxed{2,0}+N''^2\,\boxed{0,2}+NN''(b''-b)-NN'\,\boxed{2,1}+N'N''\,\boxed{0,1}\right](hl''-h''l)\\
&+m'm''\sqrt{a'a''}\left[-N'^2\,\boxed{2,1}+N''^2\,\boxed{1,2}+N'N''(b''-b')-N'N\,\boxed{2,0}+N''N\,\boxed{1,0}\right](h'l''-h''l').
\end{aligned}
$$

Or le coefficient de $(hl'-h'l)$ est nul en vertu de la relation qu'on obtient en éliminant g entre la première et la seconde des équations (4). Celui de $(hl''-h''l)$ et celui de $(h'l''-h''l')$ sont respectivement nuls en vertu des relations qu'on obtient en éliminant g entre la première et la troisième, ou entre la seconde et la troisième des mêmes équations. Ajoutons donc les deux premiers membres des équations (11) et (12), et nous trouverons l'équation différentielle

$$
\left.\begin{aligned}
&(m\sqrt{a}Nh+m'\sqrt{a'}N'h'+m''\sqrt{a''}Nh'')(m\sqrt{a}Ndh+m'\sqrt{a'}N'dh'+m''\sqrt{a''}N''dh'')\\
&+(m\sqrt{a}Nl+m'\sqrt{a'}N'l'+m''\sqrt{a''}N''l'')(m\sqrt{a}Ndl+m'\sqrt{a'}N'dl'+m''\sqrt{a''}N''dl'')
\end{aligned}\right\}=0:
$$

elle s'intègre immédiatement et donne la relation

$$
(m\sqrt{a}Nh+m'\sqrt{a'}N'h'+m''\sqrt{a''}N''h'')^2+(m\sqrt{a}Nl+m'\sqrt{a'}N'l'+m''\sqrt{a''}N''l'')^2=\text{constante}, \quad (13)
$$

qui ayant lieu pour chacun des systèmes de solutions $N, N', N'', \ldots$; $N_1, N'_1, N''_1, \ldots$; $N_2, N'_2, N''_2, \ldots$, fournit autant d'intégrales distinctes les unes des autres qu'il y a de ces systèmes. Il y en aura sept dans notre système planétaire.

L'intégrale (10) n'est pas distincte de celles que nous venons d'établir. Ces dernières ne dépendent, en effet, ainsi qu'on le voit en développant les carrés indiqués, que des positions relatives des périhélies; positions qui sont caractérisées par six angles seulement, les distances de six des périhélies au septième. On peut éliminer ces six angles entre les sept intégrales que nous considérons, et ainsi il reste entre les seules excentricités une intégrale qui n'est autre que l'intégrale (10).

On voit donc qu'il suffit d'attribuer aux positions relatives des périhélies un état déterminé pour qu'il soit possible de calculer immédiatement, par les sept équations analogues à l'équation (13), les valeurs de

toutes les excentricités, sans aucun égard de l'époque à laquelle ce phénomène peut arriver. La résolution de ces équations est d'une simplicité remarquable, quand on suppose que tous les périhélies coïncident. Nous y reviendrons plus tard.

5. Les conditions nécessaires pour la stabilité de notre système planétaire, relativement aux excentricités, sont de deux sortes : les unes ont rapport à la nature des racines de l'équation en g, les autres à la grandeur absolue des coefficients N, N_1, ... N', N'_1, ... etc.

Il est indispensable que les racines de l'équation en g soient toutes réelles et en outre inégales. Autrement les expressions des excentricités contiendraient des termes ayant le temps en facteur ou en exposant, et par là elles croîtraient indéfiniment. Or il est facile de prouver que cet accroissement indéfini des excentricités est impossible, en vertu des relations qui existent entre les coefficients des variables dans les équations différentielles. La relation (10) se déduit en effet immédiatement de ces équations, et elle ne saurait subsister si l'une des excentricités, quelle que fût d'ailleurs la grandeur de son coefficient, pouvait croître au-delà de toute limite. Nous sommes donc assurés que les sept racines de l'équation en g seront toutes réelles et différentes les unes des autres.

Le calcul seul des coefficients N, N', ... peut nous apprendre si aucun d'entre eux ne sera considérable; et si par conséquent aucune des excentricités ne pourra grandir de manière à rendre insuffisantes les approximations sur lesquelles se fonde toutes cette analyse. L'équation (10), dans laquelle nous connaissons la valeur de la constante du second membre par les observations actuelles, nous montre bien qu'il est impossible que les excentricités des orbites des masses considérables puissent grandir au-delà de limites étroites; mais elle ne nous apprend rien sur les limites des excentricités des petites masses.

Le calcul numérique dont il s'agit a été donné par Lagrange dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin* pour l'année 1782, en partageant le système planétaire en deux autres, indépendants jusqu'à un certain point. En comparant les formules de cet illustre géomètre avec celles que nous obtiendrons dans la suite de ce travail, on reconnaîtra qu'elles ne donneraient pour Mercure, Vénus, la Terre et Mars que des résultats très inexacts, même après quelques siècles seulement, et plus tard complétement erronés; de sorte qu'il faut renoncer à leur emploi.

M. de Pontécoulant a repris ce travail dans le troisième volume de la *Théorie analytique du système du Monde*. Mais ses formules renferment toutes les erreurs les plus graves. Il sera inutile d'y revenir, si nous disons dès à présent qu'en y supposant le temps nul, on obtient des excentricités et des positions des périhélies qui n'ont pas *le plus léger rapport* avec celles que l'observation détermine [*].

On doit cependant désirer une solution de cette question. Nous l'avons entreprise, non pas seulement pour lui donner un plus grand degré d'exactitude, mais parce qu'elle n'existait réellement pas. Les

---

[*] Ce passage a été écrit en septembre 1839. Depuis cette époque, les formules dont il était question, ont disparu du troisième volume de la *Théorie analytique du Système du Monde*. Celles qu'on leur a substituées satisfont bien aux conditions relatives à l'origine du temps, mais elles ne sont guère plus exactes que les premières, sous d'autres rapports.

Ainsi que nous l'avons expliqué, on satisfait à l'état initial pour les excentricités, en déterminant quatorze constantes arbitraires au moyen de quatorze équations du premier degré partagées en deux groupes. La résolution numérique de ces équations peut s'effectuer directement; mais on peut l'éviter en pratiquant l'élimination algébriquement, au moyen des relations (6). En suivant cette dernière marche, les formules définitives ne reproduisent l'état initial que si tous les calculs relatifs à la détermination des arguments et des rapports des coefficients sont rigoureusement exacts; et il en résulte une vérification importante. Quand on résout directement les dernières équations, les formules définitives doivent au contraire satisfaire à l'état initial, lors même que tous les calculs qui précèdent seraient entièrement faux; et puisque c'est cette marche qui a été suivie dans la nouvelle solution, la vérification de l'état initial n'offre aucune garantie d'exactitude. Ce moyen de contrôle nous étant enlevé, ayons recours aux conditions (6), qui n'ont pas été employées directement dans les calculs, et voyons si elles sont satisfaites.

Prenons à cet effet (p. 391), pour les excentricités, par exemple, deux systèmes quelconques de solutions, savoir

$$M_1 = -0{,}001427\,4,\ M'_1 = 0{,}012808\,2,\ M''_1 = -0{,}010893\,9,\ M'''_1 = 0{,}041786,$$
$$M^{\text{IV}}_1 = -0{,}000000\,0,\ M^{\text{V}}_1 = 0{,}000000\,4,\ M^{\text{VI}}_1 = -0{,}000000\,0;$$
$$M_1 = -0{,}003730\,4,\ M'_1 = 0{,}010563\,3,\ M''_1 = -0{,}007\,4366,\ M'''_1 = -0{,}062342,$$
$$M^{\text{IV}}_1 = 0{,}000001\,9,\ M^{\text{V}}_1 = 0{,}000012\,8,\ M^{\text{VI}}_1 = -0{,}000000\,8.$$

En les substituant dans la relation

$$M_1 M_1 m\sqrt{a} + M'_1 M'_1 m'\sqrt{a'} + M''_1 M''_1 m''\sqrt{a''} + \ldots\ldots = 0,$$

on devrait trouver la somme des nombres positifs égale à celle des nombres négatifs,

masses des planètes ne nous sont d'ailleurs connues que fort imparfaitement; et le problème étant traité sans aucune discussion à cet égard, il restait toujours à savoir quel degré de confiance on pouvait accorder aux résultats ainsi obtenus. Nous essaierons de résoudre cette seconde partie du problème avec une exactitude suffisante.

6. Occupons-nous d'abord de la détermination des arguments g, g_1, g_2,... détermination qui est la partie la plus délicate de la question. Ces arguments sont les différentes racines de l'équation en g qu'on obtiendrait par l'élimination des six rapports $\frac{N}{N^{\text{vi}}}$, $\frac{N'}{N^{\text{vi}}}$,... $\frac{N^{\text{v}}}{N^{\text{vi}}}$ entre les sept équations (4). Le calcul de cette équation, déjà compliqué quand on ne considère pas plus de quatre planètes simultanément, devient impraticable par les moyens ordinaires de l'élimination quand on considère sept planètes; il s'introduit en effet des facteurs étrangers, dépendants de g, qui élèvent le degré de l'équation, et dont on ne peut se débarrasser qu'avec peine. Les fonctions symétriques donnent au contraire un moyen d'obtenir cette équation sans facteurs étrangers, ainsi que nous allons l'indiquer.

Écrivons, pour plus de simplicité, les équations (4) sous la forme suivante

$$\left.\begin{array}{l} g - aN + bN' + cN'' + \ldots\ldots = 0, \\ a'N + (g-b')N' + c'N'' + \ldots\ldots = 0, \\ a''N + b''N' + (g-c'')N'' + \ldots\ldots = 0, \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \quad (14)$$

Si l'on voulait de ces équations tirer les valeurs des sept indéterminées

---

au moins *dans les premiers chiffres significatifs*. Or la première de ces sommes n'étant que de 57889, la seconde est égale à 123754. Les autres conditions, analogues à celles que nous venons d'examiner, ne sont pas plus satisfaites, soit pour les excentricités, soit pour les inclinaisons; et la nouvelle solution, bien que satisfaisant à quelques conditions particulières, n'en est pas moins fausse complétement.

Il était devenu indispensable d'entrer dans ces explications et de conserver ici quelques nombres de la nouvelle solution; car elle a été introduite dans le troisième volume de la *Théorie analytique du Système du Monde*, sans que rien puisse prévenir le lecteur qu'elle n'a pas paru en 1834, avec le reste du volume. Il se pourrait donc que la véritable solution y fût introduite à son tour de la même manière, et se trouvât ainsi antidatée de six ans; c'est ce qu'il fallait prévenir.

N, N′, N″, N‴, N^{IV}, N^{V}, N^{VI}, par les formules connues pour la résolution des équations du premier degré, on obtiendrait des résultats de la forme

$$DN = 0, \quad DN' = 0, \quad \text{etc.},$$

D étant le dénominateur commun à toutes les inconnues. Or on peut considérer ces résultats comme les équations finales provenant de l'élimination de toutes les indéterminées excepté une, et par là on voit qu l'équation finale en g dont nous avons besoin, n'est autre que l'équation $D = 0$, ou

$$\left.\begin{array}{l}(g-a)(g-b')(g-c'')\ldots\ldots - ba'(g-c'')\ldots\ldots + \text{etc.}\\ \qquad\qquad - c(g-b')a''\ldots\ldots + \text{etc.}\\ \qquad\qquad - (g-a)c'b''\ldots\ldots + \text{etc.}\\ \qquad\qquad - \text{etc.}\end{array}\right\} = 0.$$

Cette équation sera du septième degré; car le produit

$$(g-a)(g-b')(g-c'')\ldots\ldots$$

donnera le terme g^7 qui ne pourra être détruit par aucun autre. Du même produit dépend en outre le coefficient du second terme de l'équation; car chacun des produits qui la composent renferme toutes les lettres $a, b, c, \ldots$ et tous les indices $^0, ', '', \ldots$; et d'après cette double condition, on voit qu'il ne peut contenir deux des coefficients compris dans une même colonne verticale, ou dans une même ligne horizontale des équations (14). Le produit $(g-a)(g-b')(g-c'')\ldots\ldots$ est donc le seul qui contienne non-seulement sept facteurs, mais même six facteurs en g, puisque l'existence de six facteurs en g dans un produit y entraîne nécessairement celle du septième. Développons ce produit, et nous trouverons que le coefficient du second terme de l'équation est égal à la somme

$$-a + b' + c'' + \ldots\ldots,$$

c'est-à-dire que la somme des racines de l'équation est égale à la somme des coefficients qui affectent respectivement $l, l', l'', \ldots$ dans les expressions de $\frac{dh}{dt}, \frac{dh'}{dt}, \frac{dh''}{dt}, \ldots\ldots$

Différentions actuellement les équations (2); remplaçons dans les seconds membres $\frac{dl}{dt}$, $\frac{dl'}{dt}$, $\frac{dl''}{dt}$, ... par leurs valeurs en fonction de h, h', h'', ... et supposons que nous obtenions ainsi les dérivées secondes

$$\begin{aligned}
\frac{d^2h}{dt^2} &= -\mathrm{A}\,h + \mathrm{B}\,h' + \mathrm{C}\,h'' + \ldots\ldots \\
\frac{d^2h'}{dt^2} &= \mathrm{A}'h - \mathrm{B}'h' + \mathrm{C}'h'' + \ldots\ldots, \\
\frac{d^2h''}{dt^2} &= \mathrm{A}''h + \mathrm{B}''h' - \mathrm{C}''h'' + \ldots\ldots, \\
&\text{etc.};
\end{aligned}$$

les expressions générales de h, h', ... devront encore satisfaire à ces équations, et si on les y substitue, ainsi que leurs dérivées secondes, on retombera sur les conditions suivantes

$$\begin{aligned}
(g^2-\mathrm{A})\mathrm{N} + \mathrm{B}\mathrm{N}' + \mathrm{C}\mathrm{N}'' + \ldots\ldots &= 0. \\
\mathrm{A}'\mathrm{N} + (g^2-\mathrm{B}')\mathrm{N}' + \mathrm{C}'\mathrm{N}'' + \ldots\ldots &= 0. \\
\mathrm{A}''\mathrm{N} + \mathrm{B}''\mathrm{N}' + (g^2-\mathrm{C}'')\mathrm{N}'' + \ldots\ldots &= 0. \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Ces conditions, qui peuvent remplacer les conditions (4), n'en diffèrent, sous le rapport de la forme, qu'en ce qu'elles contiennent le carré de la variable g au lieu de sa première puissance. Si donc on reprend les raisonnements précédents, on conclura facilement que la somme des carrés des racines est égale à la somme des coefficients qui affectent respectivement h, h', h'', ... dans les dérivées secondes, $\frac{d^2h}{dt^2}$, $\frac{d^2h'}{dt^2}$, $\frac{d^2h''}{dt^2}$, ... cette somme étant prise en signe contraire.

Il n'est pas besoin de plus longues explications pour apercevoir qu'on obtiendra la somme des cubes, des quatrièmes puissances... des racines, au moyen des dérivées troisième, quatrième... de h, h'... Et d'ailleurs, quand on aura les sommes des puissances semblables des racines jusqu'à la septième, il sera facile de calculer les coefficients de l'équation par les fonctions symétriques.

Cette marche est assez simple, parce qu'on n'a besoin dans chaque dérivée que d'un seul de ses termes. Elle a en outre l'avantage précieux

de permettre de diriger les calculs de manière à obtenir les racines avec une approximation donnée. Les coefficients de l'équation n'ont pas besoin, pour cet objet, d'être tous calculés avec la même approximation; et on peut reconnaître que si l'on altère toutes les racines d'une équation d'une même petite quantité, la variation qui en résulte pour l'un des coefficients ne dépend que de la valeur des coefficients qui le précèdent. Chaque coefficient n'étant calculé, par la marche indiquée, qu'après ceux qui sont avant lui dans l'équation cherchée, on peut donc savoir quel degré d'exactitude il est nécessaire de lui donner. Nous n'insistons pas à cet égard, parce que cette marche doit être un peu modifiée si l'on veut rendre exécutable la discussion de l'approximation sur laquelle on peut compter malgré les erreurs probables des masses adoptées.

7. Je me bornerai à donner une indication sommaire de la marche que j'ai réellement suivie pour arriver le plus rapidement possible, et avec toute l'exactitude désirable, à la détermination numérique des racines g, g_1,... et des coefficients N, N'... On pourra consulter la *Connaissance des Temps* (année 1843), pour les détails de la solution; je n'en consignerai ici que les résultats définitifs.

Reprenons les équations (4) et supposons qu'il s'agisse d'abord d'un des systèmes de valeurs correspondants aux racines qui proviennent de la présence des grosses planètes Jupiter, Saturne et Uranus. Pour en trouver une première approximation, nous pourrons n'employer que les trois dernières des équations (4), dans lesquelles nous négligerons les termes en N, N', N'' et N'''. Ces termes sont petits par rapport aux autres à cause de la faiblesse de leurs coefficients numériques, bien que les valeurs de N, N', N'' et N''' puissent être comparables à celles de N^{IV}, N^{V} et N^{VI}. La première approximation de trois des racines dépendra donc d'une équation du troisième degré qu'on pourra former d'après ce que nous avons vu dans le paragraphe précédent.

Supposons, en second lieu, qu'il s'agisse de trouver une première approximation des racines introduites par la présence des petites planètes Mercure, Vénus, la Terre et Mars. On pourra n'employer que les quatre premières des équations (4) en y négligeant les termes en N^{IV}, N^{V} et N^{VI}; ces termes sont petits par rapport aux autres, non pas à cause de leurs coefficients numériques, mais bien parce que N^{IV}, N^{V}, N^{VI} ne

sont que de très petites fractions de N, N', N'', N'''; cela se voit *à priori* en remarquant que l'action des trois petites planètes ne peut troubler que bien peu les trois grosses. La première approximation de quatre des racines dépendra donc d'une équation du quatrième degré.

Après avoir obtenu ainsi des valeurs déjà très approchées de toutes les racines, il faudra répéter pour chacune d'elles les calculs que je vais indiquer pour l'une de celles qui dépendent de l'équation du troisième degré, par exemple.

8. Au moyen de la première approximation de g et de deux des trois dernières équations (4) simplifiées comme nous l'avons expliqué, nous commencerons par déterminer des valeurs approchées des rapports $\frac{N^{IV}}{N^{VI}}$ et $\frac{N^{V}}{N^{VI}}$. Nous substituerons ensuite ces premières approximations de g, $\frac{N^{IV}}{N^{VI}}$ et $\frac{N^{V}}{N^{VI}}$, dans les quatre premières des équations (4), et nous en déduirons ainsi une première approximation des valeurs de $\frac{N}{N^{VI}}$, $\frac{N'}{N^{VI}}$, $\frac{N''}{N^{VI}}$ et $\frac{N'''}{N^{VI}}$. Reportant ces valeurs dans les trois dernieres des équations (4), il deviendra nécessaire, pour y satisfaire, d'apporter des corrections à g, $\frac{N^{IV}}{N^{VI}}$ et $\frac{N^{V}}{N^{VI}}$. Ces corrections étant effectuées, on les emploiera pour corriger à leur tour les premières valeurs de $\frac{N}{N^{VI}}$, $\frac{N'}{N^{VI}}$, $\frac{N''}{N^{VI}}$, $\frac{N'''}{N^{VI}}$; et ainsi de suite. Après deux approximations, ou trois au plus, on aura les valeurs des inconnues avec toute l'exactitude nécessaire.

Mais pour la rapidité des calculs que nous indiquons ici, et surtout *pour que la détermination des erreurs des rapports en fonctions des erreurs des masses ne jette pas dans un dédale inextricable d'opérations*, il est indispensable de coordonner toutes ces déterminations, comme nous allons l'indiquer brièvement. La détermination des premières valeurs des coefficients et celle de leurs corrections dépendent d'équations du premier degré, lorsqu'on néglige les carrés des corrections, ce qui est permis dans chaque approximation, sauf à en tenir compte dans l'approximation suivante. Les différents systèmes d'équations que l'on obtient ainsi pour déterminer les corrections successives, présentent tous les mêmes coefficients des inconnues que le système primitif; ils n'en diffèrent que par les termes connus qui vont en dimi-

nuant rapidement de valeur absolue d'approximation en approximation. On voit qu'au lieu de résoudre tous ces systèmes d'équations séparément, il suffit de résoudre d'abord le système primitif en y représentant les termes connus par des indéterminées; on obtient ainsi des formules qui, sans aucune nouvelle résolution d'équations, donnent très rapidement les valeurs approchées des inconnues et leurs corrections successives en attribuant aux indéterminées des valeurs convenables.

Il faut encore remarquer que quand on passera au calcul des solutions correspondantes aux racines provenant des petites planètes, ce ne seront plus les rapports des coefficients au coefficient N^{VI} qui devront être calculés; ces rapports seraient infinis dans la première approximation. On pourra prendre leurs rapports avec le coefficient N'''.

9. Occupons-nous actuellement de la détermination des erreurs des racines et des coefficients en fonctions des erreurs des masses des planètes, erreurs que je désignerai, suivant l'usage, par μm, $\mu' m'$, $\mu'' m''$, $\mu''' m'''$, $\mu^{IV} m^{IV}$, $\mu^{V} m^{V}$ et $\mu^{VI} m^{VI}$.

Si les nombres μ, μ', μ''... étaient considérables, la détermination que nous avons en vue serait presque impraticable. Mais il est au contraire très vraisemblable que ces quantités ne sont que de petites fractions : qu'ainsi pour Jupiter μ^{IV} est au-dessous de 0,002; que pour Saturne μ^{V} ne dépasse pas 0,01; que pour Vénus, la Terre et Mars, μ', μ'' et μ''' ne dépassent pas 0,04. Les masses de Mercure et d'Uranus seules présentent une grande incertitude; et il ne serait pas impossible que μ s'élevât à $\frac{1}{3}$ et μ^{VI} à $\frac{1}{10}$, ou même plus. Mais comme l'influence de ces masses est beaucoup moindre que celle des autres, à cause de la petitesse de Mercure et de l'éloignement d'Uranus, il y aura encore peu d'inconvénients à traiter μ et μ^{VI} comme de petites quantités.

Cela étant, si l'on suppose ordonnées par rapport aux puissances de μ, μ', μ'',... les variations de chacun des nombres dont nous avons indiqué la détermination, on pourra les obtenir sous cette forme avec autant d'exactitude qu'on le voudra, en reprenant tous les calculs que nous avons tracés. Nous nous contenterons d'obtenir la partie de ces variations qui est proportionnelle aux premières puissances des erreurs des masses.

D'autre part, il résulte de nos calculs que les corrections dépendantes de la seconde approximation sont toujours des fractions très petites des valeurs absolues des nombres qu'elles concernent. Il est donc tout-à-fait suffisant de s'arrêter à la première approximation dans la détermination des variations produites par les erreurs des masses.

Commençons par calculer les variations des racines des équations du troisième et du quatrième degré; et prenons pour exemple celles de l'équation du troisième degré que j'écrirai ainsi

$$g^3 + a_1 g^2 + a_2 g + a_3 = 0.$$

On a entre les coefficients et les racines de cette équation, les relations suivantes

$$\begin{aligned} a_1 &= -g - g_1 - g_2, \\ a_2 &= g g_1 + g g_2 + g_1 g_2, \\ a_3 &= -g g_1 g_2; \end{aligned}$$

ces relations fournissent entre les variations des coefficients et les variations des racines, les trois conditions

$$\begin{aligned} \delta a_1 &= -\delta g - \delta g_1 - \delta g_2, \\ \delta a_2 &= (g_1 + g_2)\delta g + (g + g_2)\delta g_1 + (g + g_1)\delta g_2, \\ \delta a_3 &= -g_1 g_2 \delta g - g g_2 \delta g_1 - g g_1 \delta g_2. \end{aligned}$$

Pour en déduire la variation δg, il suffit de multiplier ces relations respectivement par g^2, g^1, g^0, puis de les ajouter membre à membre; δg_1 et δg_2 disparaissent, et l'on trouve

$$\delta g = -\frac{g^2 \delta a_1 + g \delta a_2 + \delta a_3}{(g - g_1)(g - g_2)};$$

cette formule fera connaître les variations des racines quand on aura les variations des coefficients.

Or les coefficients résultent (§ **6**) de simples multiplications arithmétiques entre des facteurs dépendant des masses. Introduisons dans ces facteurs les corrections qu'ils éprouveraient par l'effet des changements des masses, développons les produits en n'y conservant que les premières puissances des masses, et nous trouverons aisément les varia-

tions des coefficients. Elles se présenteront sous la forme

$$\delta a_1 = \varepsilon\mu + \varepsilon'\mu' + \varepsilon''\mu'' + \varepsilon'''\mu''' + \varepsilon^{\text{IV}}\mu^{\text{IV}} + \varepsilon^{\text{V}}\mu^{\text{V}} + \varepsilon^{\text{VI}}\mu^{\text{VI}},$$
$$\delta a_2 = \zeta\mu + \zeta'\mu' + \zeta''\mu'' + \zeta'''\mu''' + \zeta^{\text{IV}}\mu^{\text{IV}} + \zeta^{\text{V}}\mu^{\text{V}} + \zeta^{\text{VI}}\mu^{\text{VI}},$$
$$\delta a_3 = \eta\mu + \eta'\mu' + \eta''\mu'' + \eta'''\mu''' + \eta^{\text{IV}}\mu^{\text{IV}} + \eta^{\text{V}}\mu^{\text{V}} + \eta^{\text{VI}}\mu^{\text{VI}},$$

et elles donneront lieu à des vérifications importantes qui permettront de contrôler toute la suite du travail.

Les coefficients a_1, a_2, a_3 sont des fonctions homogènes du premier, du second et du troisième degré des quantités (4,5), (4,6)..... Ces quantités étant proportionnelles aux masses, si toutes les masses viennent à augmenter dans le rapport de 1 à $1+\gamma$, a_1 augmentera aussi dans le même rapport; a_2 et a_3, en vertu des parties conservées de δa_2 et δa_3, augmenteront respectivement dans les rapports de 1 à $1+2\gamma$ et $1+3\gamma$. La somme algébrique des coefficients de μ, μ', μ'',..... dans δa_1 doit donc être égale à a_1; la somme algébrique des coefficients dans δa_2 doit être double de a_2; et celle des coefficients dans δa_3 doit être triple de a_3. On a ainsi les relations de conditions

$$\varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon'' + \varepsilon''' + \varepsilon^{\text{IV}} + \varepsilon^{\text{V}} + \varepsilon^{\text{VI}} = a_1,$$
$$\zeta + \zeta' + \zeta'' + \zeta''' + \zeta^{\text{IV}} + \zeta^{\text{V}} + \zeta^{\text{VI}} = 2a_2,$$
$$\eta + \eta' + \eta'' + \eta''' + \eta^{\text{IV}} + \eta^{\text{V}} + \eta^{\text{VI}} = 3a_3.$$

Reprenons les équations (4). Si toutes les masses des planètes augmentent dans le même rapport, il en sera de même des coefficients numériques contenus dans ces équations; et par conséquent, pourvu que g augmente aussi dans le même rapport, ce qui a effectivement lieu, il n'y aura rien à changer aux rapports $\frac{N}{N^{\text{VI}}}$, $\frac{N'}{N^{\text{VI}}}$, etc.; et de là résultent ces deux vérifications :

La somme algébrique des coefficients de μ, μ',... dans la variation d'une racine doit être égale à la racine même.

La somme algébrique des coefficients de μ, μ',...dans la variation d'un des rapports $\frac{N}{N^{\text{VI}}}$, $\frac{N'}{N^{\text{VI}}}$,... doit être nulle.

Quant aux variations des rapports $\frac{N}{N^{\text{VI}}}$, $\frac{N'}{N^{\text{VI}}}$,.... il suffira, pour les

déterminer, de recourir aux formules qui auront servi au calcul des rapports eux-mêmes, comme nous l'avons indiqué au § 8. Il n'y aura qu'à attribuer pour valeurs aux indéterminées introduites dans ces formules, les variations qu'elles éprouveront et par la variation des racines et par la variation des coefficients mêmes des équations.

Il nous resterait enfin à dire comment étant connues les variations des rapports des coefficients, on en déduira celles de l'angle θ et des coefficients eux-mêmes. Mais nous ne nous y arrêterons pas, et le lecteur y suppléera aisément. Il est toutefois essentiel de remarquer que *dans toutes ces variations, la somme algébrique des coefficients de* μ, μ', μ'', ... *doit être nulle.*

10. Donnons d'abord les éléments de notre système planétaire, tels que l'observation les fournit pour une origine du temps fixée au 1er janvier 1800 :

	MASSES.	EXCENTRICITÉS.	LONGITUDES des périhélies.	INCLINAISONS.	LONGITUDES des nœuds ascend.
MERCURE	$\frac{1}{1\,914\,2\,16}$	0,205 616	74°20′ 6″	7° 0′ 5,9	45°57′ 9″
VENUS	$\frac{1}{4\,1\,432}$	0,006 862	128 43 6	3 23 28,5	74 51 41
LA TERRE	$\frac{1}{3\,66\,2\,8\,4}$	0,016 792	99 30 29	0 0 0,0	0 0 0
MARS	$\frac{1}{2\,7\,1\,1\,3\,3\,1\,2}$	0,093 217	332 22 51	1 51 6,2	47 59 38
JUPITER	$\frac{1}{1\,4\,6\,4}$	0,048 162	11 7 38	1 18 51,6	98 25 45
SATURNE	$\frac{1}{3\,5\,1\,3}$	0,056 150	89 8 20	2 29 35,9	111 56 7
URANUS	$\frac{1}{17\,91\,.}$	0,046 611	167 30 24	0 46 28,0	72 59 21

Nous n'avons pas rapporté les grands axes que nous avons admis, parce qu'ils sont les mêmes que ceux qu'on trouve au § 22 du livre VI de la *Mécanique céleste*, pour le calcul des perturbations.

De la connaissance des masses et des grands axes dépend, ainsi que nous l'avons déjà dit, celle des coefficients (0,1), (1,0)... Il conviendrait sans doute de présenter ici les valeurs de ces coefficients, puisqu'ils servent de base à tous les calculs; pour abréger nous renverrons encore à la *Mécanique céleste*, livre VI, § 24, où on les trouvera calculés pour des masses un peu différentes de celles que nous venons d'adopter,

et exprimés en secondes décimales. On les réduira facilement aux nouvelles masses, auxquelles ils doivent être proportionnels; et on les ramènera à la division sexagésimale que nous avons suivie.

11. Les tableaux suivants comprennent les sept systèmes de solutions qui concernent les variations séculaires des excentricités et des longitudes des périhélies. Nous nous sommes bornés à y inscrire les coefficients eux-mêmes, et nous avons supprimé les valeurs de leurs rapports qui auraient doublé la longueur des tableaux sans nécessité. En regard de chaque nombre nous avons placé l'expression de sa variation en fonction des variations des masses; les variations des angles sont exprimées en secondes sexagésimales.

Désignant des quantités.	VALEURS numériques pour les masses admises	VARIATIONS EN FONCTIONS DES VARIATIONS μ, μ'... DES MASSES.
		Premier Système
g	2",258 42	$0'',000\,2\,\mu' + 0'',000\,4\,\mu'' + 0'',000\,1\,\mu''' + 0'',945\,2\,\mu^{iv} + 1'',869\,5\,\mu^{v} - 0'',056\,9\,\mu^{vi}$
c	126°43'15"	$-18'\mu + 425''\mu' + 844''\mu'' + 257''\mu''' - 83\,541''\mu^{iv} + 51\,145''\mu^{v} - 30\,888''\mu^{vi}$
N	0,000 440	$-0,000\,01\,\mu - 0,000\,16\,\mu' - 0,000\,09\,\mu'' + 0,000\,00\,\mu''' - 0,000\,30\,\mu^{iv} - 0,000\,21\,\mu^{v} - 0,000\,55\,\mu^{vi}$
N'	0,000 484	$-0,000\,02\,\mu - 0,000\,05\,\mu' - 0,000\,05\,\mu'' + 0,000\,00\,\mu''' - 0,000\,34\,\mu^{iv} + 0,000\,07\,\mu^{v} + 0,000\,39\,\mu^{vi}$
N''	0,000 526	$-0,000\,01\,\mu - 0,000\,08\,\mu' - 0,000\,02\,\mu'' + 0,000\,00\,\mu''' - 0,000\,35\,\mu^{iv} + 0,000\,04\,\mu^{v} + 0,000\,42\,\mu^{vi}$
N'''	0,000 743	$0,000\,00\,\mu - 0,000\,02\,\mu' - 0,000\,05\,\mu'' + 0,000\,00\,\mu''' - 0,000\,48\,\mu^{iv} - 0,000\,05\,\mu^{v} + 0,000\,60\,\mu^{vi}$
N^{iv}	0,001 932	$0,000\,00\,\mu + 0,000\,01\,\mu' - 0,000\,01\,\mu'' + 0,000\,00\,\mu''' - 0,001\,26\,\mu^{iv} - 0,000\,31\,\mu^{v} + 0,001\,58\,\mu^{vi}$
N^{v}	0,001 863	$0,000\,00\,\mu + 0,000\,00\,\mu' - 0,000\,01\,\mu'' + 0,000\,00\,\mu''' - 0,001\,65\,\mu^{iv} - 0,000\,11\,\mu^{v} + 0,001\,55\,\mu^{vi}$
N^{vi}	0,032 030	$0,000\,00\,\mu + 0,000\,01\,\mu' + 0,000\,02\,\mu'' + 0,000\,00\,\mu''' - 0,012\,41\,\mu^{iv} + 0,012\,86\,\mu^{v} - 0,000\,56\,\mu^{vi}$
		Deuxième Système.
g_1	3",713 64	$0'',000\,2\,\mu + 0'',003\,2\,\mu' + 0'',007\,2\,\mu'' + 0'',002\,4\,\mu''' + 0'',659\,8\,\mu^{iv} - 2'',828\,3\,\mu^{v} + 0'',213\,7\,\mu^{vi}$
c_1	27°21'26"	$75'\mu + 28''\mu' + 107''\mu'' + 2''\mu''' - 61\,450''\mu^{iv} + 69\,581''\mu^{v} - 8\,343''\mu^{vi}$
N_1	0,025 203	$-0,000\,14\,\mu - 0,027\,38\,\mu' - 0,013\,77\,\mu'' - 0,000\,50\,\mu''' - 0,020\,51\,\mu^{iv} + 0,057\,25\,\mu^{v} + 0,000\,50\,\mu^{vi}$
N_1'	0,016 789	$-0,000\,11\,\mu - 0,003\,16\,\mu' - 0,004\,55\,\mu'' - 0,000\,18\,\mu''' - 0,000\,05\,\mu^{iv} + 0,015\,43\,\mu^{v} + 0,000\,15\,\mu^{vi}$
N_1''	0,016 611	$-0,000\,10\,\mu - 0,003\,11\,\mu' - 0,002\,20\,\mu'' - 0,000\,14\,\mu''' - 0,007\,54\,\mu^{iv} + 0,011\,57\,\mu^{v} + 0,000\,30\,\mu^{vi}$
N_1'''	0,019 139	$-0,000\,03\,\mu - 0,000\,70\,\mu' - 0,001\,13\,\mu'' - 0,000\,01\,\mu''' - 0,000\,33\,\mu^{iv} + 0,003\,45\,\mu^{v} + 0,000\,75\,\mu^{vi}$
N_1^{iv}	0,044 021	$0,000\,01\,\mu + 0,000\,00\,\mu' + 0,000\,00\,\mu'' + 0,000\,00\,\mu''' + 0,002\,83\,\mu^{iv} - 0,003\,65\,\mu^{v} + 0,000\,81\,\mu^{vi}$
N_1^{v}	0,034 725	$0,000\,01\,\mu + 0,000\,00\,\mu' + 0,000\,02\,\mu'' + 0,000\,01\,\mu''' - 0,003\,71\,\mu^{iv} + 0,003\,84\,\mu^{v} - 0,000\,17\,\mu^{vi}$
N_1^{vi}	− 0,030 861	$0,000\,00\,\mu + 0,000\,11\,\mu' + 0,000\,18\,\mu'' + 0,000\,06\,\mu''' - 0,014\,96\,\mu^{iv} + 0,009\,98\,\mu^{v} + 0,000\,50\,\mu^{vi}$

Désignat. des quantités.	VALEURS numériques pour les masses admises	VARIATIONS EN FONCTIONS DES VARIATIONS μ, μ',. . DES MASSES.
		Troisième Système.
g_2	22",4273	$0'',0012\,\mu' + 0'',0027\,\mu'' + 0'',0009\,\mu''' + 17'',5266\,\mu^{iv} - 4'',5605\,\mu^{v} + 0'',3350\,\mu^{vi}$
$\mathfrak{C}_2$	126°44′8"	$22''\mu' + 41''\mu'' - 4''\mu''' - 19\,470''\mu^{iv} + 22\,281''\mu^{v} - 2\,869''\mu^{vi}$
N_2	0,000 100	$0,000\,00\,\mu + 0,000\,13\,\mu' + 0,000\,12\,\mu'' + 0,000\,01\,\mu''' - 0,000\,27\,\mu^{iv} + 0,000\,01\,\mu^{v} + 0,000\,00\,\mu^{vi}$
N_2'	− 0,000 378	$-0,000\,04\,\mu - 0,001\,04\,\mu' - 0,001\,70\,\mu'' - 0,000\,17\,\mu''' + 0,002\,41\,\mu^{iv} + 0,000\,47\,\mu^{v} + 0,000\,07\,\mu^{vi}$
N_2''	0,002 366	$0,000\,04\,\mu + 0,001\,92\,\mu' + 0,000\,28\,\mu'' + 0,000\,15\,\mu''' - 0,003\,42\,\mu^{iv} - 0,001\,16\,\mu^{v} - 0,000\,14\,\mu^{vi}$
N_2'''	0,015 170	$0,000\,05\,\mu + 0,001\,00\,\mu' + 0,005\,04\,\mu'' - 0,000\,03\,\mu''' - 0,007\,47\,\mu^{iv} - 0,002\,72\,\mu^{v} - 0,001\,30\,\mu^{vi}$
N_2^{iv}	− 0,015 561	$0,000\,00\,\mu + 0,000\,00\,\mu' + 0,000\,00\,\mu'' - 0,000\,00\,\mu''' + 0,014\,63\,\mu^{iv} - 0,014\,93\,\mu^{v} + 0,000\,30\,\mu^{vi}$
N_2^{v}	0,048 282	$0,000\,00\,\mu + 0,000\,00\,\mu' + 0,000\,00\,\mu'' - 0,000\,01\,\mu''' - 0,011\,24\,\mu^{iv} - 0,011\,63\,\mu^{v} - 0,000\,19\,\mu^{vi}$
N_2^{vi}	− 0,001 764	$0,000\,00\,\mu - 0,000\,00\,\mu' + 0,000\,00\,\mu'' - 0,000\,00\,\mu''' - 0,001\,00\,\mu^{iv} - 0,001\,04\,\mu^{v} + 0,000\,03\,\mu^{vi}$
		Quatrième Système.
g_3	5",2989	$-0'',1635\,\mu + 2'',4351\,\mu' + 0'',9764\,\mu'' + 0'',0382\,\mu''' + 1'',9200\,\mu^{iv} + 0'',0907\,\mu^{v} + 0'',0019\,\mu^{vi}$
$\mathfrak{C}_3$	85°47′45"	$-5430''\mu + 16\,075''\mu' - 17\,722''\mu'' - 3039''\mu''' - 53\,444''\mu^{iv} + 56\,889''\mu^{v} + 6671''\mu^{vi}$
N_3	0,170 999	$-0,007\,83\,\mu - 0,041\,63\,\mu' + 0,021\,17\,\mu'' + 0,001\,35\,\mu''' + 0,074\,19\,\mu^{iv} - 0,045\,03\,\mu^{v} - 0,002\,22\,\mu^{vi}$
N_3'	0,016 886	$0,012\,28\,\mu - 0,018\,29\,\mu' - 0,007\,21\,\mu'' - 0,000\,71\,\mu''' - 0,016\,83\,\mu^{iv} - 0,005\,58\,\mu^{v} - 0,000\,24\,\mu^{vi}$
N_3''	0,010 622	$0,007\,60\,\mu + 0,015\,75\,\mu' - 0,002\,55\,\mu'' - 0,000\,70\,\mu''' - 0,016\,18\,\mu^{iv} - 0,003\,76\,\mu^{v} - 0,000\,16\,\mu^{vi}$
N_3'''	0,001 655	$0,001\,18\,\mu + 0,002\,79\,\mu' + 0,000\,65\,\mu'' - 0,000\,07\,\mu''' - 0,003\,91\,\mu^{iv} - 0,000\,62\,\mu^{v} - 0,000\,02\,\mu^{vi}$
N_3^{iv}	− 0,000 020	$0,000\,00\,\mu \quad 0,000\,00\,\mu' \quad 0,000\,00\,\mu'' \quad 0,000\,00\,\mu''' \quad 0,000\,00\,\mu^{iv} \quad 0,000\,00\,\mu^{v} \quad 0,000\,00\,\mu^{vi}$
N_3^{v}	− 0,000 018	$0,000\,00\,\mu \quad 0,000\,00\,\mu' \quad 0,000\,00\,\mu'' \quad 0,000\,00\,\mu''' \quad 0,000\,00\,\mu^{iv} \quad 0,000\,00\,\mu^{v} \quad 0,000\,00\,\mu^{vi}$
N_3^{vi}	0,000 007	$0,000\,00\,\mu \quad 0,000\,00\,\mu' \quad 0,000\,00\,\mu'' \quad 0,000\,00\,\mu''' \quad 0,000\,00\,\mu^{iv} \quad 0,000\,00\,\mu^{v} \quad 0,000\,00\,\mu^{vi}$
		Cinquième Système.
g_4	7",5747	$0'',4453\,\mu - 0'',2982\,\mu' - 1'',2449\,\mu'' + 0'',1577\,\mu''' - 5'',1789\,\mu^{iv} - 0'',2429\,\mu^{v} - 0'',0062\,\mu^{vi}$
$\mathfrak{C}_4$	35°38′43"	$71\,569''\mu + 162\,953''\mu' - 70\,077''\mu'' + 6\,810''\mu''' - 202\,460''\mu^{iv} + 34\,886''\mu^{v} - 3675''\mu^{vi}$
N_4	0,025 468	$0,001\,88\,\mu + 0,064\,55\,\mu' - 0,011\,63\,\mu'' - 0,002\,33\,\mu''' - 0,061\,72\,\mu^{iv} + 0,008\,25\,\mu^{v} + 0,001\,00\,\mu^{vi}$
N_4'	− 0,023 826	$-0,006\,61\,\mu - 0,009\,25\,\mu' + 0,011\,31\,\mu'' + 0,000\,68\,\mu''' + 0,014\,12\,\mu^{iv} - 0,009\,31\,\mu^{v} - 0,000\,94\,\mu^{vi}$
N_4''	− 0,018 925	$-0,006\,29\,\mu - 0,008\,83\,\mu' + 0,004\,45\,\mu'' + 0,000\,89\,\mu''' + 0,017\,63\,\mu^{iv} - 0,007\,12\,\mu^{v} - 0,000\,74\,\mu^{vi}$
N_4'''	− 0,003 259	$-0,001\,20\,\mu - 0,002\,08\,\mu' - 0,001\,55\,\mu'' + 0,000\,08\,\mu''' - 0,006\,08\,\mu^{iv} - 0,001\,20\,\mu^{v} - 0,000\,13\,\mu^{vi}$
N_4^{iv}	0,000 012	$0,000\,00\,\mu \quad 0,000\,00\,\mu' \quad 0,000\,00\,\mu'' \quad 0,000\,00\,\mu''' \quad 0,000\,00\,\mu^{iv} \quad 0,000\,00\,\mu^{v} \quad 0,000\,00\,\mu^{vi}$
N_4^{v}	0,000 013	$0,000\,00\,\mu \quad 0,000\,00\,\mu' \quad 0,000\,00\,\mu'' \quad 0,000\,00\,\mu''' \quad 0,000\,00\,\mu^{iv} \quad 0,000\,00\,\mu^{v} \quad 0,000\,00\,\mu^{vi}$
N_4^{vi}	− 0,000 003	$0,000\,00\,\mu \quad 0,000\,00\,\mu' \quad 0,000\,00\,\mu'' \quad 0,000\,00\,\mu''' \quad 0,000\,00\,\mu^{iv} \quad 0,000\,00\,\mu^{v} \quad 0,000\,00\,\mu^{vi}$

Désignat. des quantités	VALEURS numériques pour les masses admises	VARIATIONS EN FONCTIONS DES VARIATIONS μ, μ',... DES MASSES.
		Sixième Système
g_6	17″,1527	$0'',191\,5\,\mu + 3'',611\,3\,\mu' + 4'',204\,5\,\mu'' - 0'',022\,4\,\mu''' + 8'',573\,3\,\mu^{\text{IV}} + 0'',386\,4\,\mu^{\text{V}} + 0'',007\,9\,\mu^{\text{VI}}$
ε_6	$-25^{\circ}\,11'\,33''$	$-457^{\circ}\,2''\,\mu - 466\,253''\,\mu' - 351\,864''\,\mu'' - 64\,874''\,\mu''' + 871\,825''\,\mu^{\text{IV}} - 14\,000''\,\mu^{\text{V}} - 1738''\,\mu^{\text{VI}}$
N_6	0,001 640	$0,000\,29\,\mu + 0,006\,07\,\mu' + 0,004\,87\,\mu'' + 0,001\,22\,\mu''' - 0,012\,11\,\mu^{\text{IV}} - 0,000\,30\,\mu^{\text{V}} - 0,000\,05\,\mu^{\text{VI}}$
N_5'	− 0,013 010	$-0,002\,68\,\mu - 0,040\,44\,\mu' - 0,045\,03\,\mu'' - 0,010\,88\,\mu''' + 0,096\,69\,\mu^{\text{IV}} + 0,001\,87\,\mu^{\text{V}} - 0,000\,46\,\mu^{\text{VI}}$
N_5''	0,011 782	$0,001\,62\,\mu + 0,042\,57\,\mu' + 0,020\,49\,\mu'' + 0,009\,24\,\mu''' - 0,072\,42\,\mu^{\text{IV}} - 0,001\,09\,\mu^{\text{V}} - 0,000\,40\,\mu^{\text{VI}}$
N_5'''	0,029 214	$0,015\,81\,\mu + 0,327\,74\,\mu' + 0,247\,24\,\mu'' + 0,024\,41\,\mu''' - 0,595\,21\,\mu^{\text{IV}} - 0,018\,48\,\mu^{\text{V}} - 0,001\,50\,\mu^{\text{VI}}$
N_5^{IV}	− 0,000 001	$0,000\,00\,\mu \quad 0,000\,00\,\mu' \quad 0,000\,00\,\mu'' \quad 0,000\,00\,\mu''' \quad 0,000\,00\,\mu^{\text{IV}} \quad 0,000\,00\,\mu^{\text{V}} \quad 0,000\,00\,\mu^{\text{VI}}$
N_5^{V}	− 0,000 008	$0,000\,00\,\mu \quad 0,000\,00\,\mu' \quad 0,000\,00\,\mu'' \quad 0,000\,00\,\mu''' \quad 0,000\,00\,\mu^{\text{IV}} \quad 0,000\,00\,\mu^{\text{V}} \quad 0,000\,00\,\mu^{\text{VI}}$
N_5^{VI}	0,000 000	$0,000\,00\,\mu \quad 0,000\,00\,\mu' \quad 0,000\,00\,\mu'' \quad 0,000\,00\,\mu''' \quad 0,000\,00\,\mu^{\text{IV}} \quad 0,000\,00\,\mu^{\text{V}} \quad 0,000\,00\,\mu^{\text{VI}}$
		Septième Système.
g_6	17″,863 3	$0'',098\,0\,\mu + 2'',208\,7\,\mu' + 3'',143\,1\,\mu'' + 0'',274\,8\,\mu''' + 11'',634\,7\,\mu^{\text{IV}} - 0'',510\,8\,\mu^{\text{V}} - 0'',012\,9\,\mu^{\text{VI}}$
ε_6	$-15^{\circ}\,28\,59''$	$-12773''\,\mu - 145\,102''\,\mu' - 109\,467''\,\mu'' + 24\,32''\,\mu''' + 256\,011''\,\mu^{\text{IV}} - 9\,116''\,\mu^{\text{V}} - 211''\,\mu^{\text{VI}}$
N_6	− 0,001 795	$-0,000\,42\,\mu - 0,007\,82\,\mu' - 0,006\,11\,\mu'' - 0,000\,96\,\mu''' + 0,014\,67\,\mu^{\text{IV}} + 0,000\,61\,\mu^{\text{V}} - 0,000\,02\,\mu^{\text{VI}}$
N_6'	0,015 340	$0,003\,21\,\mu + 0,042\,39\,\mu' + 0,048\,21\,\mu'' + 0,009\,36\,\mu''' - 0,099\,47\,\mu^{\text{IV}} - 0,003\,46\,\mu^{\text{V}} - 0,000\,24\,\mu^{\text{VI}}$
N_6''	− 0,016 913	$-0,002\,15\,\mu - 0,047\,09\,\mu' - 0,020\,44\,\mu'' - 0,010\,82\,\mu''' + 0,077\,80\,\mu^{\text{IV}} + 0,002\,45\,\mu^{\text{V}} - 0,000\,24\,\mu^{\text{VI}}$
N_6'''	0,073 049	$-0,014\,83\,\mu - 0,318\,37\,\mu' - 0,236\,10\,\mu'' - 0,021\,68\,\mu''' + 0,563\,40\,\mu^{\text{IV}} + 0,027\,34\,\mu^{\text{V}} - 0,000\,46\,\mu^{\text{VI}}$
N_6^{IV}	− 0,000 001	$0,000\,00\,\mu \quad 0,000\,00\,\mu' \quad 0,000\,00\,\mu'' \quad 0,000\,00\,\mu''' \quad 0,000\,00\,\mu^{\text{IV}} \quad 0,000\,00\,\mu^{\text{V}} \quad 0,000\,00\,\mu^{\text{VI}}$
N_6^{V}	− 0,000 010	$0,000\,00\,\mu \quad 0,000\,00\,\mu' \quad 0,000\,00\,\mu'' \quad 0,000\,00\,\mu''' \quad 0,000\,00\,\mu^{\text{IV}} \quad 0,000\,00\,\mu^{\text{V}} \quad 0,000\,00\,\mu^{\text{VI}}$
N_6^{VI}	0,000 001	$0,000\,00\,\mu \quad 0,000\,00\,\mu' \quad 0,000\,00\,\mu'' \quad 0,000\,00\,\mu''' \quad 0,000\,00\,\mu^{\text{IV}} \quad 0,000\,00\,\mu^{\text{V}} \quad 0,000\,00\,\mu^{\text{VI}}$

12. Rapprochons enfin les différents résultats relatifs à chaque planète, afin d'obtenir les formules particulières à chacune d'elles. Si nous posons, pour simplifier,

$$
\begin{aligned}
G &= 2'',258\,42\,t + 126^{\circ}\,43'\,15'',\\
G_1 &= 3,713\,64\,t + 27.21.26,\\
G_2 &= 22,427\,3\,t + 126.44.\ 8,\\
G_3 &= 5,298\,9\,t + 85.47.45,\\
G_4 &= 7,574\,7\,t + 35.38.43,\\
G_5 &= 17,152\,7\,t - 25.11\ 33,\\
G_6 &= 17,863\,3\,t - 45.28.59,
\end{aligned}
$$

les valeurs de h, l, h', l', . . . seront données par les formules suivantes :

$$\begin{cases} h = 0{,}000\,440 \sin G + 0{,}025\,203 \sin G_1 + 0{,}000\,100 \sin G_2 + 0{,}170\,999 \sin G_3 \\ \qquad + 0{,}025\,468 \sin G_4 + 0{,}001\,640 \sin G_5 - 0{,}001\,795 \sin G_6, \\ l = 0{,}000\,440 \cos G + 0{,}025\,203 \cos G_1 + 0{,}000\,100 \cos G_2 + 0{,}170\,999 \cos G_3 \\ \qquad + 0{,}025\,468 \cos G_4 + 0{,}001\,640 \cos G_5 - 0{,}001\,795 \cos G_6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} h' = 0{,}000\,484 \sin G + 0{,}016\,789 \sin G_1 - 0{,}000\,378 \sin G_2 + 0{,}016\,886 \sin G_3 \\ \qquad - 0{,}023\,826 \sin G_4 - 0{,}013\,010 \sin G_5 + 0{,}015\,340 \sin G_6, \\ l' = 0{,}000\,484 \cos G + 0{,}016\,789 \cos G_1 - 0{,}000\,378 \cos G_2 + 0{,}016\,886 \cos G_3 \\ \qquad - 0{,}023\,826 \cos G_4 - 0{,}013\,010 \cos G_5 + 0{,}015\,340 \cos G_6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} h'' = 0{,}000\,526 \sin G + 0{,}016\,611 \sin G_1 + 0{,}002\,366 \sin G_2 + 0{,}010\,622 \sin G_3 \\ \qquad - 0{,}018\,925 \sin G_4 + 0{,}011\,782 \sin G_5 - 0{,}016\,913 \sin G_6, \\ l'' = 0{,}000\,526 \cos G + 0{,}016\,611 \cos G_1 + 0{,}002\,366 \cos G_2 + 0{,}010\,622 \cos G_3 \\ \qquad - 0{,}018\,925 \cos G_4 + 0{,}011\,782 \cos G_5 - 0{,}016\,913 \cos G_6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} h''' = 0{,}000\,743 \sin G + 0{,}019\,139 \sin G_1 + 0{,}015\,170 \sin G_2 + 0{,}001\,655 \sin G_3 \\ \qquad - 0{,}003\,259 \sin G_4 + 0{,}029\,214 \sin G_5 + 0{,}073\,049 \sin G_6, \\ l''' = 0{,}000\,743 \cos G + 0{,}019\,139 \cos G_1 + 0{,}015\,170 \cos G_2 + 0{,}001\,655 \cos G_3 \\ \qquad - 0{,}003\,259 \cos G_4 + 0{,}029\,214 \cos G_5 + 0{,}073\,049 \cos G_6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} h^{\text{iv}} = 0{,}001\,932 \sin G + 0{,}044\,021 \sin G_1 - 0{,}015\,561 \sin G_2 - 0{,}000\,020 \sin G_3 \\ \qquad + 0{,}000\,012 \sin G_4 - 0{,}000\,001 \sin G_5 - 0{,}000\,001 \sin G_6, \\ l^{\text{iv}} = 0{,}001\,932 \cos G + 0{,}044\,021 \cos G_1 - 0{,}015\,561 \cos G_2 - 0{,}000\,020 \cos G_3 \\ \qquad + 0{,}000\,012 \cos G_4 - 0{,}000\,001 \cos G_5 - 0{,}000\,001 \cos G_6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} h^{\text{v}} = 0{,}001\,863 \sin G + 0{,}034\,725 \sin G_1 + 0{,}048\,282 \sin G_2 - 0{,}000\,018 \sin G_3 \\ \qquad + 0{,}000\,013 \sin G_4 - 0{,}000\,008 \sin G_5 - 0{,}000\,010 \sin G_6, \\ l^{\text{v}} = 0{,}001\,863 \cos G + 0{,}034\,725 \cos G_1 + 0{,}048\,282 \cos G_2 - 0{,}000\,018 \cos G_3 \\ \qquad + 0{,}000\,013 \cos G_4 - 0{,}000\,008 \cos G_5 - 0{,}000\,010 \cos G_6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} h^{\text{vi}} = 0{,}032\,030 \sin G - 0{,}030\,861 \sin G_1 - 0{,}001\,764 \sin G_2 + 0{,}000\,007 \sin G_3 \\ \qquad - 0{,}000\,003 \sin G_4 + 0{,}000\,000 \sin G_5 + 0{,}000\,001 \sin G_6, \\ l^{\text{vi}} = 0{,}032\,030 \cos G - 0{,}030\,861 \cos G_1 - 0{,}001\,764 \cos G_2 + 0{,}000\,007 \cos G_3 \\ \qquad - 0{,}000\,003 \cos G_4 + 0{,}000\,000 \cos G_5 + 0{,}000\,001 \cos G_6. \end{cases}$$

Nous espérons qu'aucune erreur de quelque importance ne se sera glissée dans ces formules; et l'on s'en convaincra comme nous, si l'on veut les soumettre aux vérifications suivantes.

Chacun des arguments g, g_1, g_2 . . . a été déterminé séparément, par des calculs distincts; et comme on connaît *à priori* la somme de ces

arguments, il en résulte une vérification qui embrasse aussi la détermination des rapports des coefficients.

Si dans les expressions de h, l, h', l', ... on fait $t = 0$, on doit retrouver les valeurs qu'affectent ces quantités à l'origine du temps. Or on peut reconnaître que ces conditions, qui sont au nombre de quatorze, vérifient tous les calculs. Considérons les intégrales générales (5) qui renferment encore quatorze indéterminées, après qu'on a calculé les rapports des coefficients entre eux. Nous avons vu qu'on ne résolvait pas directement ces quatorze équations, après y avoir supposé le temps nul; mais que chaque inconnue était obtenue par une élimination qui repose sur les relations qui existent entre les différentes quantités $\left(\frac{N}{N^{\text{vi}}}, \frac{N'}{N^{\text{vi}}}, \ldots\ldots\right)$, $\left(\frac{N_1}{N_1^{\text{vi}}}, \frac{N'_1}{N_1^{\text{vi}}}, \ldots\ldots\right)$, ... prises dans deux systèmes différents des solutions. Si donc un seul de ces rapports $\frac{N}{N^{\text{vi}}}$, $\frac{N'}{N^{\text{vi}}}$... était inexact, les relations dont il est question cesseraient d'avoir lieu; la méthode d'élimination employée serait fautive, et les formules ne reproduiraient plus les excentricités et les positions des périhélies telles qu'elles ont lieu à l'origine du temps; ou ce qui revient au même, les quantités h_0, l_0, h'_0, l'_0, ... qui en dépendent.

13. On démontre (*Mécanique céleste*, livre II, § 56) que l'excentricité d'une planète ne pourra jamais dépasser la somme des valeurs absolues des coefficients N, N_1, N_2, ... qui entrent dans les expressions de h et de l relatives à cette planète. Il en résulte, pour les excentricités, des limites qu'on trouvera réunies dans le tableau suivant, avec les variations qu'elles subiraient par l'effet de petits changements apportés aux masses des planètes.

	LIMITES des excentricités	VARIATIONS QUE PRODUIRAIENT DANS CES LIMITES LES VARIATIONS DES MASSES
MERCURE..	0,225 646	$-0,005\,37\,\mu + 0,009\,41\,\mu' + 0,006\,78\,\mu'' - 0,000\,71\,\mu''' - 0,035\,39\,\mu^{\text{iv}} - 0,010\,78\,\mu^{\text{v}} + 0,004\,11\,\mu^{\text{vi}}$
VÉNUS.....	0,086 716	$0,024\,69\,\mu + 0,108\,20\,\mu' - 0,071\,82\,\mu'' + 0,018\,84\,\mu''' - 0,238\,91\,\mu^{\text{iv}} - 0,013\,43\,\mu^{\text{v}} + 0,001\,91\,\mu^{\text{vi}}$
LA TERRE.	0,077 747	$0,017\,59\,\mu + 0,112\,97\,\mu' + 0,031\,99\,\mu'' + 0,018\,48\,\mu''' - 0,195\,14\,\mu^{\text{iv}} + 0,012\,59\,\mu^{\text{v}} + 0,001\,34\,\mu^{\text{vi}}$
MARS.....	0,142 243	$0,003\,38\,\mu + 0,014\,51\,\mu' + 0,017\,21\,\mu'' + 0,003\,14\,\mu''' - 0,052\,08\,\mu^{\text{iv}} - 0,015\,56\,\mu^{\text{v}} - 0,001\,76\,\mu^{\text{vi}}$
JUPITER...	0,061 548	$0,000\,00\,\mu - 0,000\,00\,\mu' - 0,000\,01\,\mu'' - 0,000\,00\,\mu''' - 0,013\,06\,\mu^{\text{iv}} + 0,010\,97\,\mu^{\text{v}} + 0,002\,09\,\mu^{\text{vi}}$
SATURNE...	0,084 919	$0,000\,00\,\mu - 0,000\,00\,\mu' + 0,000\,01\,\mu'' - 0,000\,00\,\mu''' + 0,005\,88\,\mu^{\text{iv}} - 0,007\,08\,\mu^{\text{v}} + 0,001\,19\,\mu^{\text{vi}}$
URANUS ...	0,064 666	$0,000\,00\,\mu - 0,000\,11\,\mu' + 0,000\,16\,\mu'' - 0,000\,06\,\mu''' + 0,001\,55\,\mu^{\text{iv}} + 0,003\,92\,\mu^{\text{v}} - 0,003\,15\,\mu^{\text{vi}}$

Nous ferons simplement remarquer que les coefficients des premieres puissances des erreurs des masses, dans les expressions des variations des limites des excentricités de Jupiter, Saturne et Uranus sont de beaucoup plus petits que les valeurs absolues des limites elles-mêmes. *Ces limites sont donc connues avec une grande exactitude.* Cette conséquence est analogue à celle que nous avons déduite d'un calcul direct (page 103 de ce volume), relativement aux inclinaisons des orbites des mêmes planètes.

14. On peut, au moyen des formules du § **12**, déterminer quel sera l'état du système à une époque donnée; il suffira d'attribuer au temps la valeur qu'on lui suppose. Mais on doit observer que l'inexactitude des arguments g, g_1, ... est cause que les angles G, G_1, ... sont affectés d'erreurs qui croissent proportionnellement au temps; de sorte qu'après quelques périodes de ces angles, on ne connaît plus du tout leurs grandeurs relatives. Les formules qui donnent les valeurs de h, l, ... ne peuvent donc servir que pendant un certain temps, limité par l'inexactitude des masses admises.

Lorsqu'on se propose toutefois de prévoir si une partie des éléments du système pourront prendre entre eux une position donnée, il est possible, dans la détermination des valeurs correspondantes des autres éléments, de se débarrasser de la considération du temps. Nous n'en donnerons ici qu'un exemple, en nous proposant de chercher si rien ne s'oppose à ce que tous les périhélies aient coïncidé autrefois, ou à ce qu'ils coïncident dans l'avenir.

Si dans l'équation (13) nous mettons pour h, l, h', l', ... leurs valeurs $e \sin \varpi$, $e \cos \varpi$, $e' \sin \varpi'$, $e' \cos \varpi'$, ... puis que nous supposions $\varpi = \varpi' = \varpi''$, ... ces angles disparaîtront du premier membre qui deviendra un carré parfait; et en extrayant sa racine carrée, et considérant les sept planètes simultanément, on trouvera

$$m\sqrt{a}\,\mathrm{N}e + m'\sqrt{a'}\,\mathrm{N}'e' + m''\sqrt{a''}\,\mathrm{N}''e'' + m'''\sqrt{a'''}\,\mathrm{N}'''e''' + \ldots$$
$$+ m^{\mathrm{VI}}\sqrt{a^{\mathrm{VI}}}\,\mathrm{N}^{\mathrm{VI}}e^{\mathrm{VI}} = \text{constante}.$$

D'autre part, reportons-nous (§ **5**) à la formule qui détermine N^{VI}; il sera facile d'apercevoir que la constante qui se trouve ici dans le second membre a pour valeur

$$m\sqrt{a}\,\mathrm{N}^2 + m'\sqrt{a'}\,\mathrm{N}'^2 + \ldots\ldots + m^{\mathrm{VI}}\sqrt{a^{\mathrm{VI}}}\,\mathrm{N}^{\mathrm{VI}2}.$$

Substituons cette valeur dans la relation précédente, passons tous les termes dans le premier membre; formons enfin les équations analogues que donnent les sept systèmes de solutions, et nous obtiendrons les sept conditions

$$m\sqrt{a}\,\mathrm{N}(e-\mathrm{N})+m'\sqrt{a'}\,\mathrm{N}'(e'-\mathrm{N}')+\ldots+m^{\text{vi}}\sqrt{a^{\text{vi}}}\,\mathrm{N}^{\text{vi}}(e^{\text{vi}}-\mathrm{N}^{\text{vi}})=0,$$
$$m\sqrt{a}\,\mathrm{N}_1(e-\mathrm{N}_1)+m'\sqrt{a'}\,\mathrm{N}'_1(e'-\mathrm{N}'_1)+\ldots+m^{\text{vi}}\sqrt{a^{\text{vi}}}\,\mathrm{N}^{\text{vi}}_1(e^{\text{vi}}-\mathrm{N}^{\text{vi}}_1)=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$m\sqrt{a}\,\mathrm{N}_6(e-\mathrm{N}_6)+m'\sqrt{a'}\,\mathrm{N}'_6(e'-\mathrm{N}'_6)+\ldots+m^{\text{vi}}\sqrt{a^{\text{vi}}}\,\mathrm{N}^{\text{vi}}_6(e^{\text{vi}}-\mathrm{N}^{\text{vi}}_6)=0.$$

De ces équations on déduit les valeurs suivantes des excentricités

$$\begin{aligned} e &= \mathrm{N}+\mathrm{N}_1+\mathrm{N}_2+\ldots\ldots+\mathrm{N}_6,\\ e' &= \mathrm{N}'+\mathrm{N}'_1+\mathrm{N}'_2+\ldots\ldots+\mathrm{N}'_6,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ e^{\text{vi}} &= \mathrm{N}^{\text{vi}}+\mathrm{N}^{\text{vi}}_1+\mathrm{N}^{\text{vi}}_2+\ldots\ldots+\mathrm{N}^{\text{vi}}_6, \end{aligned}$$

on s'en convaincra aisément par la substitution; les résultats seront nuls, en vertu des relations (6).

Ainsi, en admettant que tous les périhélies viennent à coïncider, on pourra déterminer, sans calcul, les valeurs correspondantes des excentricités. On doit toutefois remarquer que rien n'indique encore quels sont les signes qu'on doit attribuer aux coefficients N, N_1, N_2,... puisque ces signes changent dans les formules (5) quand on augmente les angles $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_1$,... de 180°; et ainsi l'on pourrait penser qu'il y aura beaucoup de solutions à la question. Pour lever cette difficulté, considérons qu'en déterminant à l'époque de la coïncidence des périhélies les angles $\mathcal{E}$ par la formule (8*), tous ces angles sont égaux et ont même sinus, de sorte qu'on a

$$\begin{aligned} h &= (\mathrm{N}+\mathrm{N}_1+\mathrm{N}_2+\ldots\ldots+\mathrm{N}_6)\sin\mathcal{E},\\ h' &= (\mathrm{N}'+\mathrm{N}'_1+\mathrm{N}'_2+\ldots\ldots+\mathrm{N}'_6)\sin\mathcal{E},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Remarquons en outre que pour que ce soient réellement les extrémités périhélies des grands axes qui coïncident, il est indispensable que h, h', h'',... soient de même signe; et nous reconnaîtrons que nous ne devrons adopter pour N, N_1, N_2,... que les combinaisons de signes qui conduiront à des valeurs de même signe pour toutes les sommes

$$(\mathrm{N}+\mathrm{N}_1+\ldots\ldots+\mathrm{N}_6),\quad (\mathrm{N}'+\mathrm{N}'_1+\ldots\ldots+\mathrm{N}'_6)\ldots\ldots$$

Les valeurs négatives de ces sommes ne donneraient pas d'ailleurs des résultats différents de ceux que fournissent les valeurs positives qu'il suffira de considérer.

Si donc on venait à reconnaître qu'il est impossible de satisfaire à ces conditions, on pourrait prononcer avec certitude que les périhélies, tels qu'ils sont donnés par la première approximation des inégalités séculaires n'ont jamais coïncidé et ne coïncideront jamais. Cette impossibilité n'existe pas dans notre système planétaire, et l'on trouve que la coïncidence de tous les périhélies venant à s'établir, les excentricités ne pourront affecter que trois états différents.

En particulier, le retour des périhélies de Jupiter, Saturne et Uranus à une position commune dans le ciel, ramène toujours les mêmes excentricités de leurs orbites, savoir

$$e^{\text{IV}} = 0{,}030, \quad e^{\text{V}} = 0{,}085 \quad \text{et} \quad e^{\text{VI}} = 0{,}000.$$

Il en résulte que *si les formules de la première approximation donnaient réellement le mouvement complet des éléments des orbites*, il suffirait de chercher l'intervalle qui sépare deux coïncidences consécutives des périhélies pour connaître la période dans laquelle les excentricités et les positions relatives des périhélies de Jupiter, Saturne et Uranus effectueraient une révolution complète. On trouverait, par des calculs assez compliqués d'analyse indéterminée, que cette période est de 900 000 ans, et que l'incertitude des valeurs des masses permet de compter sur elle à 4000 ans près.

15. La détermination des *maxima* et des *minima* des excentricités, et celle des époques correspondantes, sont impossibles d'une manière générale. Mais lorsqu'on connaît l'époque approximativement, il suffit de développer les cosinus et les sinus des formules du § **12** proportionnellement aux puissances du temps pour arriver sous forme algébrique à une solution rigoureuse du problème.

J'ai trouvé ainsi que l'excentricité de la Terre décroîtra encore pendant 23 980 ans; qu'elle atteindra alors son minimum égal à 0,003 314, et que l'incertitude qui règne sur les valeurs des masses ne permet de répondre que du chiffre 3 des millièmes. On peut consulter (*Pl. I*) une représentation géométrique de la marche de l'excentricité de la Terre

pendant trois cent dix mille ans. L'unité de l'abscisse équivaut à 10 000 années, comptées à partir du 1er janvier 1800. L'unité de l'ordonnée équivaut à 0,001, et c'est cette ordonnée qui représente la grandeur de l'excentricité.

Je terminerai ce qui a rapport aux excentricités en faisant remarquer que le terme le plus grand qui entre dans l'expression de l'excentricité de Mars a pour argument 0",7106. Il varie avec une lenteur excessive, et il en résulte que les retours des *maxima* les plus prononcés de l'excentricité de cette planète, seraient séparés par un intervalle de plus de dix-huit cent mille ans.

Variations séculaires des inclinaisons et des longitudes des nœuds.

16. Désignons par φ l'inclinaison de l'orbite de Mercure sur le plan de l'écliptique de 1800, et par θ la longitude de son nœud ascendant; et posons

$$p = \operatorname{tang}\varphi \sin\theta,$$
$$q = \operatorname{tang}\varphi \cos\theta;$$

lorsque p et q seront connus, on calculera φ et θ par les formules

$$\operatorname{tang}\varphi = \sqrt{p^2 + q^2},$$
$$\operatorname{tang}\theta = \frac{p}{q}.$$

Désignons d'ailleurs par les mêmes lettres, affectées de un, de deux, de trois, de quatre, de cinq et de six indices, les mêmes quantités pour Vénus, la Terre, Mars, Jupiter, Saturne et Uranus;

Les variations de $p, q, p', q', \ldots$ ne dépendront que des coefficients $(0,1), (1,0), (0,2), (2,0), \ldots$ déjà employés (§ **2**). On détermine ces variations au moyen des équations différentielles linéaires suivantes (*Mécanique céleste*, livre II, § 59):

$$\frac{dp}{dt} = -[(0,1) + (0,2) + \ldots]\,q + (0,1)\,q' + \ldots,$$
$$\frac{dq}{dt} = [(0,1) + (0,2) + \ldots]\,p - (0,1)\,p' - \ldots,$$
$$\frac{dp'}{dt} = -[(1,0) + (1,2) + \ldots]\,q' + (1,0)\,q + \ldots,$$
$$\frac{dq'}{dt} = [(1,0) + (1,2) + \ldots]\,p' - (1,0)\,p - \ldots.$$

etc.

Ces équations s'intégreront comme celles du § **2**, et l'on obtiendra

$$\begin{aligned}
p &= \mathrm{M}\sin(kt+\gamma) + \mathrm{M}_1\sin(k_1t+\gamma_1) + \ldots,\\
q &= \mathrm{M}\cos(kt+\gamma) + \mathrm{M}_1\cos(k_1t+\gamma_1) + \ldots,\\
p' &= \mathrm{M}'\sin(kt+\gamma) + \mathrm{M}'_1\sin(k_1t+\gamma_1) + \ldots,\\
q' &= \mathrm{M}'\cos(kt+\gamma) + \mathrm{M}'_1\cos(k_1t+\gamma_1) + \ldots,\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Les coefficients qui entrent dans ces équations se détermineront comme pour le système des excentricités et des périhélies, ce qui nous dispense d'y revenir.

L'équation en k aura une de ses racines nulles; car on satisfait aux équations différentielles en y supposant $p, p', p''\ldots$ égaux et constants, ainsi que $q, q', q''\ldots$ Il doit donc y avoir un système de valeurs M, M', M'', ... toutes égales entre elles et correspondant à une racine nulle.

Les équations différentielles fournissent les sept intégrales suivantes, indépendantes du temps :

$$\left.\begin{aligned}
&(m\sqrt{a}\,\mathrm{M}\,p+m'\sqrt{a'}\,\mathrm{M}'p'+\ldots)^2+(m\sqrt{a}\,\mathrm{M}\,q+m'\sqrt{a'}\,\mathrm{M}'q'+\ldots)^2=\text{constante},\\
&(m\sqrt{a}\,\mathrm{M}_1p+m'\sqrt{a'}\,\mathrm{M}'_1p'+\ldots)^2+(m\sqrt{a}\,\mathrm{M}_1q+m'\sqrt{a'}\,\mathrm{M}'_1q'+\ldots)^2=\text{constante},\\
&\text{etc.};
\end{aligned}\right\}\quad 15.$$

et celle de ces intégrales qui correspond à la racine $k=0$ se décompose dans les deux autres

$$m\sqrt{a}\,p + m'\sqrt{a'}\,p' + \ldots = \text{constante}.$$
$$m\sqrt{a}\,q + m'\sqrt{a'}\,q' + \ldots = \text{constante}.$$

qu'on peut déduire immédiatement des équations différentielles.

Enfin on déduirait des équations différentielles, ou des équations (15) l'intégrale

$$m\sqrt{a}\,(p^2+q^2) + m'\sqrt{a'}\,(p'^2+q'^2) + \ldots = \text{constante}.$$

Cette relation sert, on le sait, à établir que les racines de l'équation en k sont toutes réelles et inégales.

17. Les tableaux qui suivent renferment les sept systèmes de solutions qui concernent les variations séculaires des inclinaisons et des longitudes des nœuds.

Désignat. des quantités.	VALEURS numériques pour les masses admises.	VARIATIONS EN FONCTIONS DES VARIATIONS μ, μ',... DES MASSES
		Premier Système.
k	0°	
γ	103°8′18″	$-77''\mu - 135''\mu' - 28''\mu''' - 9\,325''\mu^{\text{iv}} + 13\,347''\mu^{\text{v}} - 3\,782''\mu^{\text{vi}}$
M	0,027 413	$0{,}000\,02\,\mu' - 0{,}000\,02\,\mu'' - 0{,}002\,99\,\mu^{\text{iv}} + 0{,}004\,16\,\mu^{\text{v}} - 0{,}001\,16\,\mu^{\text{vi}}$
		(On sait que M′, M″, M‴, M^{iv}, M^{v} et M^{vi} sont tous égaux à M.)
		Deuxième Système.
k_1	$-2'',502\,23$	$-0'',000\,3\,\mu' - 0'',000\,6\,\mu'' - 0'',000\,2\,\mu''' - 0'',881\,3\,\mu^{\text{iv}} - 1'',444\,1\,\mu^{\text{v}} - 0'',177\,2\,\mu^{\text{vi}}$
γ_1	126°22′54″	$-507''\mu - 747''\mu' - 155''\mu'' - 180''\mu''' + 2\,508''\mu^{\text{iv}} + 211''\mu^{\text{v}} - 1135''\mu^{\text{vi}}$
M_1	0,003 890	$0{,}000\,16\,\mu - 0{,}001\,24\,\mu' - 0{,}000\,85\,\mu'' - 0{,}000\,06\,\mu''' - 0{,}005\,27\,\mu^{\text{iv}} + 0{,}003\,18\,\mu^{\text{v}} + 0{,}000\,69\,\mu^{\text{vi}}$
M_1'	0,002 527	$0{,}000\,14\,\mu + 0{,}000\,04\,\mu' - 0{,}000\,34\,\mu'' - 0{,}000\,03\,\mu''' - 0{,}003\,51\,\mu^{\text{iv}} + 0{,}001\,16\,\mu^{\text{v}} + 0{,}000\,54\,\mu^{\text{vi}}$
M_1''	0,002 287	$0{,}000\,09\,\mu + 0{,}000\,14\,\mu' - 0{,}000\,17\,\mu'' - 0{,}000\,03\,\mu''' - 0{,}003\,18\,\mu^{\text{iv}} + 0{,}000\,88\,\mu^{\text{v}} - 0{,}000\,28\,\mu^{\text{vi}}$
M_1'''	0,001 724	$0{,}000\,02\,\mu + 0{,}000\,05\,\mu' + 0{,}000\,04\,\mu'' - 0{,}000\,00\,\mu''' - 0{,}002\,04\,\mu^{\text{iv}} + 0{,}000\,26\,\mu^{\text{v}} + 0{,}000\,06\,\mu^{\text{vi}}$
M_1^{iv}	0,001 373	$0{,}000\,00\,\mu + 0{,}000\,01\,\mu' + 0{,}000\,01\,\mu'' + 0{,}000\,00\,\mu''' - 0{,}001\,29\,\mu^{\text{iv}} - 0{,}000\,02\,\mu^{\text{v}} + 0{,}000\,30\,\mu^{\text{vi}}$
M_1^{v}	0,001 159	$0{,}000\,00\,\mu + 0{,}000\,01\,\mu' + 0{,}000\,01\,\mu'' + 0{,}000\,00\,\mu''' - 0{,}001\,09\,\mu^{\text{iv}} - 0{,}000\,02\,\mu^{\text{v}} + 0{,}000\,08\,\mu^{\text{vi}}$
M_1^{vi}	$-0{,}016\,429$	$-0{,}000\,01\,\mu - 0{,}000\,07\,\mu' - 0{,}000\,05\,\mu'' - 0{,}000\,02\,\mu''' + 0{,}003\,11\,\mu^{\text{iv}} - 0{,}004\,06\,\mu^{\text{v}} + 0{,}000\,10\,\mu^{\text{vi}}$
		Troisième Système
k_2	$-25'',887\,31$	$-0'',000\,1\,\mu - 0'',001\,5\,\mu' - 0'',003\,3\,\mu'' - 0{,}001\,1\,\mu''' - 18{,}246\,9\,\mu^{\text{iv}} - 7'',3\,167\,\mu^{\text{v}} - 0{,}315\,5\,\mu^{\text{vi}}$
γ_2	126°5′44″	$-5''\mu + 33''\mu' + 114''\mu'' + 83''\mu''' - 57''\mu^{\text{iv}} - 81''\mu^{\text{v}} + 79''\mu^{\text{vi}}$
M_2	0,000 268	$0{,}000\,00\,\mu + 0{,}000\,03\,\mu' + 0{,}000\,08\,\mu'' - 0{,}000\,01\,\mu''' - 0{,}000\,18\,\mu^{\text{iv}} - 0{,}000\,08\,\mu^{\text{v}} - 0{,}000\,00\,\mu^{\text{vi}}$
M_2'	0,000 252	$-0{,}000\,01\,\mu - 0{,}000\,60\,\mu' - 0{,}001\,50\,\mu'' - 0{,}000\,01\,\mu''' - 0{,}001\,19\,\mu^{\text{iv}} + 0{,}000\,89\,\mu^{\text{v}} + 0{,}000\,03\,\mu^{\text{vi}}$
M_2''	0,000 737	$0{,}000\,02\,\mu + 0{,}001\,23\,\mu' + 0{,}000\,57\,\mu'' - 0{,}000\,16\,\mu''' - 0{,}001\,95\,\mu^{\text{iv}} - 0{,}000\,37\,\mu^{\text{v}} - 0{,}000\,07\,\mu^{\text{vi}}$
M_2'''	0,009 345	$0{,}000\,02\,\mu + 0{,}000\,27\,\mu' + 0{,}001\,40\,\mu'' + 0{,}000\,03\,\mu''' - 0{,}000\,87\,\mu^{\text{iv}} - 0{,}000\,53\,\mu^{\text{v}} - 0{,}000\,33\,\mu^{\text{vi}}$
M_2^{iv}	$-0{,}006\,316$	$0{,}000\,00\,\mu + 0{,}000\,00\,\mu' + 0{,}000\,00\,\mu'' + 0{,}000\,00\,\mu''' - 0{,}004\,52\,\mu^{\text{iv}} - 0{,}004\,59\,\mu^{\text{v}} - 0{,}000\,00\,\mu^{\text{vi}}$
M_2^{v}	0,015 774	$0{,}000\,00\,\mu - 0{,}000\,01\,\mu' - 0{,}000\,02\,\mu'' - 0{,}000\,00\,\mu''' - 0{,}004\,33\,\mu^{\text{iv}} - 0{,}004\,51\,\mu^{\text{v}} + 0{,}000\,20\,\mu^{\text{vi}}$
M_2^{vi}	$-0{,}000\,681$	$0{,}000\,00\,\mu + 0{,}000\,00\,\mu' + 0{,}000\,00\,\mu'' + 0{,}000\,00\,\mu''' - 0{,}000\,30\,\mu^{\text{iv}} - 0{,}000\,27\,\mu^{\text{v}} - 0{,}000\,04\,\mu^{\text{vi}}$
		Quatrième Système.
k_3	$-4'',795\,35$	$0{,}402\,3\,\mu - 1{,}335\,8\,\mu' - 0'',006\,2\,\mu'' - 0{,}063\,7\,\mu''' - 0{,}754\,1\,\mu^{\text{iv}} - 0{,}136\,1\,\mu^{\text{v}} - 0{,}000\,1\,\mu^{\text{vi}}$
γ_3	29°40′55″	$8\,944''\mu - 30\,968''\mu' - 56\,244''\mu'' + 1\,617''\mu''' + 112\,298''\mu^{\text{iv}} - 28\,446''\mu^{\text{v}} - 7\,203''\mu^{\text{vi}}$
M_3	0,103 470	$-0{,}016\,80\,\mu - 0{,}050\,46\,\mu' - 0{,}013\,44\,\mu'' + 0{,}002\,95\,\mu''' + 0{,}070\,00\,\mu^{\text{iv}} - 0{,}000\,77\,\mu^{\text{v}} + 0{,}000\,98\,\mu^{\text{vi}}$
M_3'	0,020 920	$0{,}008\,16\,\mu + 0{,}016\,59\,\mu' + 0{,}007\,34\,\mu'' - 0{,}000\,38\,\mu''' - 0{,}017\,12\,\mu^{\text{iv}} - 0{,}000\,07\,\mu^{\text{v}} + 0{,}000\,16\,\mu^{\text{vi}}$
M_3''	0,014 621	$0{,}005\,37\,\mu + 0{,}016\,22\,\mu' + 0{,}003\,18\,\mu'' - 0{,}000\,51\,\mu''' - 0{,}017\,69\,\mu^{\text{iv}} - 0{,}000\,31\,\mu^{\text{v}} + 0{,}000\,11\,\mu^{\text{vi}}$
M_3'''	0,002 954	$0{,}001\,08\,\mu + 0{,}003\,74\,\mu' + 0{,}001\,08\,\mu'' - 0{,}000\,07\,\mu''' - 0{,}005\,70\,\mu^{\text{iv}} - 0{,}000\,15\,\mu^{\text{v}} + 0{,}000\,02\,\mu^{\text{vi}}$
M_3^{iv}	$-0{,}000\,040$	$-0{,}000\,02\,\mu - 0{,}000\,04\,\mu' - 0{,}000\,00\,\mu'' + 0{,}000\,00\,\mu''' + 0{,}000\,06\,\mu^{\text{iv}} + 0{,}000\,01\,\mu^{\text{v}} - 0{,}000\,00\,\mu^{\text{vi}}$
M_3^{v}	$-0{,}000\,050$	$-0{,}000\,02\,\mu - 0{,}000\,05\,\mu' - 0{,}000\,01\,\mu'' - 0{,}000\,00\,\mu''' - 0{,}000\,07\,\mu^{\text{iv}} - 0{,}000\,01\,\mu^{\text{v}} - 0{,}000\,00\,\mu^{\text{vi}}$
M_3^{vi}	0,000 042	$0{,}000\,03\,\mu + 0{,}000\,02\,\mu' - 0{,}000\,01\,\mu'' - 0{,}000\,00\,\mu''' - 0{,}000\,06\,\mu^{\text{iv}} - 0{,}000\,00\,\mu^{\text{v}} + 0{,}000\,00\,\mu^{\text{vi}}$

Désignat. des quantités	VALEURS numériques pour les masses admises.	VARIATIONS EN FONCTIONS DES VARIATIONS μ, μ', . . DES MASSES.
		Cinquième Système.
λ_4	$-7'',067\ 95$	$-0'',668\ 8\ \mu - 0'',938\ 7\ \mu' - 0'',734\ 0\ \mu'' - 0'',116\ 9\ \mu''' - 4'',394\ 2\ \mu^{iv} - 0'',205\ 2\ \mu^{v} - 0'',004\ 9\ \mu^{vi}$
γ_4	$-87^{\circ}\ 51'44''$	$-145\ 668''\ \mu - 337\ 824''\ \mu' - 6\ 963''\ \mu'' + 23\ 462''\ \mu''' + 396\ 915''\ \mu^{iv} + 64\ 214''\ \mu^{v} + 5\ 866''\ \mu^{vi}$
M_4	$-0,023\ 222$	$0,000\ 06\ \mu - 0,026\ 49\ \mu' - 0,030\ 24\ \mu'' + 0,001\ 51\ \mu''' + 0,060\ 93\ \mu^{iv} - 0,004\ 96\ \mu^{v} - 0,000\ 81\ \mu^{vi}$
M'_4	$0,009\ 871$	$0,004\ 07\ \mu + 0,009\ 42\ \mu' + 0,009\ 63\ \mu'' + 0,000\ 06\ \mu''' - 0,007\ 53\ \mu^{iv} + 0,002\ 95\ \mu^{v} + 0,000\ 36\ \mu^{vi}$
M''_4	$0,008\ 323$	$0,003\ 99\ \mu - 0,006\ 11\ \mu' + 0,009\ 08\ \mu'' - 0,000\ 19\ \mu''' - 0,009\ 42\ \mu^{iv} + 0,002\ 35\ \mu^{v} + 0,000\ 30\ \mu^{vi}$
M'''_4	$0,001\ 816$	$0,000\ 93\ \mu - 0,001\ 00\ \mu' + 0,003\ 14\ \mu'' - 0,000\ 01\ \mu''' - 0,003\ 58\ \mu^{iv} + 0,000\ 45\ \mu^{v} + 0,000\ 07\ \mu^{vi}$
M^{iv}_4	$-0,000\ 011$	$-0,000\ 00\ \mu + 0,000\ 01\ \mu' - 0,000\ 02\ \mu'' - 0,000\ 00\ \mu''' + 0,000\ 01\ \mu^{iv} + 0,000\ 00\ \mu^{v} - 0,000\ 00\ \mu^{vi}$
M^{v}_4	$-0,000\ 017$	$-0,000\ 01\ \mu + 0,000\ 01\ \mu' - 0,000\ 03\ \mu'' - 0,000\ 00\ \mu''' + 0,000\ 02\ \mu^{iv} + 0,000\ 00\ \mu^{v} - 0,000\ 00\ \mu^{vi}$
M^{vi}_4	$0,000\ 007$	$0,000\ 00\ \mu - 0,000\ 01\ \mu' + 0,000\ 01\ \mu'' - 0,000\ 00\ \mu''' - 0,000\ 01\ \mu^{iv} + 0,000\ 01\ \mu^{v} + 0,000\ 00\ \mu^{vi}$
		Sixième Système.
λ_5	$-17'',468\ 10$	$-0'',069\ 8\ \mu - 1'',243\ 5\ \mu' - 2'',449\ 7\ \mu'' - 0'',080\ 8\ \mu''' - 13'',201\ 1\ \mu^{iv} - 0'',570\ 8\ \mu^{v} - 0'',013\ 4\ \mu^{vi}$
γ_5	$-63^{\circ}\ 11'36''$	$27\ 985''\ \mu - 371\ 353''\ \mu' - 285\ 642''\ \mu'' + 24\ 886''\ \mu''' - 683\ 539''\ \mu^{iv} - 25\ 585''\ \mu^{v} - 744''\ \mu^{vi}$
M_5	$0,001\ 306$	$-0,000\ 35\ \mu - 0,006\ 15\ \mu' - 0,004\ 95\ \mu'' + 0,000\ 67\ \mu''' + 0,010\ 27\ \mu^{iv} + 0,000\ 51\ \mu^{v} + 0,000\ 00\ \mu^{vi}$
M'_5	$-0,007\ 471$	$0,002\ 13\ \mu + 0,044\ 44\ \mu' + 0,028\ 38\ \mu'' - 0,003\ 75\ \mu''' - 0,067\ 88\ \mu^{iv} + 0,003\ 28\ \mu^{v} + 0,000\ 04\ \mu^{vi}$
M''_5	$0,005\ 356$	$-0,002\ 17\ \mu + 0,034\ 06\ \mu' + 0,032\ 60\ \mu'' + 0,002\ 30\ \mu''' + 0,063\ 53\ \mu^{iv} + 0,002\ 96\ \mu^{v} + 0,000\ 04\ \mu^{vi}$
M'''_5	$0,048\ 471$	$-0,003\ 94\ \mu - 0,054\ 96\ \mu' - 0,043\ 24\ \mu'' - 0,011\ 49\ \mu''' + 0,106\ 02\ \mu^{iv} + 0,007\ 66\ \mu^{v} + 0,000\ 05\ \mu^{vi}$
M^{iv}_5	$-0,000\ 002$	$0,000\ 00\ \mu + 0,000\ 01\ \mu' + 0,000\ 01\ \mu'' + 0,000\ 00\ \mu''' - 0,000\ 01\ \mu^{iv} + 0,000\ 00\ \mu^{v} - 0,000\ 00\ \mu^{vi}$
M^{v}_5	$-0,000\ 020$	$0,000\ 00\ \mu + 0,000\ 04\ \mu' + 0,000\ 03\ \mu'' - 0,000\ 01\ \mu''' - 0,000\ 02\ \mu^{iv} + 0,000\ 01\ \mu^{v} + 0,000\ 00\ \mu^{vi}$
M^{vi}_5	$0,000\ 002$	$-0,000\ 00\ \mu - 0,000\ 00\ \mu' - 0,000\ 00\ \mu'' + 0,000\ 00\ \mu''' - 0,000\ 01\ \mu^{iv} + 0,000\ 00\ \mu^{v} + 0,000\ 00\ \mu^{vi}$
		Septième Système.
λ_6	$-18'',567\ 87$	$0'',235\ 1\ \mu - 5'',035\ 4\ \mu' - 5'',478\ 9\ \mu'' - 0'',338\ 5\ \mu''' - 7'',157\ 5\ \mu^{iv} - 0'',324\ 7\ \mu^{v} - 0'',007\ 6\ \mu^{vi}$
γ_6	$73^{\circ}\ 13'49''$	$1\ 670''\ \mu - 174\ 038''\ \mu' + 122\ 634''\ \mu'' - 21\ 817''\ \mu''' - 256\ 131''\ \mu^{iv} - 10\ 133''\ \mu^{v} - 260''\ \mu^{vi}$
M_6	$-0,003\ 859$	$-0,000\ 28\ \mu - 0,007\ 85\ \mu' - 0,006\ 19\ \mu'' + 0,000\ 49\ \mu''' - 0,013\ 29\ \mu^{iv} + 0,000\ 55\ \mu^{v} + 0,000\ 01\ \mu^{vi}$
M'_6	$0,024\ 440$	$0,001\ 87\ \mu - 0,027\ 87\ \mu' - 0,046\ 73\ \mu'' - 0,002\ 34\ \mu''' - 0,071\ 17\ \mu^{iv} - 0,002\ 88\ \mu^{v} - 0,000\ 07\ \mu^{vi}$
M''_6	$-0,024\ 320$	$-0,000\ 71\ \mu - 0,043\ 36\ \mu' - 0,015\ 22\ \mu'' + 0,001\ 15\ \mu''' - 0,055\ 84\ \mu^{iv} - 0,002\ 24\ \mu^{v} + 0,000\ 05\ \mu^{vi}$
M'''_6	$0,033\ 763$	$-0,007\ 00\ \mu - 0,102\ 85\ \mu' - 0,075\ 77\ \mu'' - 0,012\ 41\ \mu''' + 0,190\ 11\ \mu^{iv} - 0,007\ 75\ \mu^{v} + 0,000\ 16\ \mu^{vi}$
M^{iv}_6	$0,000\ 000$	$0,000\ 00\ \mu \quad 0,000\ 00\ \mu' \quad 0,000\ 00\ \mu'' \quad 0,000\ 00\ \mu''' \quad 0,000\ 00\ \mu^{iv} \quad 0,000\ 00\ \mu^{v} \quad 0,000\ 00\ \mu^{vi}$
M^{v}_6	$0,000\ 002$	$0,000\ 00\ \mu - 0,000\ 06\ \mu' - 0,000\ 05\ \mu'' - 0,000\ 01\ \mu''' - 0,000\ 10\ \mu^{iv} - 0,000\ 01\ \mu^{v} - 0,000\ 00\ \mu^{vi}$
M^{vi}_6	$-0,000\ 000$	$0,000\ 00\ \mu \quad 0,000\ 00\ \mu' \quad 0,000\ 00\ \mu'' \quad 0,000\ 00\ \mu''' \quad 0,000\ 00\ \mu^{iv} \quad 0,000\ 00\ \mu^{v} \quad 0,000\ 00\ \mu^{vi}$

18. On peut s'assurer que les nombres inscrits dans les tableaux qui précèdent satisfont parfaitement aux conditions que nous avons indiquées en traitant des excentricités. En les rapprochant convenablement, on formera pour chaque planète les valeurs suivantes de $p, q, p', q', \ldots$ dans lesquelles nous avons posé, pour abréger,

$$\begin{aligned}
K &= 103^\circ\ 8'\ 18''.\\
K_1 &= 126^\circ\ 22'\ 54'' - 2'',502\ 23\,t,\\
K_2 &= 126.\ 5.44 - 25\ ,887\ 31\,t.\\
K_3 &= 22.40.25 - 4\ ,795\ 35\,t,\\
K_4 &= -87.51.44 - 7\ ,067\ 95\,t.\\
K_5 &= -63.11.36 - 17\ ,468\ 10\,t.\\
\text{et } K_6 &= 73.13.49 - 18,567\ 87\,t;
\end{aligned}$$

$$\begin{cases}
p = 0{,}027\ 413 \sin K + 0{,}003\ 890 \sin K_1 + 0{,}000\ 268 \sin K_2 + 0{,}103\ 470 \sin K_3 \\
\qquad - 0{,}023\ 222 \sin K_4 + 0{,}001\ 306 \sin K_5 - 0{,}003\ 859 \sin K_6. \\
q = 0{,}027\ 413 \cos K + 0{,}003\ 890 \cos K_1 + 0{,}000\ 268 \cos K_2 + 0{,}103\ 470 \cos K_3 \\
\qquad - 0{,}023\ 222 \cos K_4 + 0{,}001\ 306 \cos K_5 - 0{,}003\ 859 \cos K_6.
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
p' = 0{,}027\ 413 \sin K + 0{,}002\ 527 \sin K_1 + 0{,}000\ 252 \sin K_2 + 0{,}020\ 920 \sin K_3 \\
\qquad + 0{,}009\ 871 \sin K_4 - 0{,}007\ 471 \sin K_5 + 0{,}024\ 440 \sin K_6. \\
q' = 0{,}027\ 413 \cos K + 0{,}002\ 527 \cos K_1 + 0{,}000\ 252 \cos K_2 + 0{,}020\ 920 \cos K_3 \\
\qquad + 0{,}009\ 871 \cos K_4 - 0{,}007\ 471 \cos K_5 + 0{,}024\ 440 \cos K_6.
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
p'' = 0{,}027\ 413 \sin K + 0{,}002\ 287 \sin K_1 + 0{,}002\ 737 \sin K_2 + 0{,}014\ 621 \sin K_3 \\
\qquad + 0{,}008\ 323 \sin K_4 + 0{,}005\ 356 \sin K_5 - 0{,}024\ 320 \sin K_6. \\
q'' = 0{,}027\ 413 \cos K + 0{,}002\ 287 \cos K_1 + 0{,}002\ 737 \cos K_2 + 0{,}014\ 621 \cos K_3 \\
\qquad + 0{,}008\ 323 \cos K_4 + 0{,}005\ 356 \cos K_5 - 0{,}024\ 320 \cos K_6.
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
p''' = 0{,}027\ 413 \sin K + 0{,}001\ 724 \sin K_1 + 0{,}009\ 345 \sin K_2 + 0{,}002\ 954 \sin K_3 \\
\qquad + 0{,}001\ 816 \sin K_4 + 0{,}048\ 471 \sin K_5 + 0{,}033\ 763 \sin K_6, \\
q''' = 0{,}027\ 413 \cos K + 0{,}001\ 724 \cos K_1 + 0{,}009\ 345 \cos K_2 + 0{,}002\ 954 \cos K_3 \\
\qquad + 0{,}001\ 816 \cos K_4 + 0{,}048\ 471 \cos K_5 + 0{,}033\ 763 \cos K_6.
\end{cases}$$

$$\begin{cases} p^{\text{iv}} = 0{,}027\,413 \sin K + 0{,}001\,373 \sin K_1 - 0{,}006\,316 \sin K_2 - 0{,}000\,040 \sin K_3 \\ \qquad - 0{,}000\,011 \sin K_4 - 0{,}000\,002 \sin K_5 + 0{,}000\,000 \sin K_6 . \\ q^{\text{iv}} = 0{,}027\,413 \cos K + 0{,}001\,373 \cos K_1 - 0{,}006\,316 \cos K_2 - 0{,}000\,040 \cos K_3 \\ \qquad - 0{,}000\,011 \cos K_4 - 0{,}000\,002 \cos K_5 + 0{,}000\,000 \cos K_6 ; \end{cases}$$

$$\begin{cases} p^{\text{v}} = 0{,}027\,413 \sin K + 0{,}001\,159 \sin K_1 + 0{,}015\,774 \sin K_2 - 0{,}000\,050 \sin K_3 \\ \qquad - 0{,}000\,017 \sin K_4 - 0{,}000\,020 \sin K_5 + 0{,}000\,002 \sin K_6 , \\ q^{\text{v}} = 0{,}027\,413 \cos K + 0{,}001\,159 \cos K_1 + 0{,}015\,774 \cos K_2 - 0{,}000\,050 \cos K_3 \\ \qquad - 0{,}000\,017 \cos K_4 - 0{,}000\,020 \cos K_5 + 0{,}000\,002 \cos K_6 ; \end{cases}$$

$$\begin{cases} p^{\text{vi}} = 0{,}027\,413 \sin K - 0{,}016\,429 \sin K_1 - 0{,}000\,681 \sin K_2 + 0{,}000\,042 \sin K_3 \\ \qquad + 0{,}000\,007 \sin K_4 + 0{,}000\,002 \sin K_5 - 0{,}000\,000 \sin K_6 , \\ q^{\text{vi}} = 0{,}027\,413 \cos K - 0{,}016\,429 \cos K_1 - 0{,}000\,681 \cos K_2 + 0{,}000\,042 \cos K_3 \\ \qquad + 0{,}000\,007 \cos K_4 + 0{,}000\,002 \cos K_5 - 0{,}000\,000 \cos K_6 . \end{cases}$$

En supposant le temps nul dans ces formules, elles redonnent les inclinaisons et les longitudes des nœuds, à l'origine du temps, avec une parfaite exactitude.

19. Les mêmes considérations qui fournissent (§ **13**) des limites supérieures des excentricités, donnent ici des limites supérieures des tangentes des inclinaisons sur l'écliptique de 1800. Voici les angles correspondants à ces limites, ainsi que les variations qu'ils subiraient par l'effet de petits changements apportés aux masses des planètes.

	LIMITES des inclinaisons sur l'écliptique de 1800	VARIATIONS QUE PRODUIRAIENT DANS CES LIMITES LES VARIATIONS DES MASSES						
Mercure..	9°16′54″	$-3\,368''\mu$	$-4\,713''\mu'$	$+3\,466''\mu''$	$+311''\mu'''$	$-480''\mu^{\text{iv}}$	$+3\,839''\mu^{\text{v}}$	$+945''\mu^{\text{vi}}$
Venus....	5.18.30	$2\,473''\mu$	$-2\,032''\mu'$	$+3\,840''\mu''$	$+192''\mu'''$	$-6\,802''\mu^{\text{iv}}$	$+1\,939''\mu^{\text{v}}$	$+391''\mu^{\text{vi}}$
La Terre.	4.51.42	$1\,640''\mu$	$+4\,257''\mu'$	$-2\,276''\mu''$	$+53''\mu'''$	$-5\,641''\mu^{\text{iv}}$	$+1\,673''\mu^{\text{v}}$	$+296''\mu^{\text{vi}}$
Mars....	7. 9.10	$-1\,804''\mu$	$-31\,418''\mu'$	$-23\,021''\mu''$	$-4\,863''\mu'''$	$+57\,051''\mu^{\text{iv}}$	$-3\,982''\mu^{\text{v}}$	$+73''\mu^{\text{vi}}$
Jupiter..	2. 0.48	$1''\mu$	$+5''\mu'$	$-4''\mu''$	$+0''\mu'''$	$-1\,815''\mu^{\text{iv}}$	$+1\,785''\mu^{\text{v}}$	$+28''\mu^{\text{vi}}$
Saturne..	2.32.39	$1''\mu$	$+4''\mu'$	$-6''\mu''$	$+0''\mu'''$	$+53''\mu^{\text{iv}}$	$-76''\mu^{\text{v}}$	$+25''\mu^{\text{vi}}$
Uranus ..	2.33. 8	$3''\mu$	$+18''\mu'$	$-6''\mu''$	$+5''\mu'''$	$-1\,321''\mu^{\text{iv}}$	$+1\,749''\mu^{\text{v}}$	$-459''\mu^{\text{vi}}$

Nous ferons remarquer que les limites des inclinaisons de Jupiter, Saturne et Uranus sont déterminées avec une très grande exactitude, et qu'elles ne varieraient que très peu par de faibles changements dans les masses. Ce résultat s'accorde avec celui que nous avons obtenu directement, page 103 de ce volume.

20. Pour avoir les limites les plus étroites des inclinaisons *relatives* Φ des orbites, il faut remarquer qu'à cause de la petitesse des inclinaisons on peut calculer Φ à une époque quelconque au moyen de la formule

$$\operatorname{tang} \Phi = \sqrt{(p' - p)^2 + (q' - q)^2}.$$

La comparaison de cette expression avec celle de tang φ (§ **16**) montre que pour obtenir toutes les circonstances des mouvements des inclinaisons des orbites rapportées à l'une d'elles, il suffit de substituer aux expressions $p, q, p', q', \ldots\ldots$ du § **18**, leurs différences avec les valeurs qu'affectent ces quantités pour l'orbite prise pour terme de comparaison. Les limites des inclinaisons relatives s'obtiennent ainsi comme les limites des inclinaisons absolues.

On trouvera ces limites réunies dans le tableau suivant que nous avons disposé à l'imitation de la table de Pythagore :

	URANUS	SATURNE	JUPITER	MARS	LA TERRE	VENUS
Mercure	8°42′13″	8°32′21″	8° 1′30″	12°29′38″	8°28′24″	8°45′37″
Venus	4.43. 7	4.33.12	4. 1.52	5.46.40	4. 7.38	
La Terre	4.16.20	3.49.33	3.35. 3	7.12.44		
Mars	6.34. 3	5.22.29	5.53. 4			
Jupiter	1.20.55	1.16.47				
Saturne	1.57.28					

Les limites des inclinaisons relatives des orbites de Jupiter, Saturne et Uranus sont les mêmes que celles que nous avons obtenues directement page 102 de ce volume.

Il était nécessaire de former ces limites des inclinaisons relatives, parce qu'elles sont souvent bien plus petites que celles qu'on obtiendrait en prenant les sommes des limites des inclinaisons de deux des orbites sur le plan fixe de l'écliptique de 1800. Par exemple, la somme de ces inclinaisons, pour Vénus et la Terre, est de $10^\circ\ 10'\ 12''$, tandis que les plans de leurs orbites ne peuvent jamais faire entre eux un angle de plus de $4^\circ\ 7'\ 38''$.

NOTE

SUR UN THÉORÈME DE MÉCANIQUE;

PAR M. CH. DELAUNAY.

On sait que le mouvement d'un corps solide peut toujours être considéré comme se composant du mouvement de translation d'un quelconque de ses points, et d'un mouvement de rotation autour d'une droite passant par ce point. On peut de même regarder le mouvement d'un système quelconque de corps comme se composant du mouvement de translation d'un de ses points, d'un mouvement de rotation autour d'une droite passant par ce point, et de mouvements relatifs qui changent les positions respectives des corps du système. Pour se rendre bien compte de cette décomposition de mouvement, on peut concevoir qu'à chaque instant, regardant le système comme solide, on détermine les axes principaux qui se croisent en un point de ce système, et l'on voit qu'ainsi, quel que soit le mouvement, il pourra toujours être remplacé par le mouvement de ces axes principaux et les mouvements des diverses parties du système relativement à ces axes; d'ailleurs le mouvement des axes principaux, comme celui d'un corps solide, se composera du mouvement de translation du point où ils se croisent, et d'un mouvement de rotation autour d'une droite passant par ce point.

Lorsque le système, d'abord en repos, est mis en mouvement par des impulsions, la droite autour de laquelle commencent à tourner les axes principaux passant par un point quelconque, prend le nom d'*axe spontané de rotation*, relativement à ce point; il est évident que pour un même mouvement il y a autant d'axes spontanés de rotation qu'il y a de points dans le système.

Lagrange démontre (*Mécanique analytique*, tome I, page 293) que, dans un système libre, en faisant abstraction du mouvement de translation, tout axe spontané de rotation est tel que la somme des forces

vives du système est un maximum ou un minimum, théorème qui avait d'abord été donné par Euler, dans le cas d'un corps solide. Lagrange fait voir en effet que la condition commune au maximum et au minimum est satisfaite; mais il ne s'occupe pas de savoir lequel du maximum ou du minimum a réellement lieu, ou bien s'il y a tantôt maximum, tantôt minimum. L'objet de cette Note est de faire voir qu'il y a toujours maximum.

Je considère d'abord le cas d'un corps solide, et je prends pour origine un point quelconque du corps et pour axes coordonnés les axes principaux qui passent par ce point lorsque le corps est en repos. Comme Lagrange, je ferai abstraction du mouvement du point qui est à l'origine, ou, ce qui revient au même, je considérerai ce point comme fixe; dès lors le corps ne pourra plus prendre qu'un mouvement de rotation autour de ce point.

Soient X, Y, Z les composantes parallèles aux axes de l'une des forces instantanées appliquée au point dont les coordonnées sont x, y, z et u, v, w, les composantes aussi parallèles aux axes de la vitesse de ce point résultant de l'action des forces instantanées sur le corps; on a, par le principe de D'Alembert, combiné avec le principe des vitesses virtuelles,

$$\sum m(u\delta x + v\delta y + w\delta z) = \sum m(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z). \qquad (1)$$

Puisque le corps ne peut que tourner autour de l'origine, tous les déplacements virtuels δx, δy, δz, s'exprimeront au moyen de trois rotations arbitraires $\delta\psi$, $\delta\omega$, $\delta\varphi$ autour des axes des x, des y et des z, et l'on aura

$$\delta x = z\delta\omega - y\delta\varphi, \quad \delta y = x\delta\varphi - z\delta\psi, \quad \delta z = y\delta\psi - x\delta\omega.$$

Substituant dans l'équation (1) et égalant séparément à zéro les coefficients de $\delta\psi$, $\delta\omega$, $\delta\varphi$, nous aurons les trois équations suivantes :

$$\sum m(wy - vz) = \sum m(Zy - Yz),$$

$$\sum m(uz - wx) = \sum m(Xz - Zx),$$

$$\sum m(vx - uy) = \sum m(Yx - Xy);$$

mais on a

$$u = \frac{dx}{dt}, \qquad v = \frac{dy}{dt}, \qquad w = \frac{dz}{dt};$$

et si $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$ représentent les angles dont le corps tourne autour des trois axes pendant le premier instant de son mouvement, on aura

$$u = z\frac{d\omega}{dt} - y\frac{d\varphi}{dt},$$

$$v = x\frac{d\varphi}{dt} - z\frac{d\psi}{dt},$$

$$w = y\frac{d\psi}{dt} - x\frac{d\omega}{dt}.$$

Mettant ces valeurs dans les équations précédentes et remarquant que l'on a

$$\sum mxy = 0, \quad \sum mxz = 0, \quad \sum myz = 0,$$

on trouvera

$$\frac{d\psi}{dt}\sum m(y^2 + z^2) = \sum m(Zy - Yz),$$

$$\frac{d\omega}{dt}\sum m(x^2 + z^2) = \sum m(Xz - Zx),$$

$$\frac{d\varphi}{dt}\sum m(x^2 + y^2) = \sum m(Yx - Xy);$$

ou bien, posant

$$A = \sum m(y^2 + z^2), \qquad B = \sum m(x^2 + z^2), \qquad C = \sum m(x^2 + y^2),$$

$$P = \sum m(Zy - Yz), \qquad Q = \sum m(Xz - Zx), \qquad R = \sum m(Yx - Xy),$$

on aura enfin

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{P}{A}, \qquad \frac{d\omega}{dt} = \frac{Q}{B}, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{R}{C}.$$

On a donc ainsi les composantes de la vitesse de rotation, et on en dé-

duit facilement que les équations de l'axe spontané de rotation sont

$$y = \frac{d\omega}{d\psi}x, \qquad z = \frac{d\phi}{d\psi}x;$$

ou bien, en remplaçant $d\psi$, $d\omega$ et $d\phi$ par leurs valeurs,

$$y = \frac{AQ}{BP}x, \qquad z = \frac{AR}{CP}x.$$

Supposons maintenant que le corps, au lieu de pouvoir tourner librement autour de l'origine, soit assujéti à tourner autour d'une droite représentée par les équations

$$y = ax, \qquad z = bx;$$

dans ce cas on pourra bien toujours exprimer les déplacements virtuels δx, δy, δz, au moyen des rotations $\delta\psi$, $\delta\omega$, $\delta\phi$ autour des trois axes; mais de ces trois rotations, une seule devra être considérée comme arbitraire, et les deux autres seront déterminées par les relations

$$\delta\omega = a\delta\psi, \qquad \delta\phi = b\delta\psi;$$

on aura donc

$$\delta x = (az - by)\delta\psi, \qquad \delta y = (bx - z)\delta\psi, \qquad \delta z = (y - ax)\delta\psi;$$

et si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (1), elle deviendra

$$\sum m(wy - vz) + a\sum m(uz - wx) + b\sum m(vx - uy) = P + aQ + bR.$$

D'ailleurs $d\psi$ étant l'angle décrit par le corps autour de l'axe des x pendant le premier instant de son mouvement, on verra, comme précédemment, que l'on a

$$u = (az - by)\frac{d\psi}{dt}, \quad v = (bx - z)\frac{d\psi}{dt}, \quad w = (y - ax)\frac{d\psi}{dt};$$

substituant dans l'équation précédente, il viendra

$$(A + a^2B + b^2C)\frac{d\psi}{dt} = P + aQ + bR;$$

d'où l'on tire

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{P + aQ + bR}{A + a^2B + b^2C}.$$

Mais on peut aussi remplacer dans l'équation (1) δx par $u\delta t$, δy par $v\delta t$, δz par $w dt$, et elle deviendra

$$\sum m(u^2 + v^2 + w^2) = \sum m(Xu + Yv + Zw),$$

ou bien en remplaçant dans le second membre u, v, w par leurs valeurs données précédemment,

$$\sum m(u^2 + v^2 + w^2) = (P + aQ + bR)\frac{d\psi}{dt}.$$

Donc enfin, représentant par K la somme des forces vives qui forme le premier membre de cette équation, et mettant pour $\frac{d\psi}{dt}$ sa valeur, on aura

$$K = \frac{(P + aQ + bR)^2}{A + a^2B + b^2C}.$$

La valeur de K étant ainsi exprimée en fonction de a et de b, la question est ramenée à faire voir que K sera un maximum lorsqu'on donnera à a et b les valeurs qui correspondent à l'axe spontané de rotation, c'est-à-dire lorsque l'on supposera

$$a = \frac{AQ}{BP}, \qquad b = \frac{AR}{CP};$$

pour cela il suffira d'appliquer la méthode ordinaire des *maxima* et *minima*.

On trouvera d'abord

$$\frac{dK}{da} = \frac{2(P + aQ + bR)(AQ - aBP + b^2CQ - abBR)}{(A + a^2B + b^2C)^2},$$

$$\frac{dK}{db} = \frac{2(P + aQ + bR)(AR - bCP + a^2BR - abCQ)}{(A + a^2B + b^2C)^2}.$$

Ces valeurs sont annulées lorsqu'on y remplace a par $\frac{AQ}{BP}$, et b par $\frac{AR}{CP}$;

c'est-à-dire que pour ces valeurs de a et b, K est un maximum ou un minimum. C'est ce que Lagrange a démontré plus simplement que je ne viens de le faire; mais les calculs précédents étaient nécessaires pour aller plus loin et distinguer si K est maximum ou s'il est minimum.

Si l'on calcule $\frac{d^2K}{da^2}$, $\frac{d^2K}{da\,db}$, $\frac{d^2K}{db^2}$, et qu'on y remplace a par $\frac{AQ}{BP}$, et b par $\frac{AR}{CP}$, on trouvera

$$\frac{d^2K}{da^2} = -\frac{2P^2 l}{A^2(BCP^2 + ACQ^2 + ABR^2)^2},$$

$$\frac{d^2K}{da\,db} = \frac{2P^2 m}{A^2(BCP^2 + ACQ^2 + ABR^2)^2},$$

$$\frac{d^2K}{db^2} = -\frac{2P^2 n}{A^2(BCP^2 + ACQ^2 + ABR^2)^2},$$

en faisant, pour abréger,

$$B^2(BC^2P^4 + BA^2R^4 + AC^2P^2Q^2 + CA^2R^2Q^2 + 2ABCP^2R^2) = l,$$

$$ABCQR(BCP^2 + ACQ^2 + ABR^2) = m,$$

$$C^2(CB^2P^4 + CA^2Q^4 + AB^2P^2R^2 + BA^2Q^2R^2 + 2ABCP^2Q^2) = n.$$

La valeur de $\frac{d^2K}{da^2}$ étant évidemment négative, ainsi que celle de $\frac{d^2K}{db^2}$, il ne reste plus, pour démontrer que K est toujours un maximum, qu'à faire voir que l'équation du second degré

$$l\theta^2 - 2m\theta + n = 0$$

n'a pas de racines réelles; en effet, les valeurs de l, m, n donnent

$$m^2 - ln = -B^2C^2P^2(BCP^2 + ACQ^2 + ABR^2)^3,$$

quantité essentiellement négative. Donc, dans le cas d'un corps solide, l'axe spontané de rotation est toujours tel, que la somme des forces vives du corps est un maximum.

Passons maintenant au cas d'un système quelconque de corps, et prenons toujours pour origine un des points du système, et pour axes coordonnés les axes principaux qui se croisent en ce point avant que le

mouvement ait lieu; représentons encore par X, Y, Z, les trois composantes parallèles aux axes de l'une des forces instantanées appliquée au point m dont les coordonnées sont x, y, z, et par u, v, w, les composantes de la vitesse de ce point due à l'action des forces instantanées, abstraction faite du mouvement de translation. L'équation (1) sera encore l'équation du mouvement que nous considérons.

La vitesse du point m étant due au mouvement de rotation des axes principaux du système autour de l'axe spontané de rotation, et au mouvement de ce point relativement aux axes principaux, nous pouvons poser

$$u = u_1 + \alpha, \qquad v = v_1 + \beta, \qquad w = w_1 + \gamma,$$

u_1, v_1, w_1 étant les parties de u, v, w qui résultent du mouvement de rotation, et α, β, γ, les parties qui résultent du mouvement de m relativement aux axes principaux; u_1, v_1 et w_1 seront donnés par les relations

$$u_1 = z\frac{d\omega}{dt} - y\frac{d\phi}{dt}, \quad v_1 = x\frac{d\phi}{dt} - z\frac{d\psi}{dt}, \quad w_1 = y\frac{d\psi}{dt} - x\frac{d\omega}{dt}.$$

Cela posé, si nous remplaçons dans l'équation (1), δx, δy et δz, successivement par udt, vdt, wdt et par u_1dt, v_1dt, w_1dt, ce qui est toujours permis, il viendra

$$\sum m[(u_1+\alpha)^2+(v_1+\beta)^2+(w_1+\gamma)^2] = \sum m[X(u_1+\alpha)+Y(v_1+\beta)+Z(w_1+\gamma)];$$

et

$$\sum m[(u_1+\alpha)u_1+(v_1+\beta)v_1+(w_1+\gamma)w_1] = \sum m(Xu_1+Yv_1+Zw_1);$$

retranchant ces deux équations l'une de l'autre, on trouvera

$$\sum m(u_1\alpha+\alpha^2+v_1\beta+\beta^2+w_1\gamma+\gamma^2) = \sum m(X\alpha+Y\beta+Z\gamma),$$

d'où

$$\sum m(u_1\alpha+v_1\beta+w_1\gamma) = \sum m(X\alpha+Y\beta+Z\gamma) - \sum m(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2).$$

Appelant encore K la somme des forces vives du systeme, on aura

$$K = \sum m(u^2 + v^2 + w^2) = \sum m(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) + 2\sum m(u_1\alpha + v_1\beta + w_1\gamma) + \sum m(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2);$$

cette valeur, en vertu de l'équation qu'on vient de trouver, se changera en la suivante :

$$K = \sum m(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) + 2\sum m(X\alpha + Y\beta + Z\gamma) - \sum m(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2).$$

Le premier terme de cette expression représente la somme des forces vives du système correspondant au seul mouvement de rotation, et les autres termes ne dépendent que des mouvements relatifs des diverses parties du systeme; or nous verrions exactement, comme dans le cas d'un corps solide, que $\sum m(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2)$ est un maximum; donc nous pouvons encore dire que l'axe spontané de rotation est toujours tel que la somme des forces vives K du système soit un maximum.

Si l'on ne fait pas abstraction du mouvement de translation, on trouvera encore que la somme des forces vives est un maximum; en effet, puisqu'on ne néglige plus aucune partie du mouvement, cette somme des forces vives sera la même, quel que soit l'axe spontané qu'on considère; on peut donc regarder le mouvement de translation comme étant celui du centre de gravité, et la rotation comme s'effectuant autour de l'axe spontané correspondant à ce point. Si l'on conserve les mêmes notations que précédemment, qu'on représente de plus par a, b, c, les trois composantes de la vitesse du centre de gravité, et par U, V, W, les composantes de la vitesse totale du point m, on aura

$$U = a + u_1 + \alpha, \quad V = b + v_1 + \beta, \quad W = c + w_1 + \gamma;$$

la somme des forces vives K du système sera donc

$$K = \sum m(U^2 + V^2 + W^2)$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2)\sum m + \sum m[(u_1 + \alpha)^2 + (v_1 + \beta)^2 + (w_1 + \gamma)^2] + 2\sum m[a(u_1 + \alpha) + b(v_1 + \beta) + c(w_1 + \gamma)].$$

Mais d'après les valeurs de u_1, v_1, w_1 données précédemment, et parce

que, avant le mouvement, le centre de gravité est à l'origine, on a les relations suivantes :

$$\sum mau_1 = 0, \quad \sum mbv_1 = 0, \quad \sum mcw_1 = 0;$$

de plus, si x', y', z' sont les coordonnées du point m rapportées aux axes principaux mobiles qui passent par le centre de gravité, on aura au commencement du mouvement,

$$\alpha = \frac{dx'}{dt}, \quad \beta = \frac{dy'}{dt}, \quad \gamma = \frac{dz'}{dt};$$

d'où l'on conclut

$$\sum ma\alpha = 0, \quad \sum mb\beta = 0, \quad \sum mc\gamma = 0;$$

la valeur de K se réduit donc à

$$K = (a^2 + b^2 + c^2) \sum m + \sum m[(u_1 + \alpha)^2 + (v_1 + \beta)^2 + (w_1 + \gamma)^2];$$

mais le second terme est la somme des forces vives du système, abstraction faite du mouvement de translation, et nous avons vu que cette somme est un maximum; donc K est aussi un maximum.

PROBLÈME DE COMBINAISONS;

PAR E. CATALAN.

Ayant pris au hasard, dans l'espace, n points a, b, c, . . . ; on demande quel sera le nombre N *des points nouveaux* A, B, C, . . . *qui résultent des intersections trois à trois des plans passant chacun par trois des points a, b, c, . . .?*

Désignons généralement par $C_{m,n}$ le nombre des combinaisons n à n de m lettres.

Le nombre p des plans sera $C_{n,3}$.

Si ces plans étaient pris arbitrairement, ils se couperaient trois à trois, en un nombre de points égal à $C_{p,3}$.

Mais par chacun des n points donnés $a, b, c, \ldots$ il passe évidemment $C_{n-1,2}$ plans; désignons ce nombre par q.

Ces plans donneraient lieu, s'ils étaient quelconques, à $C_{q,3}$ points de rencontre, lesquels se réduisent ici, à un seul point.

Donc, le nombre N sera donné par la formule

$$N = C_{p,3} - n\,C_{q,3}.$$

En effectuant les calculs, on trouve

$$N = \tfrac{5}{9}(n^3 - 19n + 6)\,C_{n+1,6}.$$

ou

$$N = 20\,[14\,C_{n+3,9} + C_{n+1,6}].$$

Si l'on considérait n points $a, b, c, \ldots$ tous situés dans un plan donné, on pourrait demander de même quel est le nombre N des points nouveaux A, B, C, . . . qui résultent des intersections deux à deux des droites passant chacune par deux des points $a, b, c, \ldots$; et l'on trouverait, sans difficulté, $N = 3C_{n,4}$.

NOTE

SUR UNE CERTAINE SUITE DE FRACTIONS ORDINAIRES;

PAR M. V. STOUVENEL.

Le *Bulletin de la Société philomatique de Paris* (année 1816) contient l'observation suivante de M. Farey :

« Si l'on range par ordre de grandeur les fractions dont le dénomi-
» nateur n'excède pas un nombre donné, et qu'ensuite on ajoute le nu-
» mérateur et le dénominateur d'une de ces fractions, respectivement
» au numérateur et au dénominateur de la fraction qui la précède ou
» qui la suit de deux places, on aura la fraction intermédiaire, quoique
» non réduite peut-être à sa plus simple expression. »

Soit 7 le plus grand dénominateur donné; voici toutes les fractions possibles par ordre de grandeur :

$$\frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}.$$

Prenons, dans cette *suite*, les deux fractions $\frac{5}{7}$ et $\frac{4}{5}$; on trouve $\frac{5+4}{7+5} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$, fraction intermédiaire.

M. Cauchy ne tarda pas à prouver (*Bulletin philomatique*, 1816) que cette propriété n'est qu'un simple corollaire de ce théorème :

« Si dans la suite de fractions qui précède, on prend deux fractions
» consécutives, leurs dénominateurs seront premiers entre eux, et elles
» auront pour différence une nouvelle fraction dont le dénominateur
» sera l'unité. »

Ainsi, dans les trois fractions consécutives

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{a'}{b'}, \quad \frac{a''}{b''},$$

b' est premier avec b et b''; et l'on a

$$\frac{a'}{b'} - \frac{a}{b} = \frac{1}{bb'}, \qquad \frac{a''}{b''} - \frac{a'}{b'} = \frac{1}{b'b''};$$

d'où

$$a'b - ab' = 1, \qquad a''b' - a'b'' = 1,$$

et partant

$$\frac{a + a''}{b + b''} = \frac{a'}{b'},$$

expression analytique de la remarque de M. Farey.

Cette Note a pour objet de démontrer quelques autres propriétés qui appartiennent aux fractions dont il s'agit, et d'indiquer un moyen simple de les calculer par ordre de grandeur.

I.

J'appelle *complémentaires*, deux fractions irréductibles dont la somme est égale à l'unité.

De là suit que deux fractions complémentaires ont le même dénominateur, et que la somme de leurs numérateurs est égale à ce dénominateur commun. On peut donc, en faisant $b - a = c$, les écrire sous la forme

$$\frac{a}{b}, \qquad \frac{c}{b}.$$

Lemme. « Si l'on développe deux fractions complémentaires en *fractions continues*, les *réduites* de même rang par rapport aux extrêmes » seront complémentaires deux à deux. »

Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{b}$, la première $< \frac{1}{2}$, la seconde $> \frac{1}{2}$; on a généralement

$$\frac{a}{b} = \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{p' + \cfrac{1}{p'' + \cfrac{1}{p''' + \text{etc.}}}}}$$

Dans ce développement, p est toujours > 1, puisque $\frac{a}{b}$ est $< \frac{1}{2}$.

Pour $\frac{c}{b}$, on a d'abord

$$\frac{c}{b} = \frac{b-a}{b} = 1 - \frac{a}{b} = \frac{1}{1 - \frac{a}{b-a}};$$

d'ailleurs, si $\frac{a}{b} = \frac{1}{p - \frac{R}{a}}$, il est clair que $\frac{a}{b-a} = \frac{1}{(p-1) - \frac{R}{a}}$, R étant le même reste de part et d'autre; donc

$$(2) \qquad \frac{c}{b} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{p - 1 + \cfrac{1}{p' + \cfrac{1}{p'' + \cfrac{1}{p''' + \text{etc.}}}}}}$$

Cette fraction continue donne une réduite de plus que la fraction (1). Voici les deux séries de ces réduites :

$$(3) \qquad \frac{1}{p}, \quad \frac{p'}{pp'-1}, \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{a}{b},$$

$$(4) \qquad \frac{1}{1}, \quad \frac{p-1}{p}, \quad \frac{pp'+1-p'}{pp'+1}, \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{c}{b}.$$

Négligeant la première réduite $\frac{1}{1}$ du développement de $\frac{c}{b}$, on voit que les deux suivantes sont complémentaires deux à deux, et de plus également éloignées des extrêmes $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{b}$. Or cette loi s'appliquera à toutes les autres, si l'on prouve qu'étant vraie pour deux réduites consécutives, elle est aussi vraie pour la troisième.

Prenons dans la série (3) deux réduites quelconques $\frac{m}{n}$ et $\frac{m'}{n'}$, et supposons que les réduites correspondantes dans la série (4) soient

$$\frac{n-m}{n}, \qquad \frac{n'-m'}{n'}.$$

la réduite qui suit $\frac{m'}{n'}$ est

$$\frac{m'q+m}{n'q+n},$$

celle qui vient après $\frac{n'-m'}{n'}$ est

$$\frac{(n'-m')q+n-m}{n'q+n};$$

le quotient q a été pris le même de part et d'autre, supposition admissible, à partir du quotient p'.

Mais les deux réduites qui précèdent sont complémentaires; donc le lemme est démontré.

Scolie. Quand $\frac{m}{n}$ est $< \frac{a}{b}$, alors $\frac{n-m}{n}$ est $> \frac{b-a}{b} = \frac{c}{b}$, et réciproquement. Donc les réduites complémentaires, en y comprenant $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{b}$, sont, en allant de gauche à droite, l'une de rang pair, l'autre de rang impair; ce qui du reste est évident si l'on fait commencer par $\frac{0}{1}$ les deux séries de *convergentes* (3) et (4).

II.

Considérons maintenant la suite montante des fractions ordinaires (A); K étant le plus grand dénominateur donné, elle peut s'écrire en général

$$\frac{1}{K},\quad \frac{1}{K-1},\quad \frac{1}{K-2},\ldots\ldots\ \frac{K-1}{K}.$$

(B) *Théorème.* « Si, dans cette *suite*, deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{b}$ sont com-
» plémentaires, il en sera de même pour les deux fractions dont l'une
» $\frac{x}{y}$ précède immédiatement $\frac{a}{b}$, et dont l'autre $\frac{x'}{y'}$ suit immédiatement $\frac{c}{b}$. »

En vertu du théorème de M. Cauchy, les valeurs de $\frac{x}{y}$ et $\frac{x'}{y'}$ sont données par les équations

$$(5)\qquad ay - bx = +1,$$
$$(6)\qquad bx' - cy' = +1.$$

Appliquons la méthode des fractions continues à la résolution de ces deux indéterminées.

D'après le *lemme* qui vient d'être démontré, les deux réduites qui précèdent immédiatement $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{b}$ sont complémentaires, et peuvent s'écrire

$$\frac{l}{n}, \quad \frac{m}{n}, \quad \text{faisant } n - l = m;$$

on en déduit

$$(7) \qquad an - bl = \pm 1, \quad cn - bm = \mp 1;$$

les seconds membres sont de signes contraires, parce que, d'après le scolie précédent, $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{b}$ sont de rangs contraires.

Supposons $\frac{a}{b}$ de rang pair, il faut prendre

$$an - bl = +1.$$

Comparant avec l'équation (5), on voit que celle-ci est satisfaite au moyen des valeurs

$$x = l, \qquad y = n.$$

On obtient ainsi cette expression générale, qui comprend la valeur particulière de $\frac{x}{y}$,

$$(8) \qquad \frac{X}{Y} = \frac{l + az}{n + bz}.$$

$\frac{l}{n}$ étant $< \frac{a}{b}$, quand z nombre entier augmente positivement, $\frac{X}{Y}$ s'approche de $\frac{a}{b}$ par une série de valeurs croissantes. Au contraire, lorsque z croît négativement, $\frac{X}{Y}$ reçoit des valeurs décroissantes, toutes plus grandes que $\frac{a}{b}$. Donc on obtiendra $\frac{x}{y}$ immédiatement $< \frac{a}{b}$, en prenant parmi les z positifs celui qui donne pour $n + bz$ le plus grand nombre entier contenu dans K.

Puisqu'on a supposé $\frac{a}{b}$ de rang pair, $\frac{c}{b}$ est de rang impair, et par conséquent,

$$cn - bm = -1,$$

ou

$$bm - cn = +1.$$

Comparant avec l'équation (6), on voit que cette dernière est vérifiée par les valeurs

$$x' = m, \qquad y' = n:$$

d'où cette expression générale comprenant $\frac{x'}{y'}$:

$$(9) \qquad \frac{X'}{Y'} = \frac{m + cz}{n + bz}.$$

$\frac{m}{n}$ étant $> \frac{c}{b}$, lorsque z augmente positivement, $\frac{X'}{Y'}$ s'approche de $\frac{c}{b}$ par une série de valeurs décroissantes, tandis que z croissant négativement, fournit des fractions croissantes toutes plus petites que $\frac{c}{b}$. Donc, on obtiendra $\frac{x'}{y'}$ qui est immédiatement $> \frac{c}{b}$, en prenant parmi les z positifs celui qui donne pour $n + bz$ le plus grand nombre entier contenu dans K.

De là suit que les dénominateurs de $\frac{x}{y}$ et $\frac{x'}{y'}$ sont égaux, et déterminés par la même valeur de z. Dès lors la somme $x + x'$ des numérateurs est égale à ce dénominateur commun, et partant $\frac{x}{y}$ et $\frac{x'}{y'}$ sont des fractions complémentaires. Un raisonnement semblable prouverait que la même chose a lieu, si l'on supposait $\frac{a}{b}$ de rang impair.

Donc le théorème (B) est démontré.

La fraction $\frac{c}{b}$ fait partie de la *suite* montante (A) : cherchons les deux fractions adjacentes à $\frac{c}{b}$.

(C) *Théorème.* « Ces deux fractions sont complémentaires, et leur

» dénominateur commun est le plus grand nombre impair contenu » dans K. »

En effet, la plus petite $\frac{x}{y}$ de ces deux fractions est donnée par l'équation

$$y - 2x = 1,$$

à laquelle on satisfait en faisant

$$x = 0, \qquad y = 1;$$

d'où l'on tire cette expression générale qui comprend $\frac{x}{y}$:

$$\frac{z}{1 + 2z} = \frac{1}{2 + \frac{1}{z}}.$$

Quand z croissant est positif, le dénominateur $1 + 2z$ est impair, et la fraction s'approche de $\frac{1}{2}$ par une suite de valeurs croissantes. Donc $\frac{x}{y}$ immédiatement $< \frac{1}{2}$ a pour dénominateur le plus grand nombre impair contenu dans K, et déterminé par z positif.

La fraction $\frac{x'}{y'}$ immédiatement $> \frac{1}{2}$ est donnée par l'équation

$$2x' - y' = 1,$$

à laquelle on satisfait en faisant

$$x' = 0, \qquad y' = -1;$$

d'où l'on tire l'expression générale

$$\frac{z}{2z - 1} = \frac{1}{2 - \frac{1}{z}}.$$

Quand z positif est croissant, le dénominateur $2z - 1$ est impair, et la fraction s'approche de $\frac{1}{2}$ par une suite de valeurs décroissantes. Donc $\frac{x}{y}$

immédiatement $> \frac{1}{2}$ a pour dénominateur le plus grand nombre impair contenu dans K, et déterminé par z positif.

Ainsi, les deux fractions adjacentes à $\frac{1}{2}$ ont chacune pour dénominateur le plus grand nombre impair contenu dans K. On en conclut les égalités suivantes :

$$y = y', \qquad y - 2x = 2x' - y,$$
$$x + x' = y, \qquad x' - x = 1,$$

ce qui fait voir que $\frac{x}{y}$ et $\frac{x'}{y'}$ sont complémentaires, et, de plus, que la différence de leurs numérateurs est l'unité.

Corollaire 1. Dans la suite montante (A), les fractions de même rang à gauche et à droite de $\frac{1}{2}$ sont complémentaires; car celles du premier rang le sont, d'après le théorème (C). Donc, en vertu du théorème (B), toutes les autres de même rang le sont aussi, en y comprenant les extrêmes $\frac{1}{K}$ et $\frac{K-1}{K}$.

2e. La fraction $\frac{1}{2}$ est le terme du milieu de la suite (A).

3e. Si l'on prend deux fractions à égale distance de $\frac{1}{2}$, et qu'on ajoute respectivement les numérateurs et les dénominateurs de ces deux fractions, la fraction résultante sera $\frac{1}{2}$.

4e. Il n'est pas besoin de calculer directement toutes les fractions (A). Il suffit de calculer depuis $\frac{1}{K}$ jusqu'à $\frac{1}{2}$ ou depuis $\frac{1}{2}$ jusqu'à $\frac{K-1}{K}$, le reste se trouve par de simples soustractions.

III.

Il s'agit maintenant d'avoir un moyen facile de calculer les fractions (A) par ordre de grandeur ; car il serait pénible, pour obtenir chacune d'elles, de résoudre une équation indéterminée.

Prenons les trois fractions consécutives et croissantes

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{a'}{b'}, \quad \frac{x}{y}.$$

La remarque de M. Farey donne

$$a + x = a'z, \qquad b + y = b'z,$$

z est un facteur entier qu'il faut déterminer. On tire de là

$$\frac{x}{y} = \frac{a'z - a}{b'z - b}. \tag{10}$$

Plus z est grand, plus la fraction (10) s'approche de $\frac{a'}{b'}$ par une suite de valeurs décroissantes. Or, la valeur particulière de $\frac{x}{y}$ que nous cherchons est assujétie à cette double condition : 1° d'être immédiatement $> \frac{a'}{b'}$; 2° d'avoir pour dénominateur un nombre $<$ ou $=$ K. Donc on obtiendra cette valeur, en prenant z tel que le dénominateur $b'z - b$ soit le plus grand nombre entier contenu dans K.

Posons donc

$$b'z - b = \mathrm{K};$$

d'où

$$z = \frac{\mathrm{K} + b}{b'}.$$

Le facteur z qui est nécessairement entier, se trouve ainsi déterminé par la partie entière du quotient

$$\frac{\mathrm{K} + b}{b'}. \tag{11}$$

Appliquons ce qui précède à la suite $\frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4} \ldots\ldots$ où $\mathrm{K} = 7$; et cherchons la fraction qui doit suivre $\frac{3}{5}$ et $\frac{2}{3}$. On détermine d'abord z par la formule (11), qui donne

$$\frac{7 + 5}{3} = 4.$$

Ensuite on calcule la fraction cherchée au moyen de la formule (10) qui donne

$$\frac{2.4-3}{3.4-5}=\frac{5}{7}.$$

Scolie. On peut abréger au moyen de l'observation suivante.

Supposons H impair; les premiers termes de la série en question sont de la forme

$$\frac{1}{K},\ \frac{1}{K-1},\ \frac{1}{K-2},\ \frac{1}{K-3},\ldots\ldots$$

jusqu'au terme $\frac{2}{K}$ qui vient rompre ce système.

Cherchons la place de $\frac{2}{K}$. Pour cela considérons les fractions

$$\frac{1}{\frac{1}{2}(K+1)},\qquad \frac{1}{\frac{1}{2}(K-1)},$$

$K+1$ et $K-1$ sont des nombres pairs, et les dénominateurs $\frac{1}{2}(K+1)$, $\frac{1}{2}(K-1)$, ne diffèrent que d'une unité.

Les deux fractions qui précèdent peuvent s'écrire

$$\frac{2}{K+1},\qquad \frac{2}{K-1}.$$

La fraction $\frac{2}{K}$ est comprise entre ces dernières, elle vient donc après

$$\frac{2}{K-1}=\frac{1}{\frac{1}{2}(K-1)}.$$

Ainsi, pour former la *suite* montante de M. Farey, écrivez d'abord

$$\frac{1}{K},\quad \frac{1}{K-1},\quad \frac{1}{K-2},\quad \frac{1}{K-3},\ldots\ldots$$

jusqu'à ce que vous arriviez au dénominateur

$$\tfrac{1}{2}(K+1).$$

La fraction suivante est $\frac{2}{K}$; puis servez-vous des formules (10) et (11).

Si K était pair, il faudrait s'arrêter à $\frac{1}{\frac{1}{2}K}$. La fraction suivante est $\frac{2}{K-1}$.

Exemple. Soit $K = 17$, la suite se développe ainsi

$$\frac{1}{17}, \frac{1}{16}, \frac{1}{15}, \frac{1}{14}, \frac{1}{13}, \frac{1}{12}, \frac{1}{11}, \frac{1}{10}, \frac{1}{9}, \frac{2}{17} \ldots\ldots;$$

$\frac{2}{17}$ vient apres $\frac{1}{9}$, où $9 = \frac{1}{2}(17+1)$.

Soit encore $K = 14$, on obtient

$$\frac{1}{14}, \frac{1}{13}, \frac{1}{12}, \frac{1}{11}, \frac{1}{10}, \frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{2}{13} \ldots\ldots;$$

$\frac{2}{13}$, c'est-à-dire $\frac{2}{K-1}$, vient après $\frac{1}{7}$, où $7 = \frac{1}{2}.14$.

IV.

Les fractions (A) ont plusieurs analogies avec les réduites, et les convergentes intermédiaires qu'on peut insérer entre les réduites. Voici deux analogies fort simples.

Prenons trois réduites consécutives

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{c}{d}, \quad \frac{h}{g};$$

on sait que $ad - bc = \pm 1$ et $cg - dh = \mp 1$;

d'ou
$$ad - bc = dh - cg,$$

et
$$\frac{c}{d} = \frac{h-a}{g-b}.$$

Ainsi, la différence des numérateurs des réduites extremes divisée par celle de leurs dénominateurs donne la réduite intermédiaire.

En second lieu, les convergentes intermédiaires entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{h}{g}$ sont

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{a+c}{b+d}, \quad \frac{a+2c}{b+2d}, \quad \frac{a+3c}{b+3d}, \ldots\ldots$$

et l'on retrouve ici la propriété observée par M. Farey.

DÉMONSTRATION

DE

L'IMPOSSIBILITÉ DE RÉSOUDRE L'ÉQUATION $x^7 + y^7 + z^7 = 0$

EN NOMBRES ENTIERS;

PAR M. LEBESGUE [*],

Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

La démonstration suivante revient au fond à celle de M. Lamé, dont elle n'est qu'une simplification.

Théorème I. « L'équation

$$p^2 = q^4 - 2^{2a}.3.7^4 q^2 r^2 + 2^{4a+4}.7^7 r^4,$$

» où les nombres p, q, r sont impairs et premiers entre eux, n'est pos-
» sible que pour $r = 0$; a est un nombre entier positif. »

Démonstration. La différence de deux carrés impairs étant divisible par 8, il est nécessaire que a soit plus grand que l'unité.

L'équation donnée peut se mettre sous la forme

$$[p + (q^2 - 2^{2a-1}.3.7^4 r^2)][p - (q^2 - 2^{2a-1}.3.7^4 r^2)] = 2^{4a-2}.7^7 r^4:$$

les deux facteurs du premier membre ne sauraient avoir pour diviseur premier commun ni 7, ni un diviseur de r, car alors p et q^2 auraient un

---

[*] Il ne sera pas inutile de transcrire ici un passage de la lettre que M. Lebesgue m'a adressée en m'envoyant cet article.

« Le rapport de M. Cauchy sur le Mémoire de M. Lamé, ce Mémoire lui-même et les
» recherches que j'avais faites sur le théorème de Fermat, m'ont conduit, pour $n = 7$, à
» une solution qui ne diffère pas essentiellement de celle de M. Lamé. Je vous l'envoie
» de suite, car je desirerais qu'elle pût paraître prochainement, si vous n'y voyez pas
» d'inconvénient... La solution de M. Stern (Voir le Cahier de juin), très bonne en
» théorie, ne me semble pas praticable pour de grands nombres. Je compte vous en en-
» voyer une autre, etc., etc. » (J. L.)

même diviseur; de plus, des deux facteurs du premier membre l'un est divisible seulement par 2, et l'autre par 2^{4a-3}, car leur somme $2p$ est double d'un impair; il faudra donc poser $r = ts$, t premier à s, et faire

$$\begin{array}{l|l|l|l} p + q^2 - 2^{2a-1}.3.7^4t^2s^2 = 2s^4 & = 2.7^7.s^4 & = 2^{4a-3}.s^4 & = 2^{4a-3}.7^7.s^4 \\ & \text{ou} & \text{ou} & \text{ou} \\ p - q^2 + 2^{2a-1}.3.7^4t^2s^2 = 2^{4a-3}.7^7t^4 & = 2^{4a-3}.t^4 & = 2.7^7.t^4 & = 2.t^4 \end{array}$$

Les trois derniers systèmes donnent $q^2 - 2^{2a-1}.3.7^4t^2s^2$ de forme $4k+3$, ce qui est absurde; on ne peut donc admettre que le premier, d'où résulte l'équation

$$q^2 = s^4 + 2^{2a-1}.3.7^4s^2t^2 - 2^{4a-4}.7^7t^4,$$

qui revient à

$$(s^2 + 2^{2a-2}.3.7^4t^2 \pm q)(s^2 + 2^{2a-2}.3.7^4t^2 \mp q) = 2^{4a+2}.7^7t^4.$$

On démontrera comme plus haut que les deux facteurs du premier membre où les signes supérieurs doivent être pris ensemble, aussi bien que les inférieurs, n'ont que 2 pour plus grand commun diviseur. D'ailleurs le signe de q peut être choisi de sorte que le premier facteur soit divisible par 2 seulement, et l'autre par 2^{4a+1}, d'où, en supposant $t = uv$, u et v premiers entre eux, les deux décompositions

$$\begin{array}{l|l} s^2 + 2^{2a-2}.3.7^4u^2v^2 \pm q = 2u^4 & = 2.7^7.u^4 \\ & \text{ou} \\ s^2 + 2^{2a-2}.3.7^4u^2v^2 \mp q = 2^{4a+1}.7^7v^4 & = 2^{4a+1}.v^4 \end{array}$$

dont la deuxième doit être rejetée, parce qu'elle donne à

$$s^2 + 2^{2a-2}.3.7^4u^2v^2$$

la forme $4k+3$. On admettra donc la première, d'où résulte

$$s^2 = u^4 - 2^{2a-1}.3.7^4u^2v^2 + 2^{4a-4}.7^7v^4.$$

Or cette équation ne diffère de la première qu'en ce que a y est remplacé par $a-1$ et p, q, r, par s, u, v. Continuant ainsi, en remplaçant successivement a par $a-1$, $a-2$, ... 3, 2, on tombera sur l'équation

$$x^2 = y^4 - 2^2.3.7^4.y^2z^2 - 2^8.7^7z^4,$$

où x, y, z sont impairs, et qui est impossible comme on l'a déjà dit. On est donc obligé de supposer $r = 0$ dans l'équation de l'énoncé.

Théorème II. « L'équation $x^7 + y^7 + z^7 = 0$, où l'on suppose x, » y, z, entiers et premiers entre eux, n'est possible qu'en supposant » nulle l'une des inconnues, les deux autres étant ± 1 et ∓ 1. »

Démonstration. De l'équation donnée on tire

$$x^7 + y^7 + z^7 = 7(x+y)(x+z)(y+z)[(x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz)^2 + xyz(x+y+z)],$$

qui devient identique quand on ajoute $x^7 + y^7 + z^7$ au deuxième membre. Posons, pour abréger,

$$x+y+z = s,\quad x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz = u,\quad (x+y)(x+z)(y+z) = v,\quad t = u^2 + xyzs,$$

il en résultera $s^7 = 7vt$; de là les conséquences suivantes :

1°. Le nombre t est impair, de forme $4k+1$, car des trois nombres x, y, z, l'un est pair et les deux autres impairs. Tous les diviseurs premiers de t le sont de s, et par conséquent de u.

2°. Le nombre t est premier à x, y, z, car autrement x, y, z ne seraient pas premiers entre eux;

3°. Le nombre t est premier à v, car on a

$$v = s(xy + xz + yz) - xyz,$$

et si t n'était pas premier à v, il ne le serait pas à xyz;

4°. Le nombre t est une quatorzième puissance non divisible par 7.

En effet, l'équation $s^7 = 7v(u^2 + xyzs)$ montre que si θ est un diviseur premier de $t = u^2 + xyzs$, ce diviseur aura nécessairement le même exposant pair dans u^2 et dans s. Si donc u est divisible par θ^a, s le sera par θ^{2a} et t par θ^{14a}; à moins cependant qu'on ait $\theta = 7$: alors $7t$ serait divisible par 7^{14a}. Il résulte de là que t ou $7t$ est nécessairement une quatorzième puissance; or $7t$ qui est de forme $4k+3$, n'est pas même un carré : il faut donc poser $t = q^{14}$ et $u = qr$, puisqu'un diviseur θ^a dans u répond à θ^{14a} dans t. Les nombres q et r sont impairs ainsi que u; d'ailleurs ils sont premiers entre eux.

5°. Comme $7v$ est premier à t, $7v$ sera une septième puissance, et l'on aura $v = 7^6 . p^7$. Le nombre p est nécessairement pair.

6°. Nous pouvons donc poser les équations

$$(a) \qquad (x+y)(x+z)(y+z) = 7^6 \cdot p^7,$$

$$(b) \qquad (x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz)^2 + xyz(x+y+z) = q^{12},$$

$$(c) \qquad (x+y+z) = 7pq^2,$$

$$(d) \qquad x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz = qr.$$

Les équations (c) et (d) donnent

$$xy+xz+yz = 7^2p^2q^4 - qr,$$

d'où, en multipliant par l'équation (c), et tenant compte ensuite de l'équation (a),

$$xyz = 7pq^2(7^2p^2q^4 - qr) - 7^6p^7;$$

alors l'équation (b) devient

$$q^{12} = r^2 + 7^2 \cdot p^2q^3(7^2 \cdot p^2q^3 - r) - 7^7p^8,$$

ou bien $$(r - \tfrac{1}{2} \cdot 7^2p^2q^3)^2 = q^{12} - 3 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 7^4p^4q^6 + \tfrac{1}{4} \cdot 7^7p^8,$$

qui, en posant $$r - \tfrac{1}{2} \cdot 7^2p^2q^3 = p_1, \quad q^3 = q_1, \quad p^2 = 2^{a+1}r_1,$$

devient $$p_1^2 = q_1^4 - 2^{2a} \cdot 3 \cdot 7^4q_1^2r_1 + 2^{4a+1} \cdot 7^7r_1^4,$$

dans laquelle p_1, q_1 et r_1 sont premiers entre eux. Cette équation ne peut être satisfaite que par $r_1 = 0$; ainsi $p = 0$. On a donc à la fois $x+y+z=0$ et $(x+y)(x+z)(y+z)=0$, ou encore $xyz=0$, puisque

$$(x+y)(x+z)(y+z) = (x+y+z)(xy+xz+yz) - xyz.$$

L'une des inconnues x, y, z est donc nulle.

Corollaire. L'équation $x^7 + y^7 = z^7$ est impossible en nombres entiers positifs, sans être nuls, car autrement on pourrait supposer x, y, z premiers entre eux, et l'équation $x^7 + y^7 + (-z)^7 = 0$ serait satisfaite sans qu'une des inconnues fût nulle.

Sur la limite de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, *m étant un entier positif qui croît indéfiniment;*

PAR J. LIOUVILLE.

La démonstration dont on fait ordinairement usage pour prouver que cette limite a pour valeur le nombre $e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \ldots$ n'est pas suffisamment rigoureuse; elle suppose en effet que pour $m = \infty$, le produit $\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)$ se réduit à l'unité, ce qui est vrai quand n est un nombre déterminé indépendant de m, mais ne l'est plus quand on a par exemple $n = m$ ou $n = m - 1$, etc. On corrigera ce défaut à l'aide des considérations suivantes qui peuvent être souvent utiles, et que M. Lejeune-Dirichlet a heureusement employées dans un de ses Mémoires. En représentant par n un nombre entier aussi grand qu'on voudra, mais indépendant de m, et par θ, η des nombres positifs < 1, on a

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots n}\left(1+\frac{\theta}{n}\right),$$

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{1}{1} + \ldots + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{1.2\ldots n}\left(1+\frac{\eta}{n}\right).$$

De cette dernière formule on conclut que

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{1}{1} + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots n}\left(1+\frac{\zeta}{n}\right) + \varepsilon,$$

ζ étant, comme η, compris entre 0 et 1, tandis que ε désigne un nombre qui, pour toute valeur déterminée de n, converge vers 0 quand m augmente indéfiniment. La différence entre e et $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ est donc exprimée par $\frac{1}{1.2\ldots n}\cdot\frac{\theta-\zeta}{n} - \varepsilon$, et l'on voit qu'elle peut être rendue plus petite que tout nombre donné en prenant d'abord n très grand, puis faisant croître m au-delà de toute limite. Donc, etc. Il est aisé de prouver que le même théorème a lieu quand m est négatif, fractionnaire ou irrationnel. Voyez sur ce point les ouvrages de M. Cauchy.

RÉSOLUTION

DE

L'ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ A UNE INCONNUE

PAR LES FRACTIONS CONTINUES;

PAR V.-A. LEBESGUE,

Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux

La résolution complète de l'équation $az^2 + 2bz + c = 0$ par les fractions continues est due à Lagrange, qui l'a donnée dans son *Traité de la résolution des équations numériques*. Ensuite Legendre en a simplifié les calculs dans sa *Théorie des nombres;* mais pour établir certaines propriétés des fractions continues périodiques racines de l'équation $az^2 + 2bz + c = 0$ (à coefficients entiers), il s'est appuyé sur la résolution de l'équation $ax^2 + 2bxy + cy^2 = m$ en nombres entiers. C'est ce que j'ai évité avec soin, car la résolution de l'équation $ax^2 + 2bxy + cy^2 = m$ n'est réellement dans le cas principal, celui de $b^2 - ac$ positif non carré, qu'une conséquence assez simple de la résolution de l'équation $az^2 + 2bz + c = 0$ par les fractions continues.

Voici les points où je crois avoir simplifié la résolution de l'équation $az^2 + 2bz + c = 0$.

D'abord j'ai abrégé le calcul par un algorithme qui en enchaîne toutes les parties et le réduit pour ainsi dire à sa plus simple expression. J'ai donné ensuite une règle pour trouver sans calcul la deuxième racine quand la première a été calculée [*].

En général, la période de la deuxième est formée des mêmes quotients que celle de la première, mais en ordre renversé. Or il peut arriver que les périodes des deux racines soient identiques : c'est surtout dans la résolution de l'équation $ax^2 + 2bxy + cy^2 = m$, qu'il est bon

[*] Cette règle, énoncée dans le Bulletin de M. Ferussac, mars 1831, a été démontrée récemment par M. C. Ramus (voyez le Journal de M. Crelle, tome XX, page 25, 1839).

d'avoir égard à cette circonstance ; j'ai donc examiné dans quels cas elle peut se présenter.

Si pour chaque racine on calcule les fractions convergentes qui finissent à des quotients périodiques occupant le même rang dans les périodes successives, on trouve que les numérateurs forment une série récurrente et qu'il en est de même des dénominateurs. Ce sont réellement ces fractions qui donnent la résolution de l'équation $ax^2 + 2bxy + cy^2 = m$ convenablement préparée; il fallait donc faire voir, indépendamment de cette résolution, comment, par un simple changement de signe correspondant à celui d'un radical carré, les convergentes pour la deuxième racine se déduisent de celle pour la première.

J'ai cru que dans un sujet aussi connu, la marche synthétique était sans inconvénient, et j'ai réduit à quatre propositions complexes ce que Lagrange et Legendre ont donné à ce sujet, en y joignant les développements que je viens d'exposer.

Pour la théorie générale des fractions continues, on peut consulter un Mémoire fort étendu de M. Stern (Journal de M. Crelle, t. X et XI), mais la théorie des fractions continues périodiques y est moins développée que dans le Mémoire de M. Ramus.

I.

Propositions préliminaires.

Avant de parler des fractions continues périodiques, il est bon de rappeler en peu de mots quelques théorèmes, et d'expliquer la notation employée dans les démonstrations suivantes. Cette notation locale est de nature à simplifier quelques recherches.

1. L'expression

$$x_1 = q_1, q_2, q_3, \ldots q_k, x_{k+1}$$

représentera la fraction continue

$$x_1 = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ldots \cfrac{\ldots}{\ldots + \cfrac{1}{q_k + \cfrac{1}{x_{k+1}}}}}};$$

$q_1, q_2, \ldots q_k$ sont des quotients entiers dont les indices $1, 2, 3, \ldots k$ marquent le rang. La quantité x_{k+1} est un quotient complet, c'est-à-dire qui complète la valeur de x_1; quand x_1 est irrationnel, x_{k+1} l'est également.

L'expression

$$x_1 = q_1, q_2, \ldots q_k, (q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots q_{k+n})$$

montre que les quotients $q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots q_{k+n}$, compris entre parenthèses, reviennent périodiquement. C'est une fraction continue périodique dont la période a n termes.

2. Si l'on réduit la fraction continue

$$y = q_g, q_{g+1}, \ldots q_k$$

en fraction ordinaire, le numérateur sera représenté par

$$(g, k),$$

qui indique qu'on a pris tous les quotients depuis celui dont l'indice est g, jusqu'à celui dont l'indice est k. On voit, d'après cela, que le numérateur de y sera $(g+1, k)$; ainsi

$$y = q_g, q_{g+1}, \ldots q_k = \frac{(g, k)}{(g+1, k)}.$$

3. On a, en général,

$$(1, n) = (1, n-1)q_n + (1, n-2),$$
$$(2, n) = (2, n-1)q_n + (2, n-2).$$

Ces formules ayant été vérifiées jusqu'à l'indice n, on les étend à l'indice $n+1$ en changeant q_n en $q_n + \frac{1}{q_{n+1}}$ dans la fraction $\frac{(1, n)}{(2, n)}$.

Pour les appliquer à tous les cas, il faut se rappeler les conventions suivantes

$$(n, n) = q_n, \quad (n+1, n) = 1, \quad (n+2, n) = 0,$$

qui servent à donner plus de symétrie aux formules.

4. Si dans la fraction

$$\frac{(1, n)}{(2, n)} = \frac{(1, n-1)\, q_n + (1, n-2)}{(2, n-1)\, q_n + (2, n-2)}$$

on change q_n en x_n, on aura la valeur exacte de la fraction continue

$$x_1 = \frac{(1, n-1)\, x_n + (1, n-2)}{(2, n-1)\, x_n + (2, n-2)}.$$

5. Si dans la valeur de $\frac{(1, n)}{(2, n)}$ (voy. **4**) on remplace q_n par

$$q_n, q_{n+1}, \ldots q_k = \frac{(n, k)}{(n+1, k)},$$

on obtiendra

$$(1, k) = (1, n-1)\,(n, k) + (1, n-2)\,(n+1, k),$$
$$(2, k) = (2, n-1)\,(n, k) + (2, n-2)\,(n+2, k).$$

Ainsi, pour $n = 2$, on aura

$$(1, k) = (2, k)\, q_1 + (3, k);$$

et pour $k = n$, on aura

$$(1, n) = (1, n-1)\, q_n + (1, n-2).$$

6. La formule précédente conduit directement à cette conséquence que les fractions continues

$$q_1, q_2, \ldots q_n \quad \text{et} \quad q_n, q_{n-1}, \ldots q_2, q_1,$$

réduites en fractions ordinaires, ont le même numérateur. Ainsi *l'on peut renverser l'ordre des quotients sans changer la valeur des expressions* (g, k).

Kramp donnait le nom de *médiateurs* aux expressions (g, k). (Voy. son *Arithmétique universelle*.)

7. Si l'on considère la fraction continue

$$q_1, \ldots q_g, \ldots q_h, \ldots q_k,$$

elle conduira à l'équation

$$(1, h)(g, k) - (1, k)(g, h) = (-1)^{h-g}(1, g-2)(h+2, k).$$

Cette proposition étant la seule dont la démonstration ne se présente pas directement, il ne sera pas inutile de la développer, ce qui fera voir l'avantage du symbole $(1, g)$.

Les équations

$$(1, k) = (1, g-1)(g, k) + (1, g-2)(g+1, k),$$
$$(1, h) = (1, g-1)(g, h) + (1, g-2)(g+2, h),$$

donnent par l'élimination de $(1, g-1)$, l'équation

$$(1, h)(g, k) - (1, k)(g, h) = (1, g-2)[(g, k)(g+1, h) - (g, h)(g+1, k)].$$

Les équations

$$(g, k) = (g, h)(h+1, k) + (g, h-1)(h+2, k),$$
$$(g+1, k) = (g+1, h)(h+1, k) + (g+1, h-1)(h+2, k),$$

donnent, par l'élimination de $(h+1, k)$, l'équation

$$(g, k)(g+1, h) - (g, h)(g+1, k) = (h+2, k)[(g, h-1)(g+1, h) - (g, h)(g+1, h-1)].$$

Enfin les équations

$$(g, h) = (g, h-1)q_h + (g, h-2),$$
$$(g+1, h) = (g+1, h-1)q_h + (g+1, h-2),$$

donnent, par l'élimination de q_h, l'équation

$$(g, h-1)(g+1, h) - (g, h)(g+1, h-1) = -[(g, h-2)(g+1, h-1) - (g, h-1)(g+1, h-2)].$$

Le second membre de cette équation se tire du premier en diminuant h de l'unité et changeant le signe, ou en multipliant par -1. Ainsi, en diminuant h de f unités, il faudra multiplier par $(-1)^f$.

Le deuxième membre devient donc

$$(-1)^f[(g, h-f-1)(g+1, h-f) - (g, h-f)(g+1, h-f-1)]$$

Si l'on pose $g = h - f$, d'où $f = h - g$, il se réduit donc à

$$(-1)^{h-g}[(g, g-1)(g+1, g) - (g, g)(g+1, g-1)] = (-1)^{h-g};$$

on a donc enfin

$$(1, h)(g, k) - (1, k)(g, h) = (-1)^{h-g}(1, g-2)(h+2, k).$$

Si dans cette équation on pose $g = 2$, on trouve

$$(1, h)(2, k) - (1, k)(2, h) = (-1)^h(h-2, k),$$

qui donne la différence de deux fractions convergentes $\frac{(1, k)}{(2, k)}$ et $\frac{(1, h)}{(2, h)}$.

Pour $h = k - 1$, on a

$$(1, k)(2, k-1) - (1, k-1)(2, k) = (-1)^k,$$

qui donne la différence de deux fractions convergentes consécutives $\frac{(1, k)}{(2, k)}$ et $\frac{(1, k-1)}{(2, k-1)}$.

La formule générale est de Kramp; elle peut être fort utile, comme on le verra plus bas.

II.

Proposition première.

« Pour réduire en fraction continue la plus grande racine positive de » l'équation

$$D_1 x_1^2 - 2I_1 x_1 - D_0 = 0.$$

» où D_1, I_1 sont des entiers positifs et D_0 un entier positif ou négatif, » il faudra faire le calcul suivant, dans lequel m représente le nombre » entier immédiatement au-dessous de $\sqrt{I_1^2 + D_0 D_1} = \sqrt{\Delta}$.

Dividendes	Diviseurs.	Quotients.	Restes.	Diff. des restes.
	D_0,	»	$r_0 = m - I_1$,	
$\Delta_1 = m + I_1$,	D_1,	q_1,	r_1,	$d_1 = r_1 - r_0$,
$\Delta_2 = \Delta_1 - d_1$,	$D_2 = D_0 + q_1 d_1$,	q_2,	r_2,	$d_2 = r_2 - r_1$,
$\Delta_3 = \Delta_2 - d_2$,	$D_3 = D_1 + q_2 d_2$,	q_3,	r_3,	$d_3 = r_3 - r_2$,
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\Delta_k = \Delta_{k-1} - d_{k-1}$,	$D_k = D_{k-1} + q_{k-1} d_{k-1}$,	q_k,	r_k,	$d_k = r_k - r_{k-1}$.
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

» Cette racine positive, la plus grande des deux quand l'une et l'autre
» sont positives, sera

$$x_1 = \frac{\sqrt{A} + I_1}{D_1} = q_1, q_2, q_3, \ldots q_k \ldots$$

» Si l'on voulait avoir l'autre racine positive, ou la racine négative
» prise positivement, les deux premières lignes du tableau devien-
» draient

»	$\pm D_0$,	»	$r_0 = m + I_1$,	
$\Delta_1 = m - I_1$,	$\mp D_1$,	q_1,	r_1,	$d_1 = r_1 - r_0$.

» le signe supérieur étant pris pour la racine positive, et l'inférieur
» pour la négative prise positivement. »

Démonstration. Si l'on pose

$$x_1 = \frac{\sqrt{A} + I_1}{D_1} = q_1 + \frac{1}{x_2},$$

q_1 étant l'entier immédiatement au-dessous de x_1, on trouvera

$$x_2 = \frac{\sqrt{A} + D_1 q_1 - I_1}{\frac{A - (D_1 q_1 - I_1)^2}{D_1}} = \frac{\sqrt{A} + I_2}{D_2},$$

sous les relations

$$I_2 = D_1 q_1 - I_1 \quad \text{et} \quad D_2 = D_0 + 2I_1 q_1 - D_1 q_1^2.$$

Ainsi D_2 est entier et égale $\frac{A - I_2^2}{D_1}$; on a donc

$$A = I_1^2 + D_0 D_1 = I_2^2 + D_1 D_2;$$

de là l'algorithme suivant qui est celui de Lagrange, qui le donne comme fort simple,

$$q_1 < \frac{\sqrt{A} + I_1}{D_1}, \quad I_2 = D_1 q_1 - I_1.$$

$$D_2 = D_0 + 2I_1 q_1 - D_1 q_1^2 = \frac{A - I_2^2}{D_1}, \quad q_2 < \frac{\sqrt{A} + I_2}{D_2}, \quad I_3 = D_2 q_2 - I_2.$$

$$D_3 = D_2 + 2I_2 q_2 - D_3 q_2^2 = \frac{A - I_3^2}{D_1}, \quad q_3 < \frac{\sqrt{A} + I_3}{D_3}, \quad I_4 = D_3 q_3 - I_3.$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

où l'on prend pour $q_1, q_2, q_3, \ldots$ les entiers immédiatement au-dessous de $\frac{\sqrt{A} + I_1}{D_1}, \frac{\sqrt{A} + I_2}{D_2}, \frac{\sqrt{A} + I_3}{D_3} \ldots$

On peut, comme le fait Legendre, simplifier cet algorithme en remarquant que l'on a $2I_1 - D_1 q_1 = I_1 - I_2$;

d'où l'on tire

$$D_2 = D_0 + q_1(I_1 - I_2), \quad D_3 = D_1 + q_2(I_2 - I_3), \quad \text{etc.}$$

Mais de plus, comme les nombres $q_1, q_2, q_3, \ldots$ sont les nombres entiers immédiatement au-dessous de

$$\frac{m + I_1}{D_1}, \quad \frac{m + I_2}{D_2}, \quad \frac{m + I_3}{D_3} \ldots$$

si l'on pose les équations

$$m + I_1 = D_1 q_1 + r_1, \quad m + I_2 = D_2 q_2 + r_2, \ldots$$

au lieu des équations

$$I_2 = D_1 q_1 - I_1, \quad I_3 = D_2 q_2 - I_2, \quad \text{etc.},$$

on trouvera celles-ci,

$$I_2 = m - r_1, \quad I_3 = m - r_2, \quad \text{etc.}$$

En posant pour l'analogie $I_1 = m - r_0$, il en résultera

$$I_1 - I_2 = r_1 - r_0 = d_1, \quad I_2 - I_3 = r_2 - r_1 = d_2, \quad \text{etc.}$$

De là résulte l'algorithme du tableau, car les Δ (ou les numérateurs dans lesquels $\sqrt{A}$ a été remplacé par m) peuvent se mettre immédiatement sous les formes

$$2m - r_0, \quad 2m - r_1, \quad 2m - r_2, \quad \text{etc.},$$

ou $$\Delta_1, \quad \Delta_2 = \Delta_1 - d_1, \quad \Delta_3 = \Delta_2 - d_2, \quad \text{etc.}$$

On pourrait encore prouver la chose synthétiquement. En effet, on a toujours $$I^2 + D_k D_{k-1} = I^2_{k+1} + D_{k+1} . D_k = A;$$

car il en résulte $$(I_k + I_{k+1})(I_k - I_{k+1}) = D_k (D_{k+1} - D_{k-1}),$$

ou bien encore, en vertu des relations supposées,

$$(I_k + I_{k+1}) d_k = D_k . q_k d_k,$$

qui se réduit à $$I_k + I_{k+1} = D_k q_k;$$

or cette équation résulte immédiatement de

$$\Delta_k = 2m - r_{k-1} = m - r_{k-1} + m - r_k + r_k = I_k + I_{k+1} + r_k$$

et de $$\Delta_k = D_k q_k + r_k.$$

On peut donc dans $$I^2_{k+1} + D_{k+1} . D_k,$$

diminuer chaque indice de l'unité, et l'on tombe ainsi sur $I_1 + D_1 D_0 = A$.

Cela posé, on a toujours

$$\frac{\sqrt{A} + I_k}{D_k} = q_k + \frac{1}{\dfrac{\sqrt{A} + I_{k+1}}{D_{k+1}}}.$$

car cette équation se réduit à $A = I^2_{k+1} + D_{k+1} . D_k$. La démonstration resterait la même pour la seconde racine, qui, comme on le verra plus tard, pourrait se déduire immédiatement de la seconde.

Exemples.

Comme il importe de se familiariser avec l'algorithme précédent qui conduit très rapidement au but, voici quelques exemples qui serviront d'ailleurs de vérification pour les propositions suivantes.

I. Résoudre l'équation $3x^2 - 19 = 0$. Ici $x = \sqrt{\frac{19}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{57}$. $A = I_1^2 + D_0 D_1 = 57$, d'où $m = 7$. On prendra les quatre nombres

$$D_0 = 19, \quad r_0 = m + I_1 = 7, \quad \Delta_1 = m + I_1 = 7, \quad D_1 = 3,$$

on les placera comme on le voit ci-dessous, et le reste du calcul ne sera qu'une suite de divisions semblables où le dividende et le diviseur seront donnés par des règles fort simples, représentées par les équations

$$\Delta_k = \Delta_{k-1} - d_{k-1}, \quad D_k = D_{k-2} + q_{k-1} . d_{k-1},$$

de sorte que le plus souvent ils pourront s'obtenir immédiatement.

Δ	D	q	r	d
»	19	»	7	»
7	3	2	1	— 6
13	7	1	6	5
8	8	1	0	— 6
14	1	14	0	0
14	8	1	6	6
8	7	1	1	— 5
13	3	4	1	0
* 13	7	1	6	5
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

La racine est $x_1 = 2(1, 1, 14, 1, 1, 4)$. En général N étant plus grand que l'unité, on trouvera, N étant rationnel, $\sqrt{N} = a(b, c, \ldots c, b, 2a)$; c'est-à-dire que la période est formée d'une partie symétrique suivie d'un quotient qui est le double de l'entier de la racine. On en verra plus loin la démonstration.

2. Le même calcul appliqué à l'équation $x^2 = 991$, donnerait

$$x = \sqrt{991} = 31\ (2, 12, 10, 2, 2, 2, 1, 1, 2, 6, 1, 1, 1, 1, 3, 1, 8, 4, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 4, 1, 20, 6, 4, {}^*31, 4, 6, 20, 1, 4, 1, 3, 2, 1, 2, 1, 4, 8, 1, 3, 1, 1, 1, 1, 6, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 10, 12, 2, 62),$$

qui a la forme annoncée plus haut; la longueur de la période montre bien la nécessité de l'algorithme précédent.

3. Réduire en fractions continues les deux racines de l'équation

$$15x^2 - 18x - 5 = 0.$$

Racine positive $D_0 = 5$, $D_1 = 15$, $m = 12$, $r_0 = 3$, $\Delta_1 = 21$;
Racine négative $D_0 = 5$, $D_1 = 15$, $m = 12$, $r_0 = 21$, $\Delta_1 = 3$

Racine positive.

»	5	»	3	
* 21	15	1	6	3
18	8	2	2	— 4
22	7	3	1	— 1
23	5	4	3	2
* 21	15	1	6	3
⋮				

$x' = (1, 2, 3, 4)$

Racine negative.

»	5	»	21	
3	15	0	3	— 18
* 21	5	4	1	— 2
23	7	3	2	1
22	8	2	6	4
18	15	1	3	— 3
* 21	5	4	1	— 2
⋮				

$-x'' = 0, 4, 3, 2, 1.$

La période de la seconde racine n'est autre que celle de la première renversée. Cela arrive pour toute équation du second degré. De plus, si la racine positive surpassant 1, la négative tombe entre 0 et -1, comme dans le cas présent, la période commence dès le premier quotient.

4. Résoudre l'équation $5x^2 - 42x + 11 = 0$?

$A = 21^2 - 55 = 386$, $m = 19$, $l_1 = 21$, $D_0 = -11$, $D_1 = 5$.

Première racine $D_0 = -11$, $r_0 = -2$, $\Delta_1 = 40$, $D_1 = 5$;
Deuxième racine $-D_0 = 11$, $r_0 = 40$, $\Delta_0 = -2$, $-D_1 = -5$.

Première racine.

»	—11,	»	— 2	»
40,	5,	8,	0,	2,
*38,	5,	7,	3,	3,
35,	26,	1,	9,	6,
29,	11,	2,	7,	—2,
31,	22,	1,	9,	2**
29,	13,	2,	3,	—6,
35,	10,	3,	5,	2,
33,	19,	1,	14,	9,
24,	19,	1,	5,	—9,
33,	10,	3,	3,	—2,
29,	22,	1,	7,	4,
31,	11,	2,	9,	2,
29,	26,	1,	3,	—6,
35,	5,	7,	0,	—3,
*38,	5,	7,	3,	3,
etc.				

Seconde racine.

»	11,	»	40,	»
— 2,	— 5,	0,	— 2,	— 42,
40,	11,	3,	7,	9,
**31,	22,	1,	9,	2,
etc.,	etc.,	etc.,	etc.,	etc.,

Le reste comme à la première racine.

Première racine,

$$x' = 8(7, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 1, 3, 2, 1, 2, 1, 7).$$

Deuxième racine,

$$x'' = 0, 3(1, 2, 3, 1, 1, 3, 2, 1, 2, 1, 7, 7, 1, 2);$$

ou bien encore,

$$x'' = 0, 3, 1, 2, 3, 1, 1, 3, 2, 1, 2, 1, 7(7, 1, 2 \ldots 2, 1, 7)$$

Ici la période est symétrique, et l'on peut donner aux deux racines la même période en fixant convenablement l'origine de la période d'une des racines.

Nota. L'algorithme exposé plus haut ne diffère presque en rien de celui qui donne la réduction des formes binaires du second degré. (*Voyez* la note finale.)

III.

Proposition deuxième.

« Toute équation du second degré a ses racines exprimées par des » fractions continues périodiques, et réciproquement toute fraction » continue périodique est racine d'une équation du second degré. »

Développement. Pour l'équation $D_1 x^2 - 2I_1 x - D_0 = 0$ où D_1 et I_1 sont supposés positifs.

1°. $D_0 > 0$, racines de signes contraires x', $-x''$;

1er *cas.* $D_1 - 2I_1 - D_0 < 0$, $D_1 + 2I_1 - D_0 > 0$, $x' > 1$ et $x'' < 1$.

$$x' = (q_1, q_2, \ldots q_k), \quad x'' = 0(q_k, \ldots q_2, q_1);$$

2e *cas.* $D_1 + 2I_1 - D_0 < 0$, $x' > 1$, $x'' > 1$,

$$x' = q_1(q_2, q_3, \ldots q_k, \overline{q_1 + Q_1}), \quad x'' = Q_1(q_k, \ldots q_3, q_2, \overline{q_1 + Q_1}):$$

3^e *cas*. $D_1 - 2I_1 - D_0 > 0$, $x' < 1$, $x'' < 1$,

$$x' = 0,q_1(q_2, q_3, \ldots q_k, \overline{q_1 + Q_1}),\ x'' = 0,Q_1(q_k, \ldots q_3, q_2, \overline{q_1 + Q_1}).$$

2°. $D_0 < 0$ racines de même signe;

1re racine $x' = a, b, c, \ldots f, g$ (A, B, ... K, L, M);

2me racine $g > M$ $x'' = a, b, \ldots f, \overline{g - M - 1}, 1, \overline{L - 1}$ (K...B, A, M, L),

$g < M$ $x'' = a, b, \ldots \overline{f - 1}, 1, \overline{M - g - 1}$ (L, K, ... B, A, M).

(En faisant commencer au quotient M la période de la 2me racine, on aura celle de la 1re renversée.)

1. *Démonstration*. Le premier cas est celui de D_0 positif, sous les relations $D_1 - 2I_1 - D < 0$, $D_1 + 2I_1 - D_0 > 0$;

alors aux substitutions $x = \infty, +1, 0, -1$

répondent des résultats de signe $+, -, -, +$.

Il y a donc une racine positive > 1 et une racine négative < 1 en valeur absolue.

1°. Pour ce cas D_0, D_1, I_1 sont positifs. L'équation $A - D_0 D_1 = I_1^2$ montre que I_1 égale au plus m entier de $\sqrt{A}$; or

$$2m - r_0 = m + I_1 = D_1 q_1 + r_1$$

montre que l'on a $r_1 < m$. Cela est évident pour $D_1 = m$ ou $< m$, puisque l'on a $r_1 < D_1$. Si l'on avait $D_1 > m$, alors $r_1 > m$ rendrait $m + I_1 > 2m$, tandis que l'on a $m + I_1 < 2m$. Par conséquent $I_2 = m - r_1$ sera positif $< m$; $A - D_1 D_2 = I_2^2$ donnera D_1 positif, et ainsi de suite. Les D et les I sont donc essentiellement positifs. Or tous les I sont $< m$, tous les D sont $< D < m + I < 2m$. Par conséquent les quotients $\frac{\sqrt{A} + I}{D}$ sont en nombre limité $< m.2m < 2A$. Une quantité telle que $\frac{\sqrt{A} + I_2}{D_2}$ devra donc nécessairement se reproduire, et dès lors la fraction continue sera périodique.

2°. La quantité $\frac{\sqrt{A}+I_1}{D_1}$ se reproduit nécessairement. En effet, on a toujours $r_k < D_{k+1}$, car de $A - I_{k+1}^2 = D_k . D_{k+1}$, on tire

$$A - (m - r_k)^2 = D_k . D_{k+1} ;$$

d'où $r_k(2m - r_k) < D_k . D_{k+1}$; or $2m - r_{k-1} = D_k q_k + r_k$; d'où $2m - r_k = D_k q_k + r_{k-1}$; donc $D_k . q_k . r_k < D_k . D_{k+1}$, et *à fortiori* $r_k > D_{k+1}$.

On a aussi $r_0 = m - I_1 < D_1$, car $\frac{\sqrt{A}-I_1}{D_1} < 1$ donne $m < D_1 + I_1$.

Si l'on suppose que le quotient complet $\frac{\sqrt{A}+I_g}{D_g}$ se représente après k termes et qu'on ait $\quad I_g = I_{g+k}, D_g = D_{g+k}$,

les équations $\quad A - I_g^2 = D_g . D_{g-1}, \quad A - I_{g+k}^2 . D_{g+k-1}$.

donneront $\quad D_{g-1} = D_{g+k-1}$;

puis les équations $\quad I_g = m - r_{g-1}, \quad I_{g+k} = m - r_{g+k-1}$,

donneront $r_{g-1} = r_{g+k-1}$; enfin les équations

$$2m - r_{g-2} = D_{g-1} . q_{g-1} + r_{g-1}, \quad 2m - r_{g+k-2} = D_{g+k-1} . q_{g+k-1} + r_{g+k-1}$$

donneront $r_{g-2} - r_{g+k-2} = D_{g-1}(q_{g-1} - q_{g+k-1})$, et comme on a

$$r_{g-2} < D_{g-1}, \quad r_{g+k-2} < D_{g+k-1} < D_{g-1},$$

il en résultera $\quad r_{g-2} = r_{g+k-2}, \quad q_{g-1} = q_{g+k-1}$;

d'où $I_{g-1} = I_{g+k-1}$, et ainsi de suite.

Si donc g était $> K$, on trouverait

$$I_g = I_{g-k} = I_{g-2k}, \ldots \quad D_g = D_{g-k} = D_{g-2k}, \ldots ;$$

on peut donc supposer $g < K$, et l'on voit par là que le quotient $\frac{\sqrt{A}+I_1}{D_1}$ doit se reproduire. Ainsi la première racine sera $x' = (q_1, q_2, \ldots q_k)$, c'est-à-dire périodique dès le premier quotient.

3°. La deuxième racine est au signe près

$$\frac{\sqrt{A}-I_1}{D_1}=\frac{\sqrt{A}-I_{nk+1}}{D_{nk+1}}=\frac{D_{nk}}{\sqrt{A}+I_{nk+1}}=0+\frac{1}{\dfrac{\sqrt{A}+I_{nk+1}}{D_{nk}}};$$

mais on a en général

$$\frac{\sqrt{A}+I_k}{D_{k-1}}=q_{k-1}+\frac{1}{\dfrac{\sqrt{A}+I_{k-1}}{D_{k-2}}};$$

et par conséquent $\qquad -x''=0(q_k, q_{k+1}, \ldots q_3, q_1).$

ainsi la période est celle de la première racine renversée.

4°. Réciproquement, soit $\quad x_1=q_1, q_2, \ldots q_k, x_{k+1};$

on en tirera $\qquad x_1=\dfrac{(1,k)x_{k+1}+(1,k-1)}{(2,k)x_{k+1}+(2,k-1)},$

et comme $\qquad x_1=x_{k+1},$

on aura $\qquad (2,k)x_1^2-[(1,k)-(2,k-1)]x_1-(1,k-1)=0,$

ou $\qquad D_1x_1^2-2I_1x_1-D_0=0,$

en supposant $(2,k)=\Psi D_1,\ (1,k)-(2,k-1)=2\Psi I_1,\ (1,k-1)=\Psi D_0:$

D_1, D_0, I_1 seront positifs et satisferont aux conditions

$$D_1-2I_1-D_0<0,\quad D_1+2I_1-D_0>0.$$

On aura Ψ entier si $(1,k)-(2,k-1)$ est pair; dans le cas contraire, Ψ aura 2 pour dénominateur.

On voit également que toute fraction continue périodique

$$x=q_1, q_2, \ldots q_k(q_{k+1}, \ldots q_{k+n})$$

est racine d'une équation du second degré, car en posant

$$z=q_{k+1}, \ldots q_{k+n}, z,$$

on aura un résultat de forme $z=\dfrac{\alpha z+\alpha'}{\beta z+\beta'}$; et comme $x=q_1, \ldots q_k, z$, on

aura également $x = \frac{\gamma z + \gamma'}{\delta z + \delta'}$. L'élimination de z donnera une équation en x du second degré. La réciproque est donc prouvée pour tous les cas.

2. Supposons maintenant D_0 positif et la seule condition..... $D_1 + 2I_1 - D_0 < 0$ qui entraîne $D_1 - 2I_1 - D_0 < 0$; ici les deux racines sont, abstraction faite du signe, plus grandes que l'unité. On posera $x = q_1 + \frac{1}{y}$, q_1 étant le plus grand nombre entier compris dans la racine positive. Pour cette racine y sera essentiellement positif. La transformée sera

$$(D_1 q_1^2 - 2I_1 q_1 - D_0) y^2 + 2(D_1 q_1 - I_1) y + D_1 = 0,$$

ou bien
$$D_2 y^2 - 2I_1^2 y - D_1 = 0,$$

qui satisfait aux conditions

$$D_2 + 2I_2 - D_1 > 0, \quad D_2 - 2I_2 - D_1 < 0,$$

qui reviennent à celles-ci,

$$- D_1(q_1 - 1)^2 + 2I_1(q_1 - 1) + D_0 > 0,$$
$$- D_1(q_1 + 1)^2 + 2I_1(q_1 + 1) + D_0 < 0,$$

évidemment satisfaites puisque x tombe entre $q_1 - 1$ et $q_1 + 1$.

Les deux valeurs de y sont donc

$$y' = (q_2, \ldots q_{k+1}), \quad y'' = -0(q_{k+1}, \ldots q_2).$$

La première valeur de x est $x' = q_1(q_2, \ldots q_{k+1})$, et la seconde $x'' = q_1 - q_{k+1} - \frac{1}{q_{k+2} \ldots}$, mais elle doit être négative; il faut donc poser $q_1 < q_{k+1}$, puisque $q_1 = q_{k+1}$ donnerait $x' = (q_1, q_2, \ldots q_k)$, ce qui n'est pas. On peut donc faire $q_{k+1} = q_1 + Q$; d'où les formules de l'énoncé.

3. Les conditions $D_0 > 0$, $D_1 - 2I_1 - D_0 > 0$, qui entraînent $D_1 + 2I_1 - D_0 > 0$, expriment que les deux racines sont au signe près < 1 et conduisent de suite aux formules de l'énoncé; car en posant $x = -\frac{1}{y}$, on a une équation qui tombe dans le cas précédent.

4. Le cas de $D_0 < 1$ ou des deux racines positives, se ramène aux précédents ($D_0 > 1$), car en posant $x_1 = q_1$, x_2, ou $= q_1, q_2$, x_3, ou $q_1, q_2, q_3, x_4, \ldots$ une des transformées $Ax^2 + 2Bx_n + C = 0$ aura ses termes extrêmes de signes différents [*], et par conséquent ses racines exprimées par des fractions continues périodiques. Cela vient d'être démontré pour le cas où le terme moyen est négatif; s'il était positif, le changement de signe ne ferait que changer le signe des racines.

Comme la valeur positive de y surpasse l'unité

$$x' = a, b, \ldots f, g\,(A, B, \ldots K, L, M),$$

et si l'on fait

$$y' = (A, B, \ldots K, L, M),$$

la deuxième valeur de y sera $y'' = -0\,(M, L, \ldots B, A)$.

D'après cela les deux valeurs de x s'obtiendront en mettant dans $x = a, b, \ldots f, g, y$, les deux valeurs de y.

On ne peut ici supposer $g = M$, si l'origine de la période est bien fixée, il faut donc examiner les deux cas $g > M$ et $g < M$.

1°. Si l'on a $g > M$, on trouvera pour $g + \frac{1}{y}$, en mettant pour y sa deuxième valeur,

$$g - M - \cfrac{1}{L + \cfrac{1}{K + \ldots}} = (g - M - \cfrac{1}{L + \cfrac{1}{K + \ldots}} = (g - M - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{L - 1 + \cfrac{1}{K + \ldots}}},$$

puisque $p - \frac{1}{q} = p - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{q - 1}}$; on aura donc

$$x'' = a, b, \ldots f, g - M - 1, 1, L - 1(K, \ldots B, A, M, L).$$

---

[*] Si l'on représente par $\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}$, deux fractions convergentes consécutives vers x, et assez rapprochées pour ne contenir entre elles qu'une racine, en posant $x = \frac{p'y + p}{q'y + q}$, la transformée en y remplit la condition, car ses termes extrêmes ont pour coefficients

$$q'^2\left[D_0\left(\frac{p'}{q'}\right)^2 - 2I_0\left(\frac{p'}{q'}\right) - D_0\right], \quad q^2\left[D_0\left(\frac{p}{q}\right)^2 - 2I_0\left(\frac{p}{q}\right) - D_0\right].$$

2°. Si l'on a au contraire $g < M$, il en résulte pour $g + \frac{1}{y}$, quand on y remplace y par sa seconde valeur,

$$g + \frac{1}{y} = g - M - \frac{1}{L + \ldots} = -\left[(M - g) + \frac{1}{L + \ldots}\right].$$

En conséquence $\quad f + \dfrac{1}{g + \frac{1}{y}}$

deviendra $\quad f - \dfrac{1}{(M-g) + \frac{1}{L+\ldots}} = (f-1) + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{M-g-1+\frac{1}{L+\ldots}}},$

et par suite on aura

$$x'' = a, b, \ldots \overline{f-1}, 1, \overline{M-g-1}\,(L, R, \ldots B, A, M).$$

Si l'un des quotients $g - M - 1$, $L - 1$, $f - 1$, $M - g - 1$ devient nul, et que ce ne soit pas le premier, il faudra le faire disparaître au moyen de la formule $a + \frac{1}{0 + \frac{1}{b}} = a + b$, c'est-à-dire qu'il faudra effacer le quotient nul et réunir en un seul les deux entre lesquels il tombait.

Dans tous les cas, on voit que la seconde racine est périodique comme la première, et que sa période n'est que celle de la première renversée, pourvu qu'on prenne M pour le premier terme de la période de la seconde racine.

IV.

Proposition troisième.

« Pour que les deux racines d'une équation du second degré soient » des fractions continues de même période, il faut et il suffit que la » période de la première racine soit symétrique $(a, b, \ldots b, a)$, ou » bien symétrique précédée d'un quotient $(m, a, b \ldots b, a)$, ou enfin » symétrique suivie d'un quotient.

» *Développement.* Pour l'équation

$$D_1 x_1^2 - 2I_1 x_1 - D_0 = 0, \qquad \text{et } D_0 > 0:$$

1°. $D_1 = D_0$, $\quad x' = (a, b, \ldots b, a)$, $\quad -x'' = 0\,a, b, \ldots b, a$;

$$2^{\circ}\quad \left\{\begin{array}{l} D_1 + 2I_1 - D_0 > 0, \\ D_1 - 2I_1 - D_0 < 0, \\ \dfrac{2I_1}{D_1} = m, \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x' = -(m, a, b, \ldots b, a \\ \quad = m(a, b, \ldots b, a, m), \\ -x'' = 0(a, b, \ldots b, a, m), \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{l} D_1 + 2I_1 - D_0 < 0, \\ \dfrac{2I_1}{D_1} = m; \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x' = m + A(a, b, \ldots b, a, \overline{m+2A}), \\ -x'' = A(a, b, \ldots b, a, \overline{m+2A}); \end{array}$$

$$3^{\circ}\quad \left\{\begin{array}{l} D_1 + 2I_1 - D_0 > 0, \\ D_1 - 2I_1 - D_0 < 0, \\ \dfrac{2I_1}{D_0} = m, \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x' = (a, b, \ldots b, a, m), \\ -x'' = 0(m, a, b, \ldots b, a) \\ \quad = 0, m(a, b, \ldots b, a, m), \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{l} D_1 - 2I_1 - D_0 > 0, \\ \dfrac{2I_1}{D_0} = m, \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x' = 0, \overline{m+A}(a, b, \ldots b, a, \overline{m+2A}), \\ -x'' = 0, A(a, b, \ldots b, a, \overline{m+2A}); \end{array}$$

» toutes ces propositions ayant chacune leur proposition réciproque.

» Pour $D_0 < 0$, il faudra et il suffira qu'une transformée de l'équa-
» tion $D_1 x^2 - 2I_1 x - D_0 = 0$ tombe dans le cas précédent; c'est-à-dire
» que les coefficients extrêmes étant de signes contraires ils soient égaux,
» ou que l'un d'eux divise le coefficient moyen. »

1. *Démonstration.* La période de la seconde racine n'étant autre que celle de la première renversée, il faudra rendre identiques les deux périodes

$$q_1, \quad q_2, \quad q_3, \ldots \quad q_{n-g}, \quad q_{n-g+1}, \ldots \ldots q_n,$$
$$q_{n-g}, \quad q_{n-g-1}, \ldots \ldots q_1, \quad q_n, \ldots \ldots \ldots q_{n-g+1}.$$

ce qui montre que la première période est composée de deux parties symétriques

$$a, b, \ldots b, a, p, q, \ldots q, p.$$

D'abord si l'une d'elles, la première, par exemple, est composée d'un nombre pair de termes $a, b, \ldots m, m, \ldots b, a$, en transposant $a, b, \ldots m$, on en déduira la période symétrique

$$m \ldots b, a, p, q, \ldots q, p, a, b, \ldots m$$

Mais si l'une d'elles est composée d'un nombre impair de termes

$ab, \ldots m, n, m, \ldots b, a$, on en déduira à volonté

$$n, m, \ldots b, a, p, q, \ldots q, p, a, b, \ldots m,$$

ou bien, $$m, \ldots b, a, p, q, \ldots q, p, a, b, \ldots m, n,$$

c'est-à-dire une période symétrique précédée ou suivie d'un quotient. Ces deux dernières formes coexistent toujours et n'excluent point nécessairement la première.

2. Si une équation a pour racine $x' = (a, b, \ldots b, a)$, elle sera de la forme $D_1 x^2 - 2I_1 x - D_0 = 0$, $D_0 = D_1$.

Cela suit immédiatement de ce que la seconde racine est en changeant son signe $-x'' = 0\,(a, b, \ldots b, a) = \frac{1}{x'}$. Le produit des racines est donc $-1 = -\frac{D_0}{D_1}$, d'où $D_0 = D_1$; quant à la somme des racines, elle est positive, ce qui exige que le terme moyen soit négatif.

Réciproquement, l'équation $D_1 x^2 - 2I_1 x - D_0 = 0$ conduira à une période symétrique pour $D_1 = D_0$; car elle satisfait aux conditions $D_1 - 2I_1 - D_0 < 0$, $D_1 + 2I_1 - D_0 > 0$, qui pour $D_0 = D_1$ se réduisent à $I_1 > 0$. Il faudra donc prendre pour première racine $x' = (a, b, \ldots f, g)$, et comme $-x'' = 0\,(g, f, \ldots b, a)$, et que d'ailleurs $x'x'' = -1$, d'où $x' = -\frac{1}{x''}$, il en résultera

$$(a, b, \ldots f, g) = (g, f, \ldots b, a),$$

d'où l'on tire nécessairement

$$a = g, \quad b = f \ldots g = a,$$

et par conséquent, $x' = (a, b, \ldots b, a)$.

3. Si une équation a pour racine $x' = (m, a, b, \ldots b, a)$, elle aura la forme $D_1 x^2 - 2I_1 x - D_0 = 0$ sous la relation $\frac{2I_1}{D_1} = m$, et les conditions $D_1 + 2I_1 - D_0 > 0$, $D_1 - 2I_1 - D_0 < 0$, qui résultent de la forme supposée à x'. En effet, $-x'' = 0\,(a, b, \ldots b, a, m)$, et comme l'on a $x' = (m, a, b, \ldots b, a) = m(a, b, \ldots b, a, m)$, il en résultera $x' + x'' = \frac{2I_1}{D_1} = m$.

Si au contraire on a $x' = (a, b, \ldots b, a, m)$, on en tirera $\frac{2I_1}{D_0} = m$. On fera $x = -\frac{1}{y}$, les deux valeurs de y seront $-o(a, b, \ldots b, a, m)$ et $(m, a, b, \ldots b, a)$, dont la somme est $m = \frac{2I_1}{D_0}$, en vertu de

$$D_0 y^2 - 2I_1 y - D_1 = 0.$$

Réciproquement, soit l'équation $D_1 x^2 - 2I_1 x - D_0 = 0$, si l'on a

$$D_1 - 2I_1 - D_0 < 0, \quad D_1 + 2I_1 - D_0 > 0, \quad \frac{2I_1}{D_1} = m,$$

la racine positive sera $x' = (m, a, b, \ldots b, a)$.

En effet, posons $x' = (a, b, \ldots f, g)$, on en déduira $-x'' = o(g, f, \ldots b, a)$, et comme $x' + x'' = \frac{2I_1}{D} = m$, il faudra avoir $a + \frac{1}{b + \ldots} - \left(\frac{1}{g + \ldots}\right) = m$, d'où suit nécessairement $a = m$ et $(b, f, \ldots f, g) = (g, f, \ldots b)$, ce qui donne $b = g$, $c = f$ et $x' = (m, b, c, \ldots c, b)$, ou bien encore,

$$x' = (m, a, b, \ldots b, a).$$

Si ensuite on change x en $-\frac{1}{y}$, on montrera absolument de même que pour $\frac{2I_1}{D_0} = m$, sous les mêmes conditions, on a les formules de l'énoncé.

4. Si l'on a $D_1 + 2I_1 - D_0 < 0$, on ne peut avoir $\frac{2I_1}{D_0}$ entier, sauf le cas $I_1 = 0$ qui sera traité plus bas. Mais si l'on pose $x = q_1 + \frac{1}{y}$, la transformée en y tombe dans le cas précédent et conduit de suite aux racines

$$x' = m + \overline{Q}(b, c, \ldots c, b, \overline{m + 2Q}), \quad -x'' = Q(b, c, \ldots c, b, m + 2Q),$$

(Proposition 2e; dév. 1°).

5. Si l'on a $D_1 - 2I_1 - D_0 > 0$, on peut bien avoir $\frac{2I_1}{D_0}$ entier, mais non $\frac{2I_1}{D_1}$ entier. Dans ce cas, en posant $x = -\frac{1}{y}$, on trouvera de suite les formules de l'énoncé.

Les réciproques de **4** et **5** se prouvent comme celle de **3**. Pour le cas

de $I_1 = 0$, les racines deviennent égales et de signes contraires. Il faut faire $m = 0$, d'où

$$x = \pm A(b, c, \ldots c, b, 2A), \quad x' = \pm (0, A, b, c, \ldots c, b, 2A),$$

selon que $\frac{D_0}{D_1}$ est $>$ ou $<$ 1.

Les cas $D_1 = 1$, $D_0 = 1$ donnent aussi deux racines ayant même période, puisque alors les quantités $\frac{2I_1}{D_0}$, $\frac{2I_1}{D_0}$ sont entières.

N. B. Ces cas particuliers $D_1 = D_0$, $\frac{2I_1}{D_1}$ entier et $\frac{2I_1}{D_0}$ entier, devant être distingués avec soin dans la résolution de l'équation indéterminée $D_1 x^2 - 2I_1 xy - D_0 y^2 = M$, nous avons cru devoir les exposer avec quelque détail.

Le cas de D_0 négatif se ramène, comme on l'a vu, à celui de D_0 positif, et ce qui a été dit dans l'énoncé suffit à cet égard.

V.

Proposition quatrième.

« Si l'on représente par $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots \alpha^{(n)}$, les numérateurs, et par » $\beta, \beta', \beta'', \ldots \beta^{(n)}$, les dénominateurs des fractions convergentes » vers la racine $x' = q_1, q_2, \ldots q_g(q_{g+1}, \ldots q_{g+n})$ de l'équation du » second degré et terminées respectivement aux quotients périodiques » $q_k, q_{k+n}, q_{k+2n}, \ldots$ dont le premier appartient à la première pé- » riode, les nombres $\alpha, \alpha', \ldots \beta, \beta', \ldots$ formeront deux séries récur- » rentes de même échelle, de sorte qu'on aura

$$\alpha^{(n)} = 2\Phi\alpha^{(n-1)} - \varepsilon\alpha^{(n-2)}, \quad \beta^{(n)} = 2\Phi\beta^{(n-1)} - \varepsilon\beta^{(n-2)}$$

» De plus, si $\frac{\gamma}{\delta}$, $\frac{\gamma'}{\delta'}$ représentent les fractions convergentes

$$\frac{g+1, \ldots g+n-1}{g+2, \ldots g+n-1}, \quad \frac{g+1, \ldots g+n}{g+2, \ldots g+n},$$

on aura $$2\Phi = \gamma' + \delta, \quad \varepsilon = (-1)^n,$$

» le nombre n étant celui des termes de la période. L'échelle de rela- » tion 2Φ, $-\varepsilon$ sera la même pour les deux racines, et quel que soit le » quotient initial q_k.

» Si l'on pose $(\Phi + \sqrt{\Phi^2 - \varepsilon})^m = \Phi + \Psi\sqrt{\Phi^2 - \varepsilon}$,

» on aura
$$\alpha^{(m)} = \alpha\Phi + (\alpha' - \Phi\alpha)\Psi,$$
$$\beta^{(m)} = \beta\Phi + (\beta' - \Phi\beta)\Psi.$$

» et si dans ces formules on change le signe de Ψ, on aura des frac-
» tions convergentes vers la seconde racine et terminées respectivement
» aux quotients périodiques $q_{k'}, q_{k'+n}, q_{k'+2n}, \ldots$ L'indice k' est $n - k$
» si l'on pose
$$x' = (q_1, q_2, \ldots q_k, \ldots q_n),$$
» d'où
$$-x'' = 0(q_n, q_{n-1}, \ldots q_1) = q_1 . q_2 . q_3, \ldots$$

» cet indice étant compté à partir du premier terme de x''; ce serait
» $k + 2$ si l'on gardait l'indice de la première racine.»

1. *Démonstration*. Si l'on représente par $\alpha_1, \alpha_1', \ldots$ les numérateurs, et par $\beta_1, \beta_1', \ldots$ les dénominateurs des fractions convergentes qui précèdent $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha'}{\beta'} \ldots$, on aura, en vertu de la formule

$$1, n = (1, g)(g + 1, n) + (1, g - 1)(g + 2, n) \quad (\textit{prélimin. 5}),$$

les équations

$$\left.\begin{aligned}
\alpha' &= \alpha\gamma' + \alpha_1\delta', \\
\alpha'' &= \alpha'\gamma' + \alpha_1\delta', \\
\alpha''' &= \alpha''\gamma' + \alpha_1\delta', \\
&\vdots \\
\alpha^{(m-1)} &= \alpha^{(m-2)}\gamma' + \alpha_1^{(m-2)}\delta', \\
\alpha^{(m)} &= \alpha^{(m-1)}\gamma' + \alpha_1^{(m-1)}\delta';
\end{aligned}\right\} \text{ et pareillement } \left\{\begin{aligned}
\alpha_1' &= \alpha\gamma + \alpha_1\delta, \\
\alpha_1'' &= \alpha'\gamma + \alpha_1'\delta, \\
\alpha_1''' &= \alpha''\gamma + \alpha_1''\delta, \\
&\vdots \\
\alpha_1^{(m-1)} &= \alpha^{(m-2)}\gamma + \alpha_1^{(m-2)}\delta, \\
\alpha_1^{(m)} &= \alpha_1^{(m-1)}\gamma + \alpha^{(m-1)}\delta;
\end{aligned}\right.$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}
\alpha^{(m)} &= \alpha^{(m-1)}\gamma' + [\alpha^{(m-2)}\gamma + \alpha_1^{(m-2)}\delta]\delta', \\
&= \alpha^{(m-1)}\gamma' + \alpha^{(m-2)}\gamma\delta' + \alpha_1^{(m-2)}\delta\delta', \\
&= \alpha^{(m-1)}\gamma' + \alpha^{(m-2)}\gamma\delta' + [\alpha^{(m-1)} - \alpha^{(m-2)}\gamma']\delta, \\
&= \alpha^{(m-1)}(\gamma' + \delta' - \delta\gamma' - \gamma\delta')\alpha^{(m-2)} = 2\Phi.\alpha^{(m-1)} - \varepsilon\alpha^{(m-2)}.
\end{aligned}$$

On obtient semblablement $\beta^{(m)} = 2\Phi.\beta^{(m-1)} - \varepsilon\beta^{(m-2)}$.

2. Puisque $2\Phi = \gamma' + \delta' = (k+1, k+n) + (k+2, k+n-1)$, quand on renversera la période et qu'on remplacera $q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots q_{k+n}$ par $q_{k+n}, q_{k+n-1}, \ldots q_{k+1}$, les médiateurs $(k+1, k+n)$ et $(k+2, k+n-1)$ ne changeront pas, de sorte que 2Φ ne changera pas, et il en est de même de $\varepsilon = (\delta\gamma' - \gamma\delta') = (-1)^n$ (*prélimin.* **7**). Or le renversement a lieu pour la période de la seconde racine; donc pour cette racine l'échelle de relation reste la même.

Si l'on fait commencer la période un terme plus loin et que $q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots q_{k+n}$ soit remplacé par

$$q_{k+2}, q_{k+3}, \ldots q_{k+n}, q_{k+n+1}, q_{k+n+1} = q_{k+1}.$$

alors $$2\Phi = (k+1, k+n) + (k+2, k+n-1)$$

deviendra $$2\Phi' = (k+2, k+n+1) + (k+3, k+n).$$

et comme on a (*prélimin.* **5**)

$$(k+1, k+n) = q_{k+1}(k+2, k+n) + (k+3, k+n),$$
$$(k+2, k+n+1) = q_{k+n+1}(k+2, k+n) + (k+2, k+n-1),$$

il en résultera, à cause de $q_{k+1} = q_{k+n+1}$,

$$(k+1, k+n) + (k+2, k+n-1) = (k+2, k+n+1) + (k+3, k+n),$$

ou $$2\Phi = 2\Phi';$$

c'est-à-dire que l'échelle de relation $2\Phi, -\varepsilon$ reste la même, quel que soit le quotient initial.

3. Soit $ax^m + by^m$ le terme général de la série récurrente dont l'échelle de relation est $2\Phi, -\varepsilon$, il faudra avoir

$$ax^m + by^m - 2\Phi(ax^{m-1} + by^{m-1}) + \varepsilon(ax^{m-2} + by^{m-2}) = 0.$$

ou $$ax^{m-2}(x^2 - 2\Phi x + \varepsilon) + by^{m-2}(y^2 - 2\Phi y + \varepsilon) = 0.$$

Il suffira donc de prendre pour x et y les deux racines de l'équation

$$z^2 - 2\Phi z + \varepsilon = 0,$$

ou $$x = \Phi + \sqrt{\Phi^2 - \varepsilon}, \quad y = \Phi - \sqrt{\Phi^2 - \varepsilon}.$$

ce qui donne pour terme général

$$a(\varphi + \sqrt{\varphi^2 - \varepsilon})^m + b(\varphi + \sqrt{\varphi^2 - \varepsilon})^m;$$

et si l'on pose $\quad (\varphi + \sqrt{\varphi^2 - \varepsilon})^m = \Phi + \Psi\sqrt{\varphi^2 - \varepsilon},$

on aura aussi $\quad (\varphi - \sqrt{\varphi^2 - \varepsilon})^m = \Phi - \Psi\sqrt{\varphi^2 - \varepsilon}.$

ce qui réduit le terme général à

$$(a + b)\Phi + (a - b)\Psi\sqrt{\varphi^2 - \varepsilon}.$$

On déterminera les constantes en faisant répondre les valeurs initiales α, α' à $m = 0$ et $m = 1$; on a ainsi

$$a + b = \alpha, \quad (a + b)\varphi + (a - b)\sqrt{\varphi^2 - \varepsilon} = \alpha',$$

ou bien $\quad a + b = \alpha; \quad (a - b)\sqrt{\varphi^2 - \varepsilon} = \alpha' - \varphi.\alpha.$

d'où les formules

$$\alpha^{(m)} = \alpha\Phi + (\alpha' - \varphi\alpha)\Psi, \quad \beta^{(m)} = \beta.\Phi + (\beta' - \varphi.\beta)\Psi.$$

sous la relation

$$(\varphi + \sqrt{\varphi^2 - \varepsilon})^m = \Phi + \Psi\sqrt{\varphi^2 - \varepsilon}.$$

4. Si l'on remarque que $2\Phi = x^m + y^m$ et $2\Psi\sqrt{\varphi^2 - \varepsilon} = x^m - y^m$ sont des suites récurrentes de même échelle 2φ, $-\varepsilon$, on en conclura qu'il en est de même des quantités

$$\alpha\Phi - (\alpha' - \varphi\alpha)\Psi, \quad \beta\Phi - (\beta' - \varphi\beta)\Psi.$$

où l'on ferait successivement $m = 1, 2, 3 \ldots$

Or si dans ces formules on fait successivement $m = 1$ et $m = 2$, on trouvera, comme on va le voir, deux convergentes vers la deuxième racine à période inverse; de sorte que le changement de signe de Ψ donnera les formules correspondantes à la seconde racine, puisque l'échelle étant la même, il suffit d'obtenir deux convergentes pour avoir toutes les autres.

Pour prouver l'assertion précédente, soit d'abord l'équation

$$D_1 x^2 - 2I_1 x - D_0 = 0$$

satisfaisant aux deux conditions

$$D_1 + 2I_1 - D_0 > 0, \quad D_1 - 2I_1 - D_0 < 0,$$

de sorte que les racines x' et x'' sont telles, que

$$x' = (q_1 \cdot q_2 \cdots q_n),$$

$$-x'' = 0(q_n, q_{n-1}) \cdots q_1) = q'_1 \cdot q'_2, q_3, \cdots q'_{n+1}).$$

Considérons, dans la première racine, les deux convergentes terminées respectivement aux quotients q_k, q_{k+n}, convergentes qui sont représentées par $\frac{(1, k)}{(2, k)}$, $\frac{(1, k+n)}{(2, k+n)}$. Dans la seconde racine, si nous calculons les convergentes terminées aux quotients q'_{n-k} et q'_{n-k+n} (ou bien q_{k+2}, q_{k+n+2}, si nous considérons les quotients de la première racine), la première convergente prise positivement est égale à

$$0, q_n \cdot q_{n-1}, \cdots q_{k+2} = 0 + \cfrac{1}{q_n + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cdots + \cfrac{1}{q_{k+2}}}} = \frac{1}{\frac{(n, k+2)}{(n-1, k+2)}} = \frac{(n-1, k+2)}{(n, k+2)}$$

en renversant l'ordre des quotients, ce qui est permis, cette première convergente deviendra $\frac{(k+2, n-1)}{(k+2, n)}$.

La seconde convergente prise positivement, qui n'est autre que

$$0, q_n \cdot q_{n-1} \cdots q_{k+2}, q_{k+1}, \cdots q_1 \mid q_n, q_{n-1}, \cdots q_{k+2}.$$

sera donc égale à

$$\frac{(1, n-1)(k+2, n) + (2, n-1)(k+2, n-1)}{(1, n)(k+2, n) + (2, n)(k+2, n-1)}.$$

les médiateurs $(1, n)$, $(2, n)$, $(k+2, n)$, etc., étant toujours tirés de la première racine $(q_1, q_2, \cdots q_n)$ en vertu de ce qu'il est permis de renverser l'ordre des quotients.

Cela posé, pour $m = 1$, la quantité $\alpha\Phi - (\alpha' - \Phi\alpha)\Psi$ devient, à

cause de $\Phi = \varphi$, $\Psi = 1$, égale à $2\varphi\alpha - \alpha'$, ou bien

$$2\varphi\alpha - \alpha' = [(1, n) + (2, n-1)](1, k) - (1, k+n$$
$$= [(1,n)+(2,n-1)](1,k) - [(1,n)(n+1, k+n)+(1, n-1)(n+2,k+n)];$$

mais $\quad (n+1, n+k) = (1, k), \quad (n+2, k+n) = (2, k);$

d'où

$$2\varphi\alpha - \alpha' = (1,k)(2,n-1) - (2, k)(1, n-1) = -(1)^k(k+2, n-1)$$

(prélimin. **7**). On trouve précisément de même

$$2\varphi\beta - \beta = -(-1)^k(k+2, n),$$

de sorte que la première convergente se réduit à $-\frac{(k+2, n-1)}{(k+2, n)}$, comme on l'a vu plus haut.

Ensuite pour $m = 2$, la quantité $\alpha\varphi - (\alpha' - \varphi\alpha)\Psi$ devient, à cause de $\Phi = 2\varphi^2 - \varepsilon$, $\Psi = 2\varphi$, égale à

$$\alpha(2\varphi^2 - \varepsilon) - (\alpha' - \varphi\alpha)2\varphi = 2\varphi(2\alpha\varphi - \alpha') - \varepsilon.\alpha$$
$$= [(1, n) + (2, n-1)](k+2, n-1)(-1)^k - (1, k)(-1)^n.$$

Or, en divisant par $(-1)^k$ et remarquant que

$$(1, n)(k+2, n-1) - (1, n-1)(k+2, n) = (-1)^{n-k}(1, k),$$

(comme on le voit en remplaçant g, h, k, par $k+2$, $n-1$, n, dans la formule générale de l'article **7**, prop. prélim.), il en résultera

$$(1, n-1)(k+2, n) + (2, n-1)(k+2, n-1),$$

numérateur de la seconde convergente. Le dénominateur se trouve de la même manière.

Ainsi, pour ce premier cas, les formules

$$\alpha^{(m)} = \alpha\Phi - (\alpha' - \varphi\alpha)\Psi,$$
$$\beta^{(m)} = \beta\Phi - (\beta' - \varphi\beta)\Psi,$$
$$(\varphi + \sqrt{\varphi^2 - \varepsilon})^m = \Phi + \Psi\sqrt{\varphi^2 - \varepsilon},$$

donnent les convergentes vers la seconde racine.

Pour toute équation du second degré, on trouvera une transformée

$$D_{g+1}\, x_{g+1}^2 - 2I_{g+1}\, x_{g+1} - D_g = 0,$$

tombant dans le cas précédent, c'est-à-dire que les convergentes vers x_{g+1} seront données par la double formule

$$\frac{A\Phi \pm B\Psi}{C\Phi \pm D\Psi},$$

et comme on a

$$x = \frac{(1, g)\, x_{g+1} + (1, g-1)}{(2, g)\, x_{g+1} + (2, g-1)},$$

en remplaçant x_{g+1} par $\dfrac{A\Phi \pm B\Psi}{C\Phi \pm D\Psi}$,

on trouvera un résultat de même forme pour exprimer les convergentes vers les deux valeurs de x. Seulement, pour la seconde racine, en raison des termes négatifs qu'il faudra faire disparaître, les premières valeurs pourront bien n'être pas comprises parmi les fractions convergentes.

Note sur la réduction des formes.

Si dans l'expression $ax^2 + 2bxy + cy^2$, que M. Gauss nomme *forme binaire du second degré,* et qu'il représente par le symbole (a, b, c), on pose $x = \alpha x' + \beta y'$, $y = \gamma x' + \delta y'$, on trouvera une nouvelle forme $a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2$, les nombres a', b', c', entiers aussi bien que a, b, c et α, β, γ, δ, étant donnés par les équations

$$a' = a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2, \quad b' = a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma\delta,$$
$$c' = a\beta^2 + 2b\beta\delta + c\delta^2,$$

qui entraînent celle-ci :

$$b'^2 - a'c' = (b^2 - ac)(\alpha\delta - \beta\gamma)^2.$$

On dit, en général, que la forme (a, b, c) contient la forme (a', b', c'), proprement si $\alpha\delta - \beta\gamma$ est un entier positif et improprement si $\alpha\delta - \beta\gamma$ est un entier négatif. Si $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, on dit que les formes (a, b, c), (a', b', c') sont proprement équivalentes, mais si

$\alpha\delta - \beta\gamma = -1$, on dit qu'elles sont improprement équivalentes. Une condition de l'équivalence des formes (a, b, c), (a', b', c'), c'est donc l'égalité des nombres $b^2 - ac$, $b'^2 - a'c'$, c'est-à-dire des déterminants de ces mêmes formes.

Réduire une forme (a, b, c) c'est en trouver une autre qui lui soit proprement équivalente : (a', b', c') par exemple, et qui soit telle, que les coefficients a', b', c' tombent entre certaines limites dépendantes du déterminant $b^2 - ac = \mathrm{D}$. Lagrange et Legendre n'ont point distingué dans la réduction des formes, l'équivalence propre de l'équivalence impropre. Il est cependant très avantageux de le faire comme on le voit dans les *Recherches arithmétiques* de M. Gauss. On peut même dire que cette distinction est indispensable pour certaines recherches. Les règles exposées dans l'ouvrage de M. Gauss, pour les formes de déterminant négatif n° 171, et pour celles de déterminant positif non carré, n° 183, n'en font réellement qu'une seule. Comme la réduction des formes compose la plus grande partie du calcul nécessaire pour la résolution des équations du second degré, j'ai pensé qu'il était bon de présenter ici un algorithme pour opérer promptement ces réductions.

Soit la forme $ax^2 + 2bxy + a'y^2$ de déterminant $b^2 - aa' = \mathrm{D}$.

Pour D positif non carré, on représentera par m l'entier immédiatement au-dessous de $\sqrt{\mathrm{D}}$, et l'on fera la suite de divisions marquées au tableau suivant, en ayant soin que les restes r', r'', r''',... toujours moindres que les diviseurs a', a'', a''',... soient tous positifs.

Pour D négatif, le calcul est presque semblable, seulement il faut faire $m = 0$, et prendre les restes r', r'', r''',... toujours moindres que la moitié des diviseurs a', a'', a''',... ou au plus égaux à la moitié de ces diviseurs. Ainsi ces restes sont tantôt positifs et tantôt négatifs.

Dividendes	Diviseurs	Quotients.	Restes.	Diff. des restes
	a,		$r = m - b$,	
$m + b = \Delta'$,	a',	h',	$r' = m - b'$,	$r' - r = d'$,
$m + b' = \Delta' - d' = \Delta''$,	$a'' = a - h'd'$,	h'',	$r'' = m - b''$,	$r'' - r' = d''$,
$m + b'' = \Delta'' - d'' = \Delta'''$,	$a''' = a'' - h''d''$,	h''',	$r''' = m - b'''$,	$r''' - r'' = d'''$,
$m + b''' = \Delta''' - d''' = \Delta^{\text{iv}}$,	$a^{\text{iv}} = a''' - h'''d'''$,	h^{iv},	$r^{\text{iv}} = m - b^{\text{iv}}$,	$r^{\text{iv}} - r''' = d^{\text{iv}}$,
.....	.....	.....	.....	.....

Les formes (a, b, a'), (a', b', a''), (a'', b'', a'''), $(a''', b''', a^{\text{iv}})$,... données

par ce calcul, sont toutes proprement équivalentes. On prend pour forme réduite la première forme $[a^{(n)}, b^{(n)}, a^{(n+1)}]$, où le coefficient extrême $a^{(n+1)}$ n'est pas moindre que le premier coefficient a^{n}, ces coefficients étant pris absolument.

Pour le déterminant négatif une réduite (A, B, C) est telle, que 2B est moindre que A et que C, et que A $<$ ou $=$ C est $< 2\sqrt{\frac{-D}{3}}$. On considère seulement les valeurs absolues.

Pour le déterminant positif B est toujours $<\sqrt{D}$, et A pris positivement entre $\sqrt{D}+B$ et $\sqrt{D}-B$. On peut rejeter la condition $A<C$. Le calcul donne plusieurs réduites.

Pour plus de détails et les démonstrations, voyez les *Recherches arithmétiques de* M. Gauss aux endroits cités.

SUR QUELQUES FORMULES

POUR LE CHANGEMENT DE LA VARIABLE INDÉPENDANTE;

PAR J. LIOUVILLE.

Dans mon Mémoire sur le changement de la variable indépendante[*], j'ai donné des formules générales à l'aide desquelles, p désignant un entier positif, on peut transformer la différentielle à indice u d'une fonction quelconque prise par rapport à la variable indépendante $\sqrt{x}$, en d'autres différentielles relatives à la variable indépendante x. Ainsi que je l'ai fait observer, ces formules peuvent être utiles, même dans le calcul différentiel ordinaire où les indices de différentiation sont des nombres entiers. En voici un exemple simple :

En différentiant plusieurs fois de suite, par rapport à z, les deux membres de l'équation

$$\int_0^\infty e^{-u^2} \cos 2zu\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-z^2},$$

on trouve

$$2^{2n+1} \cdot \int_0^\infty e^{-u^2} . u^{2n} \cos 2zu\, du = (-1)^n . \sqrt{\pi} \cdot \frac{d^{2n} e^{-z^2}}{dz^{2n}},$$

$$2^{2n+2} \cdot \int_0^\infty e^{-u^2} . u^{2n+1} \sin 2zu\, du = (-1)^{n+1} . \sqrt{\pi} \cdot \frac{d^{2n+1} e^{-z^2}}{dz^{2n+1}}.$$

Mais il reste à effectuer d'une manière générale, c'est-à-dire quel que soit l'entier n, les différentiations indiquées dans les seconds membres : c'est ce que nos formules permettent de faire.

Posons $z = \sqrt{x}$, $z^2 = x$, et rappelons-nous que

$$\frac{d^u v}{dz^u} = 2^u \frac{d^{\frac{u-1}{2}} \left(x^{\frac{u}{2}} \frac{d^{\frac{u-1}{2}} v}{dx^{\frac{u}{2}}} \right)}{dx^{\frac{u}{2}}}.$$

[*] *Journal de l'École Polytechnique*, XXIVme cahier.

formule qui se déduit de la formule (A_1) du n° VI du Mémoire cité en remplaçant l'intégrale à indice $\frac{1-\mu}{2}$ qui se trouve dans cette derniere par une différentielle à indice $\frac{\mu-1}{2}$. Maintenant soit $\mu = 2n+1$, $y = e^{-z^2} = e^{-x}$; il nous viendra

$$\frac{d^{2n+1}.e^{-z^2}}{dz^{2n+1}} = 2^{2n+1}.\frac{d^n\left(x^{\frac{\mu}{2}}.d^{n+1}e^{-x}\right)}{dx^{2n+1}};$$

d'où

$$\frac{d^{2n+1}.e^{-z^2}}{dz^{2n+1}} = (-1)^{n+1}.2^{2n+1}.\frac{d^n\left(x^{\frac{\mu}{2}}e^{-x}\right)}{dx^n}.$$

Il ne reste donc plus à effectuer que la différentielle $n^{ième}$ du produit $x^{\frac{\mu}{2}}e^{-x}$; or on a en général

$$\frac{d^n.PQ}{dx^n} = P\frac{d^nQ}{dx^n} + \frac{n}{1}\frac{dP}{dx}.\frac{d^{n-1}Q}{dx^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1.2}.\frac{d^2P}{dx^2}.\frac{d^{n-2}Q}{dx^{n-2}} + \ldots$$

formule qui se termine toujours lorsque n est un entier positif, et qui s'applique immédiatement au cas actuel en prenant $P = x^{\frac{\mu}{2}}$, $Q = e^{-x}$.

On trouvera avec une égale facilité la valeur de $\frac{d^{2n}.e^{-z^2}}{dz^{2n}}$; mais alors il faudra partir de la formule

$$\frac{d^\mu y}{dz^\mu} = 2^\mu.\sqrt{x}.\frac{d^{\frac{\mu}{2}}\left(x^{\frac{\mu-1}{2}}.d^{\frac{\mu}{2}}y\right)}{dx^{\frac{\mu}{2}}},$$

et faire $\mu = 2n$, ce qui n'introduira dans le second membre aucune différentielle à indice fractionnaire [*].

---

[*] Au surplus une simple différentiation suffirait pour passer de la valeur de d^{2n} à celle de d^{2n+1} ou de la valeur de d^{2n-1} à celle de d^{2n}. Ajoutons qu'il serait aisé d'arriver par d'autres moyens aux conséquences que fournit notre analyse : par exemple on pourrait observer que la recherche des différentielles successives de e^{-z^2} dépend du développement de $e^{-(z+h)^2} = e^{-z^2}.e^{-2zh}.e^{-h^2}$ suivant les puissances de h; mais la méthode précédente méritait aussi d'être indiquée.

MÉMOIRE

SUR LES COORDONNÉES CURVILIGNES;

PAR G. LAMÉ.

Dans un travail publié par le *Journal de l'École Polytechnique*, j'ai présenté les formules générales qui peuvent servir à transformer des équations aux différences partielles, en coordonnées curvilignes; mais comme le but que je me proposais alors était purement analytique, j'avais négligé d'interpréter géométriquement ces diverses formules. Cette interprétation complète est le sujet principal de ce nouveau Mémoire. Je vais essayer d'en donner ici le résumé succinct.

Une fonction de trois coordonnées linéaires, égalée à une constante, représente une infinité de surfaces de la même famille, qui ne diffèrent les unes des autres que par la valeur numérique de la constante, qu'on peut désigner sous le nom de *paramètre*. J'appelle *surfaces conjuguées orthogonales*, trois systèmes de surfaces semblables coexistant dans l'espace, et ayant entre eux cette relation de position, qu'une surface d'un des systèmes coupe à angle droit toutes les surfaces appartenant aux deux autres. L'ensemble de ces surfaces offre un genre particulier de coordonnées, car un point sera déterminé dans l'espace, si l'on connaît les trois surfaces conjuguées qui se coupent en ce point, ou les valeurs numériques des trois paramètres qui particularisent ces surfaces.

Le nombre de ces coordonnées curvilignes est sans doute illimité; mais la condition d'être orthogonales établit des relations constantes entre les éléments des surfaces conjuguées, dont la connaissance est nécessaire pour transformer et simplifier les formules analytiques exprimées dans chaque genre de coordonnées. Parmi ces relations, il en est une qui indique que les intersections des surfaces conjuguées ne sont autres que leurs lignes de courbure. Cette propriété remarquable a été démontrée pour la première fois sur les surfaces orthogonales du

second degré par M. Binet, et ensuite d'une manière générale par M. Ch. Dupin. Quant aux autres relations, les seules qui puissent servir à la transformation des coordonnées, elles expriment les lois que suivent les courbures des surfaces conjuguées.

La courbure d'une ligne ou d'une surface en un point et dans un plan déterminé, étant totalement définie par la fraction dont le numérateur est l'unité et dont le dénominateur est le rayon du cercle osculateur, on peut appeler cette fraction *coefficient de courbure*, ou simplement *courbure*. D'après cela, à chaque point de l'espace, découpé par un système de surfaces orthogonales, correspondent six courbures, en général différentes, appartenant deux à deux aux trois surfaces conjuguées qui se coupent en ce point. Les trois lignes d'intersection de ces surfaces forment en quelque sorte trois axes courbes dont le point considéré est l'origine.

Chacune des surfaces coordonnées a pour ligne de courbure les deux axes qu'elle contient, et les centres de ses deux courbures sont situés sur la tangente au troisième axe. D'un autre côté, chaque axe étant une ligne de courbure pour chacune des deux surfaces coordonnées dont il est l'intersection, cet axe doit être considéré comme offrant deux courbures différentes mesurées dans les plans tangents à ces surfaces. Les six courbures réunies des trois axes sont d'ailleurs les mêmes que celles des surfaces coordonnées.

Les variations que les six courbures éprouvent lorsqu'on passe d'un point à un autre sur les axes courbes, sont soumises à des lois très simples. Pour les énoncer, quelques définitions sont nécessaires. J'emploie l'expression de *courbures conjuguées en axe ou en surface*, pour désigner les deux courbures d'un même axe ou d'une même surface coordonnée. J'appelle *plan d'une courbure*, celui de son cercle osculateur. Enfin je donne simplement le nom de *variation* d'une quantité, *suivant une certaine ligne*, à la limite du rapport de l'accroissement de cette quantité à l'arc parcouru sur la ligne.

D'après ces conventions, les lois qui régissent les six courbures expriment d'une part que *la variation d'une courbure, suivant l'axe normal à son plan, est égal au produit de sa conjuguée en axe, par son excès sur sa conjuguée en surface*, et d'autre part, que *le produit des deux courbures d'une même surface, augmenté de la somme des carrés*

de leurs conjuguées en axe est égale à la somme des variations de ces deux dernières courbures, suivant leurs arcs réciproques. Ces lois principales conduisent à d'autres lois secondaires.

La classe des surfaces isothermes méritait d'être étudiée particulièrement. Lorsque les trois systèmes conjugués appartiennent à cette classe, *les six rayons de courbure, en chaque point de l'espace, ont des grandeurs telles, que le produit de trois d'entre eux, pris dans un certain ordre, est égal au produit des trois autres.* Cette loi, que j'avais trouvée pour les surfaces isothermes du second degré fait donc partie de la définition géométrique de tous les systèmes de surfaces orthogonales isothermes.

Ce Mémoire se compose de quatre parties. La première reproduit toutes les formules de transformation citées dans mon ancien travail, et un grand nombre d'autres dont j'ai reconnu l'utilité; elles sont ici groupées suivant un ordre méthodique, et de manière à en faciliter l'emploi. La seconde partie contient l'interprétation géométrique de ces formules, ou la démonstration des théorèmes qui viennent d'être énoncés. La troisième partie considère plusieurs systèmes particuliers de surfaces orthogonales, tant dans le but de vérifier les formules et les propriétés générales, qu'afin de donner une idée exacte du grand nombre de coordonnées entre lesquelles on peut choisir, pour atteindre un but spécial. Enfin la quatrième partie, qui formera un Mémoire séparé, transforme en coordonnées curvilignes les équations de l'équilibre d'élasticité des corps solides homogènes; cette application était nécessaire pour indiquer complétement l'usage des formules établies.

PREMIÈRE PARTIE.

Formules de transformation.

§ I.

Lorsqu'un système de surfaces est donné par l'équation générale $\mu = f(x, y, z)$, le paramètre μ a, pour chaque surface individuelle, une valeur numérique indépendante des axes rectangulaires auxquels la

surface est rapportée. En outre, les expressions

$$\sqrt{\left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2}, \quad \left(\frac{d^2\rho}{dx^2} + \frac{d^2\rho}{dy^2} + \frac{d^2\rho}{dz^2}\right),$$

composées des coefficients différentiels du premier et du second ordre de la fonction ρ, conservent les mêmes valeurs numériques pour chaque point d'une des surfaces proposées, quels que soient les axes coordonnés. J'appellerai ces expressions les paramètres différentiels du premier et du second ordre de la surface ou de la fonction ρ; je désignerai le second par le symbole $\Delta_2\rho$, et le premier, à cause de sa fréquence dans les calculs qui vont suivre, par la simple lettre h; ainsi l'on aura

$$\sqrt{\left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2} = h, \qquad \frac{d^2\rho}{dx^2} + \frac{d^2\rho}{dy^2} + \frac{d^2\rho}{dz^2} = \Delta_2\rho.$$

Par exemple, si les surfaces proposées formaient un système de surfaces isothermes, la fonction ρ devrait vérifier une équation de la forme

$$\left(\frac{d^2\rho}{dx^2} + \frac{d^2\rho}{dy^2} + \frac{d^2\rho}{dz^2}\right) - \left[\left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2\right] f(\rho) = 0,$$

qui, d'après la notation introduite, pourra s'écrire ainsi :

$$\Delta_2\rho - h^2 . f(\rho), \qquad \text{ou} \qquad \frac{\Delta_2\rho}{h^2} = f(\rho).$$

Ainsi l'on pourra dire que pour les surfaces isothermes, le rapport du paramètre différentiel du second ordre, au carré du paramètre différentiel du premier, est constant sur chacune de ces surfaces.

§ II.

Il importe de remarquer qu'une même famille de surfaces pourrait être représentée par une infinité d'équations différentes, entre les mêmes coordonnées x, y, z. Car si le paramètre ρ est constant sur chaque surface individuelle, une fonction quelconque de ce paramètre le sera pareillement; et si l'on pose $\varepsilon = F(\rho) = F[f(x, y, z)]$, cette nouvelle

équation, au paramètre ε, représente les mêmes surfaces, quelle que soit la forme de la fonction F.

Lorsqu'on change ainsi de paramètre intégral pour définir la même famille de surfaces, les valeurs numériques des deux paramètres différentiels éprouvent aussi pour chaque point des modifications correspondantes. Mais il existe entre leurs rapports et ceux de leurs différentielles, des relations constantes qui, comme le principe de l'homogénéité, servent de guide dans les calculs.

En effet, si l'on désigne par η et $\Delta_2\varepsilon$ les deux nouveaux paramètres différentiels et les deux fonctions $\frac{dF}{d\rho}$ et $\frac{d^2F}{d\rho^2}$ par F′ et F″, on aura successivement

$$\varepsilon = F, \qquad d\varepsilon = F'.d\rho, \qquad \eta = F'.h;$$

$$\frac{d\eta}{d\rho} = F'.\frac{dh}{d\rho} + F''.h, \quad \Delta_2\varepsilon = F'\Delta_2\rho + F''.h^2;$$

d'où il est aisé de conclure, par l'élimination de F′ et F″,

$$\frac{d\varepsilon}{\eta} = \frac{d\rho}{h}, \qquad \frac{d\eta}{d\varepsilon} - \frac{\Delta_2\varepsilon}{\eta} = \frac{dh}{d\rho} - \frac{\Delta_2\rho}{h}$$

D'ailleurs, on verra ci-après que le rapport $\frac{d\rho}{h}$ est la distance normale de deux surfaces consécutives, et plus loin, que la différence $\left(\frac{dh}{d\rho} - \frac{\Delta_2\rho}{h}\right)$ est égale à la somme des deux courbures de la surface individuelle qui passe au point que l'on considère; ces deux expressions doivent donc conserver les mêmes formes et les mêmes valeurs numériques, en chaque point de l'espace, dans tous les changements qu'on peut faire subir au paramètre intégral, pour désigner la même famille de surfaces; et les deux relations précédentes ne font qu'exprimer cette constance de forme et de valeur.

Il suit de l'équation $\frac{d\varepsilon}{\eta} = \frac{d\rho}{h}$, que si dans une fonction φ de ρ et d'autres variables on passe du paramètre ρ à celui ε, on aura $\eta\frac{d\varphi}{d\varepsilon} = h\frac{d\varphi}{d\rho}$. Il faut aussi remarquer que dans l'équation $\eta = F'.h$, les fonctions η et h peuvent varier d'un point à l'autre sur la même surface, tandis que F′ ρ

reste constant; ainsi, dans ce genre de variation on aura $\delta\eta = F'.\delta h$; d'où l'on conclut, par l'élimination de F', $\frac{\delta\eta}{\eta} = \frac{\delta h}{h}$.

A l'aide de ces diverses conséquences, on pourra facilement vérifier l'homogénéité de toutes les formules établies dans cette première partie, ces formules devant nécessairement conserver les mêmes formes, lorsqu'on change les paramètres des surfaces coordonnées.

§ III.

Trois systèmes de surfaces représentées par les équations

$$(1)\qquad f(x, y, z) = 0, \quad f_1(x, y, z) = \rho_1, \quad f_2(x, y, z) = \rho_2,$$

partagent l'espace en une infinité de parallélépipèdes rectangles infiniment petits, il s'agit de trouver les relations qui doivent exister entre leurs paramètres.

On a d'abord entre leurs coefficients différentiels du premier ordre les trois équations suivantes, qui expriment que ces surfaces se coupent orthogonalement :

$$(2)\qquad \begin{cases} \frac{d\rho}{dx}\frac{d\rho_1}{dx} + \frac{d\rho}{dy}\frac{d\rho_1}{dy} + \frac{d\rho}{dz}\frac{d\rho_1}{dz} = 0, \\ \frac{d\rho_1}{dx}\frac{d\rho_2}{dx} + \frac{d\rho_1}{dy}\frac{d\rho_2}{dy} + \frac{d\rho_1}{dz}\frac{d\rho_2}{dz} = 0, \\ \frac{d\rho_2}{dx}\frac{d\rho}{dx} + \frac{d\rho_2}{dy}\frac{d\rho}{dy} + \frac{d\rho_2}{dz}\frac{d\rho}{dz} = 0. \end{cases}$$

D'où il suit que si l'on représente par h, h_1, h_2, leurs paramètres différentiels du premier ordre, ou si l'on pose

$$(2\ bis)\qquad \begin{cases} \left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2 = h^2, \\ \left(\frac{d\rho_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\rho_1}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\rho_1}{dz}\right)^2 = h_1^2, \\ \left(\frac{d\rho_2}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\rho_2}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\rho_2}{dz}\right)^2 = h_2^2, \end{cases}$$

on aura pareillement les six équations transformées :

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{h^2}\left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2 + \frac{1}{h_1^2}\left(\frac{d\rho_1}{dx}\right)^2 + \frac{1}{h_2^2}\left(\frac{d\rho_2}{dx}\right)^2 = 1,\\
&\frac{1}{h^2}\left(\frac{d\rho}{dy}\right)^2 + \frac{1}{h_1^2}\left(\frac{d\rho_1}{dy}\right)^2 + \frac{1}{h_2^2}\left(\frac{d\rho_2}{dy}\right)^2 = 1,\\
&\frac{1}{h^2}\left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2 + \frac{1}{h_1^2}\left(\frac{d\rho_1}{dz}\right)^2 + \frac{1}{h_2^2}\left(\frac{d\rho_2}{dz}\right)^2 = 1,\\
&\frac{1}{h^2}\frac{d\rho}{dz}\frac{d\rho}{dy} + \frac{1}{h_1^2}\frac{d\rho_1}{dz}\frac{d\rho_1}{dy} + \frac{1}{h_2^2}\frac{d\rho_2}{dz}\frac{d\rho_2}{dy} = 0,\\
&\frac{1}{h^2}\frac{d\rho}{dx}\frac{d\rho}{dz} + \frac{1}{h_1^2}\frac{d\rho_1}{dx}\frac{d\rho_1}{dz} + \frac{1}{h_2^2}\frac{d\rho_2}{dx}\frac{d\rho_2}{dz} = 0,\\
&\frac{1}{h^2}\frac{d\rho}{dy}\frac{d\rho}{dx} + \frac{1}{h_1^2}\frac{d\rho_1}{dy}\frac{d\rho_1}{dx} + \frac{1}{h_2^2}\frac{d\rho_2}{dy}\frac{d\rho_2}{dx} = 0;
\end{aligned}
\right.
$$

et les neuf équations suivantes :

$$
(4)\quad \left\{
\begin{aligned}
&1^{re}\text{ case}\left\{
\begin{aligned}
\frac{d\rho}{dx} &= \frac{h}{h_1 h_2}\left(\frac{d\rho_1}{dz}\frac{d\rho_2}{dy} - \frac{d\rho_1}{dy}\frac{d\rho_2}{dz}\right),\\
\frac{d\rho}{dy} &= \frac{h}{h_1 h_2}\left(\frac{d\rho_1}{dx}\frac{d\rho_2}{dz} - \frac{d\rho_1}{dz}\frac{d\rho_2}{dx}\right),\\
\frac{d\rho}{dz} &= \frac{h}{h_1 h_2}\left(\frac{d\rho_1}{dy}\frac{d\rho_2}{dx} - \frac{d\rho_1}{dx}\frac{d\rho_2}{dy}\right);
\end{aligned}\right.\\
&2^{e}\text{ case}\left\{
\begin{aligned}
\frac{d\rho_1}{dx} &= \frac{h_1}{h_2 h}\left(\frac{d\rho_2}{dz}\frac{d\rho}{dy} - \frac{d\rho_2}{dy}\frac{d\rho}{dz}\right),\\
\frac{d\rho_1}{dy} &= \frac{h_1}{h_2 h}\left(\frac{d\rho_2}{dx}\frac{d\rho}{dz} - \frac{d\rho_2}{dz}\frac{d\rho}{dx}\right),\\
\frac{d\rho_1}{dz} &= \frac{h_1}{h_2 h}\left(\frac{d\rho_2}{dy}\frac{d\rho}{dx} - \frac{d\rho_2}{dx}\frac{d\rho}{dy}\right);
\end{aligned}\right.\\
&3^{e}\text{ case}\left\{
\begin{aligned}
\frac{d\rho_2}{dx} &= \frac{h_2}{h h_1}\left(\frac{d\rho}{dz}\frac{d\rho_1}{dy} - \frac{d\rho}{dy}\frac{d\rho_1}{dz}\right),\\
\frac{d\rho_2}{dy} &= \frac{h_2}{h h_1}\left(\frac{d\rho}{dx}\frac{d\rho_1}{dz} - \frac{d\rho}{dz}\frac{d\rho_1}{dx}\right),\\
\frac{d\rho_2}{dz} &= \frac{h_2}{h h_1}\left(\frac{d\rho}{dy}\frac{d\rho_1}{dx} - \frac{d\rho}{dx}\frac{d\rho_1}{dy}\right).
\end{aligned}\right.
\end{aligned}
\right.
$$

§ IV.

Si l'on déduisait des équations (1) les valeurs de x, y, z, en fonction

de ρ, ρ_1, ρ_2, et qu'on les substituât dans

$$h,\ h_1,\ h_2;\quad \frac{d\rho}{dx},\ \frac{d\rho}{dy},\ \frac{d\rho}{dz};\quad \frac{d\rho_1}{dx},\ \frac{d\rho_1}{dy},\ \frac{d\rho_1}{dz};\quad \frac{d\rho_2}{dx},\ \frac{d\rho_2}{dy},\ \frac{d\rho_2}{dz};$$

on n'aurait plus à considérer que des fonctions de ρ, ρ_1, ρ_2. Si donc on désigne par ds, ds_1, ds_2, les premiers éléments des normales aux surfaces ρ, ρ_1, ρ_2, sur lesquels un seul des trois paramètres varie, on aura évidemment

$$\frac{dx}{d\rho}\,d\rho = \frac{1}{h}\frac{d\rho}{dx}\,ds,\quad \frac{dy}{d\rho}\,d\rho = \frac{1}{h}\frac{d\rho}{dy}\,ds,\quad \frac{dz}{d\rho}\,d\rho = \frac{1}{h}\frac{d\rho}{dz}\,ds;$$

d'où, multipliant respectivement ces équations par dx, dy, dz, les ajoutant, observant que $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$, et que

$$\frac{d\rho}{dx}\,dx + \frac{d\rho}{dy}\,dy + \frac{d\rho}{dz}\,dz = d\rho,$$

on conclut $ds = \frac{d\rho}{h}$. On démontre de même que $ds_1 = \frac{d\rho_1}{h_1}$, $ds_2 = \frac{d\rho_2}{h_2}$; par suite, les équations précédentes se simplifient, et l'on a le groupe suivant :

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\rho}{dx} = h^2\frac{dx}{d\rho},\quad \frac{d\rho}{dy} = h^2\frac{dy}{d\rho},\quad \frac{d\rho}{dz} = h^2\frac{dz}{d\rho},\\ &\frac{d\rho_1}{dx} = h_1^2\frac{dx}{d\rho_1},\quad \frac{d\rho_1}{dy} = h_1^2\frac{dy}{d\rho_1},\quad \frac{d\rho_1}{dz} = h_1^2\frac{dz}{d\rho_1},\\ &\frac{d\rho_2}{dx} = h_2^2\frac{dx}{d\rho_2},\quad \frac{d\rho_2}{dy} = h_2^2\frac{dy}{d\rho_2},\quad \frac{d\rho_2}{dz} = h_2^2\frac{dz}{d\rho_2}, \end{aligned}\right.$$

ou celui-ci

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dx}{d\rho} = \frac{1}{h^2}\frac{d\rho}{dx},\quad \frac{dx}{d\rho_1} = \frac{1}{h_1^2}\frac{d\rho_1}{dx},\quad \frac{dx}{d\rho_2} = \frac{1}{h_2^2}\frac{d\rho_2}{dx},\\ &\frac{dy}{d\rho} = \frac{1}{h^2}\frac{d\rho}{dy},\quad \frac{dy}{d\rho_1} = \frac{1}{h_1^2}\frac{d\rho_1}{dy},\quad \frac{d\rho_2}{dy} = \frac{1}{h_2^2}\frac{d\rho_2}{dy},\\ &\frac{dz}{d\rho} = \frac{1}{h^2}\frac{d\rho}{dz},\quad \frac{dz}{d\rho_1} = \frac{1}{h_1^2}\frac{d\rho_1}{dz},\quad \frac{dz}{d\rho_2} = \frac{1}{h_2^2}\frac{d\rho_2}{dz}; \end{aligned}\right.$$

qui donne, par la différentiation, les formules

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{d\dfrac{1}{h^2}\dfrac{d\rho}{dx}}{d\rho_1} = \dfrac{d\dfrac{1}{h_1^2}\dfrac{d\rho_1}{dx}}{d\rho}, & \dfrac{d\dfrac{1}{h^2}\dfrac{d\rho}{dy}}{d\rho_1} = \dfrac{d\dfrac{1}{h_1^2}\dfrac{d\rho_1}{dy}}{d\rho}, & \dfrac{d\dfrac{1}{h^2}\dfrac{d\rho}{dz}}{d\rho_1} = \dfrac{d\dfrac{1}{h_1^2}\dfrac{d\rho_1}{dz}}{d\rho}; \\ \dfrac{d\dfrac{1}{h_2^2}\dfrac{d\rho_2}{dx}}{d\rho} = \dfrac{d\dfrac{1}{h^2}\dfrac{d\rho}{dx}}{d\rho_2}, & \dfrac{d\dfrac{1}{h_2^2}\dfrac{d\rho_2}{dy}}{d\rho} = \dfrac{d\dfrac{1}{h^2}\dfrac{d\rho}{dy}}{d\rho_2}, & \dfrac{d\dfrac{1}{h_2^2}\dfrac{d\rho_2}{dz}}{d\rho} = \dfrac{d\dfrac{1}{h^2}\dfrac{d\rho}{dz}}{d\rho_2}; \\ \dfrac{d\dfrac{1}{h_1^2}\dfrac{d\rho_1}{dx}}{d\rho_2} = \dfrac{d\dfrac{1}{h_2^2}\dfrac{d\rho_2}{dx}}{d\rho_1}, & \dfrac{d\dfrac{1}{h_1^2}\dfrac{d\rho_1}{dy}}{d\rho_2} = \dfrac{d\dfrac{1}{h_2^2}\dfrac{d\rho_2}{dy}}{d\rho_1}, & \dfrac{d\dfrac{1}{h_1^2}\dfrac{d\rho_1}{dz}}{d\rho_2} = \dfrac{d\dfrac{1}{h_2^2}\dfrac{d\rho_2}{dz}}{d\rho_1}. \end{cases}$$

Soit F une fonction de x, y, z, que l'on rapporte ensuite aux nouvelles coordonnées ρ, ρ_1, ρ_2, on aura, d'après le groupe (5),

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{dF}{dx}\dfrac{d\rho}{dx} + \dfrac{dF}{dy}\dfrac{d\rho}{dy} + \dfrac{dF}{dz}\dfrac{d\rho}{dz} = h^2\dfrac{dF}{d\rho}, \\ \dfrac{dF}{dx}\dfrac{d\rho_1}{dx} + \dfrac{dF}{dy}\dfrac{d\rho_1}{dy} + \dfrac{dF}{dz}\dfrac{d\rho_1}{dz} = h_1^2\dfrac{dF}{d\rho_1}, \\ \dfrac{dF}{dx}\dfrac{d\rho_2}{dx} + \dfrac{dF}{dy}\dfrac{d\rho_2}{dy} + \dfrac{dF}{dz}\dfrac{d\rho_2}{dz} = h_2^2\dfrac{dF}{d\rho_2}. \end{cases}$$

§ V.

Si l'on différentie successivement, par rapport à x, y, z, les trois équations (2), il est facile de voir que les résultats de cette operation pourront, d'après les formules (8), être mis sous la forme

$$(9)\quad \begin{cases} h_1^2\dfrac{d\dfrac{d\rho}{dx}}{d\rho_1} + h^2\dfrac{d\dfrac{d\rho_1}{dx}}{d\rho} = 0, & h_1^2\dfrac{d\dfrac{d\rho}{dy}}{d\rho_1} + h^2\dfrac{d\dfrac{d\rho_1}{dy}}{d\rho} = 0, & h_1^2\dfrac{d\dfrac{d\rho}{dz}}{d\rho_1} + h^2\dfrac{d\dfrac{d\rho_1}{dz}}{d\rho} = 0; \\ h^2\dfrac{d\dfrac{d\rho_2}{dx}}{d\rho} + h_2^2\dfrac{d\dfrac{d\rho}{dx}}{d\rho_2} = 0, & h^2\dfrac{d\dfrac{d\rho_2}{dy}}{d\rho} + h_2^2\dfrac{d\dfrac{d\rho}{dy}}{d\rho_2} = 0, & h^2\dfrac{d\dfrac{d\rho_2}{dz}}{d\rho} + h_2^2\dfrac{d\dfrac{d\rho}{dz}}{d\rho_2} = 0; \\ h_2^2\dfrac{d\dfrac{d\rho_1}{dx}}{d\rho_2} + h_1^2\dfrac{d\dfrac{d\rho_2}{dx}}{d\rho_1} = 0, & h_2^2\dfrac{d\dfrac{d\rho_1}{dy}}{d\rho_2} + h_1^2\dfrac{d\dfrac{d\rho_2}{dy}}{d\rho_1} = 0, & h_2^2\dfrac{d\dfrac{d\rho_1}{dz}}{d\rho_2} + h^2\dfrac{d\dfrac{d\rho_2}{dz}}{d\rho} = 0. \end{cases}$$

Si l'on substitue, dans les premieres équations de ces trois lignes,

les valeurs de $\frac{d\rho}{dx}$, $\frac{d\rho_1}{dx}$, $\frac{d\rho_2}{dx}$, données par le groupe (5), et si l'on combine la première ligne d'équations (6) avec la première équation (3), on obtient le système suivant :

$$
(10)\quad \left\{
\begin{aligned}
& h_1^2 \frac{dh^2 \frac{dx}{d\rho}}{d\rho_1} + h^2 \frac{dh_1^2 \frac{dx}{d\rho_1}}{d\rho} = 0, \\
& h^2 \frac{dh_2^2 \frac{dx}{d\rho_2}}{d\rho} + h_2^2 \frac{dh^2 \frac{dx}{d\rho}}{d\rho_2} = 0, \\
& h_2^2 \frac{dh_1^2 \frac{dx}{d\rho_1}}{d\rho_2} + h_1^2 \frac{dh_2^2 \frac{dx}{d\rho_2}}{d\rho_1} = 0, \\
& \left(h \frac{dx}{d\rho}\right)^2 + \left(h_1 \frac{dx}{d\rho_1}\right)^2 + \left(h_2 \frac{dx}{d\rho_2}\right)^2 = 1.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces équations différentielles doivent être satisfaites par la fonction x, de ρ, ρ_1, ρ_2, ainsi que par les fonctions y et z. Or le système des axes rectilignes peut être changé, sans que ρ, ρ_1, ρ_2, h, h_1, h_2 prennent d'autres valeurs; la distance variable x d'un point de l'espace à un plan fixe quelconque, exprimée en fonction de ρ, ρ_1, ρ_2, devra donc vérifier les quatre équations (10), ou les suivantes qui ne sont que le développement des premières :

$$
(10\ bis)\quad \left\{
\begin{aligned}
& \frac{d^2x}{d\rho d\rho_1} + \frac{1}{h}\frac{dh}{d\rho_1}\frac{dx}{d\rho} + \frac{1}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho}\frac{dx}{d\rho_1} = 0, \\
& \frac{d^2x}{d\rho_2 d\rho} + \frac{1}{h_2}\frac{dh_2}{d\rho}\frac{dx}{d\rho_2} + \frac{1}{h}\frac{dh}{d\rho_2}\frac{dx}{d\rho} = 0, \\
& \frac{d^2x}{d\rho_1 d\rho_2} + \frac{1}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho_2}\frac{dx}{d\rho_1} + \frac{1}{h_2}\frac{dh_2}{d\rho_1}\frac{dx}{d\rho_2} = 0, \\
& h^2\left(\frac{dx}{d\rho}\right)^2 + h_1^2\left(\frac{dx}{d\rho_1}\right)^2 + h_2^2\left(\frac{dx}{d\rho_2}\right)^2 = 1.
\end{aligned}
\right.
$$

§ VI.

Le développement des équations (7) donne, en ayant égard au groupe (9), les formules suivantes, qui sont très utiles dans la trans-

formation des équations aux différences partielles :

$$
(11)\quad
\left\{
\begin{array}{l}
\text{1}^{\text{re}}\ \text{cas.}\quad
\left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{d\dfrac{d\rho}{dx}}{d\rho_1} = \dfrac{1}{h}\dfrac{dh}{d\rho_1}\dfrac{d\rho}{dx} - \dfrac{h^2}{h_1^2}\dfrac{dh_1}{d\rho}\dfrac{d\rho_1}{dx}, \qquad \dfrac{d\dfrac{d\rho}{dx}}{d\rho_2} = \dfrac{1}{h}\dfrac{dh}{d\rho_2}\dfrac{d\rho}{dx} - \dfrac{h^2}{h_2^2}\dfrac{dh_2}{d\rho}\dfrac{d\rho_2}{dx},\\[2ex]
\dfrac{d\dfrac{d\rho}{dy}}{d\rho_1} = \dfrac{1}{h}\dfrac{dh}{d\rho_1}\dfrac{d\rho}{dy} - \dfrac{h^2}{h_1^2}\dfrac{dh_1}{d\rho}\dfrac{d\rho_1}{dy}, \qquad \dfrac{d\dfrac{d\rho}{dy}}{d\rho_2} = \dfrac{1}{h}\dfrac{dh}{d\rho_2}\dfrac{d\rho}{dy} - \dfrac{h^2}{h_2^2}\dfrac{dh_2}{d\rho}\dfrac{d\rho_2}{dy},\\[2ex]
\dfrac{d\dfrac{d\rho}{dz}}{d\rho_1} = \dfrac{1}{h}\dfrac{dh}{d\rho_1}\dfrac{d\rho}{dz} - \dfrac{h^2}{h_1^2}\dfrac{dh_1}{d\rho}\dfrac{d\rho_1}{dz}, \qquad \dfrac{d\dfrac{d\rho}{dz}}{d\rho_2} = \dfrac{1}{h}\dfrac{dh}{d\rho_2}\dfrac{d\rho}{dz} - \dfrac{h^2}{h_2^2}\dfrac{dh_2}{d\rho}\dfrac{d\rho_2}{dz}.
\end{array}
\right.\\[6ex]
\text{2}^{\text{me}}\ \text{cas.}\quad
\left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{d\dfrac{d\rho_1}{dx}}{d\rho_2} = \dfrac{1}{h_1}\dfrac{dh_1}{d\rho_2}\dfrac{d\rho_1}{dx} - \dfrac{h_1^2}{h_2^2}\dfrac{dh_2}{d\rho_1}\dfrac{d\rho_2}{dx}, \qquad \dfrac{d\dfrac{d\rho_1}{dx}}{d\rho} = \dfrac{1}{h_1}\dfrac{dh_1}{d\rho}\dfrac{d\rho_1}{dx} - \dfrac{h^2}{h^3}\dfrac{dh}{d\rho_1}\dfrac{d\rho}{dx},\\[2ex]
\dfrac{d\dfrac{d\rho_1}{dy}}{d\rho_2} = \dfrac{1}{h_1}\dfrac{dh_1}{d\rho_2}\dfrac{d\rho_1}{dy} - \dfrac{h_1^2}{h_2^2}\dfrac{dh_2}{d\rho_1}\dfrac{d\rho_2}{dy}, \qquad \dfrac{d\dfrac{d\rho_1}{dy}}{d\rho} = \dfrac{1}{h_1}\dfrac{dh_1}{d\rho}\dfrac{d\rho_1}{dy} - \dfrac{h_1^2}{h^3}\dfrac{dh}{d\rho_1}\dfrac{d\rho}{dy},\\[2ex]
\dfrac{d\dfrac{d\rho_1}{dz}}{d\rho_2} = \dfrac{1}{h_1}\dfrac{dh_1}{d\rho_2}\dfrac{d\rho_1}{dz} - \dfrac{h_1^2}{h_2^2}\dfrac{dh_2}{d\rho_1}\dfrac{d\rho_2}{dz}, \qquad \dfrac{d\dfrac{d\rho_1}{dz}}{d\rho} = \dfrac{1}{h_1}\dfrac{dh_1}{d\rho}\dfrac{d\rho_1}{dz} - \dfrac{h^2}{h^3}\dfrac{dh}{d\rho_1}\dfrac{d\rho}{dz}.
\end{array}
\right.\\[6ex]
\text{3}^{\text{me}}\ \text{cas.}\quad
\left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{d\dfrac{d\rho_2}{dx}}{d\rho} = \dfrac{1}{h_2}\dfrac{dh_2}{d\rho}\dfrac{d\rho_2}{dx} - \dfrac{h_2^2}{h^3}\dfrac{dh}{d\rho_2}\dfrac{d\rho}{dx}, \qquad \dfrac{d\dfrac{d\rho_2}{dx}}{d\rho_1} = \dfrac{1}{h_2}\dfrac{dh_2}{d\rho_1}\dfrac{d\rho_2}{dx} - \dfrac{h_2^2}{h_1^3}\dfrac{dh_1}{d\rho_2}\dfrac{d\rho_2}{dx},\\[2ex]
\dfrac{d\dfrac{d\rho_2}{dy}}{d\rho} = \dfrac{1}{h_2}\dfrac{dh_2}{d\rho}\dfrac{d\rho_2}{dy} - \dfrac{h_2^2}{h^3}\dfrac{dh}{d\rho_2}\dfrac{d\rho}{dy}, \qquad \dfrac{d\dfrac{d\rho_2}{dy}}{d\rho_1} = \dfrac{1}{h_2}\dfrac{dh_2}{d\rho_1}\dfrac{d\rho_2}{dy} - \dfrac{h_2^2}{h_1^3}\dfrac{dh_1}{d\rho_2}\dfrac{d\rho_2}{dy},\\[2ex]
\dfrac{d\dfrac{d\rho_2}{dz}}{d\rho} = \dfrac{1}{h_2}\dfrac{dh_2}{d\rho}\dfrac{d\rho_2}{dz} - \dfrac{h_2^2}{h^3}\dfrac{dh}{d\rho_2}\dfrac{d\rho}{dz}, \qquad \dfrac{d\dfrac{d\rho}{dz}}{d\rho_1} = \dfrac{1}{h_2}\dfrac{dh_2}{d\rho_1}\dfrac{d\rho_2}{dz} - \dfrac{h_2^2}{h_1^3}\dfrac{dh_1}{d\rho_2}\dfrac{d\rho_2}{dz}
\end{array}
\right.
\end{array}
\right.
$$

On déduit immédiatement de ces formules et des équations (2), le groupe suivant :

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d\rho}{dx}\,\frac{d\,\frac{d\rho_1}{dx}}{d\rho_2}+\frac{d\rho}{dy}\,\frac{d\,\frac{d\rho_1}{dy}}{d\rho_2}+\frac{d\rho}{dz}\,\frac{d\,\frac{d\rho_1}{dz}}{d\rho_2}=0,\\
&\frac{d\rho}{dx}\,\frac{d\,\frac{d\rho_2}{dx}}{d\rho_1}+\frac{d\rho}{dy}\,\frac{d\,\frac{d\rho_2}{dy}}{d\rho_1}+\frac{d\rho}{dz}\,\frac{d\,\frac{d\rho_2}{dz}}{d\rho_1}=0;\\
&\frac{d\rho_1}{dx}\,\frac{d\,\frac{d\rho_2}{dx}}{d\rho}+\frac{d\rho_1}{dy}\,\frac{d\,\frac{d\rho_2}{dy}}{d\rho}+\frac{d\rho_1}{dz}\,\frac{d\,\frac{d\rho_2}{dz}}{d\rho}=0,\\
&\frac{d\rho_1}{dx}\,\frac{d\,\frac{d\rho}{dx}}{d\rho_2}+\frac{d\rho_1}{dy}\,\frac{d\,\frac{d\rho}{dy}}{d\rho_2}+\frac{d\rho_1}{dz}\,\frac{d\,\frac{d\rho}{dz}}{d\rho_2}=0;\\
&\frac{d\rho_2}{dx}\,\frac{d\,\frac{d\rho}{dx}}{d\rho_1}+\frac{d\rho_2}{dy}\,\frac{d\,\frac{d\rho}{dy}}{d\rho_1}+\frac{d\rho_2}{dz}\,\frac{d\,\frac{d\rho}{dz}}{d\rho_1}=0,\\
&\frac{d\rho_2}{dx}\,\frac{d\,\frac{d\rho_1}{dx}}{d\rho}+\frac{d\rho_2}{dy}\,\frac{d\,\frac{d\rho_1}{dy}}{d\rho}+\frac{d\rho_2}{dz}\,\frac{d\,\frac{d\rho_1}{dz}}{d\rho}=0;
\end{aligned}\right.$$

lequel ne comprend, à proprement parler, qu'une seule équation distincte et nouvelle; car les cinq autres se déduiraient de la première, en différentiant par rapport à ρ, ρ_1 ou ρ_2, les équations (2), et en ayant égard aux formules (9). Ce groupe est fort important par la conséquence géométrique qui en sera déduite (deuxième partie), sur la nature des courbes d'intersection des surfaces orthogonales.

§ VII.

On déduit encore des formules (11) des équations de la forme

$$\frac{d\rho}{dx}\,\frac{d\,\frac{d\rho}{dx}}{d\rho_1}+\frac{d\rho}{dy}\,\frac{d\,\frac{d\rho}{dy}}{d\rho_1}+\frac{d\rho}{dz}\,\frac{d\,\frac{d\rho}{dz}}{d\rho_1}=h\,\frac{dh}{d\rho_1},$$

qui ne sont que des conséquences des équations (2 *bis*); et d'autres telles que celles-ci

$$(13)\qquad \frac{d\rho_1}{dx}\,\frac{d\,\frac{d\rho}{dx}}{d\rho_1}+\frac{d\rho_1}{dy}\,\frac{d\,\frac{d\rho}{dz}}{d\rho_1}+\frac{d\rho_1}{dz}\,\frac{d\,\frac{d\rho}{dy}}{d\rho_1}=-\frac{h^2}{h_1}\,\frac{dh_1}{d\rho}.$$

qui se déduiraient aussi fort simplement des formules (9). A cette équation (13) correspond donc un nouveau groupe de six formules, qu'il serait facile de composer.

Enfin le groupe (13), en vertu des équations (2), en donne un autre comprenant six équations de la forme

$$(14)\qquad \frac{d\rho}{dx}\,\frac{d\,\dfrac{d\rho_1}{dx}}{d\rho_1} + \frac{d\rho}{dy}\,\frac{d\,\dfrac{d\rho_1}{dy}}{d\rho_1} + \frac{d\rho}{dz}\,\frac{d\,\dfrac{d\rho_1}{dz}}{d\rho_1} = \frac{h^2}{h_1}\,\frac{dh_1}{d\rho},$$

qu'on peut établir directement d'une autre manière. On a, en effet, d'après les formules générales (8),

$$\frac{d\,\dfrac{d\rho_1}{dx}}{d\rho_1} = \frac{1}{h_1^2}\left(\frac{d\rho_1}{dx}\,\frac{d\,\dfrac{d\rho_1}{dx}}{dx} + \frac{d\rho_1}{dy}\,\frac{d\,\dfrac{d\rho_1}{dx}}{dy} + \frac{d\rho_1}{dz}\,\frac{d\,\dfrac{d\rho_1}{dx}}{dz}\right)$$

$$= \frac{1}{h_1^2}\left(\frac{d\rho_1}{dx}\,\frac{d\,\dfrac{d\rho_1}{dx}}{dx} + \frac{d\rho_1}{dy}\,\frac{d\,\dfrac{d\rho_1}{dy}}{dx} + \frac{d\rho_1}{dz}\,\frac{d\,\dfrac{d\rho_1}{dz}}{dx}\right) = \frac{1}{h_1}\,\frac{dh_1}{dx};$$

d'où il est facile d'établir les équations suivantes

$$(14\,bis)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{d\,\dfrac{d\rho_1}{dx}}{d\rho_1} &= \frac{1}{h_1}\left(\frac{dh_1}{d\rho}\,\frac{d\rho}{dx} + \frac{dh_1}{d\rho_1}\,\frac{d\rho_1}{dx} + \frac{dh_1}{d\rho_2}\,\frac{d\rho_2}{dx}\right),\\
\frac{d\,\dfrac{d\rho_1}{dy}}{d\rho_1} &= \frac{1}{h_1}\left(\frac{dh_1}{d\rho}\,\frac{d\rho}{dy} + \frac{dh_1}{d\rho_1}\,\frac{d\rho_1}{dy} + \frac{dh_1}{d\rho_2}\,\frac{d\rho_2}{dy}\right),\\
\frac{d\,\dfrac{d\rho_1}{dz}}{d\rho_1} &= \frac{1}{h_1}\left(\frac{dh_1}{d\rho}\,\frac{d\rho}{dz} + \frac{dh_1}{d\rho_1}\,\frac{d\rho_1}{dz} + \frac{dh_1}{d\rho_2}\,\frac{d\rho_2}{dz}\right),
\end{aligned}\right.$$

et d'autres analogues, qui conduisent facilement au groupe (14).

§ VIII.

Si l'on rapproche, dans les groupes (11) et (14 *bis*), les équations qui donnent les valeurs des trois coefficients de la fonction $\left(\frac{d\rho}{dx}\right)$ en ρ, ρ_1, ρ_2.

ces trois équations pourront s'écrire ainsi :

$$\frac{d\,\frac{1}{h}\,\frac{d\rho}{dx}}{d\rho_1} = \frac{1}{h_1}\,\frac{d\rho_1}{dx}\,h\,\frac{d\,\frac{1}{h_1}}{d\rho},$$

$$\frac{d\,\frac{1}{h}\,\frac{d\rho}{dx}}{d\rho_2} = \frac{1}{h_2}\,\frac{d\rho_2}{dx}\,.\,h\,\frac{d\,\frac{1}{h_2}}{d\rho},$$

$$\frac{d\,\frac{1}{h}\,\frac{d\rho}{dx}}{d\rho} = -\frac{1}{h_1}\,\frac{d\rho_1}{dx}\,.\,h_1\,\frac{d\,\frac{1}{h}}{d\rho_1} - \frac{1}{h_2}\,\frac{d\rho_2}{dx}\,.\,h_2\,\frac{d\,\frac{1}{h}}{d\rho_2}.$$

Soit maintenant posé, pour simplifier,

$$\frac{1}{h} = \mathrm{H}\,,\quad \mathrm{H}\,\frac{d\rho}{dx} = \mathrm{X}\,,\quad \mathrm{H}\,\frac{d\rho}{dy} = \mathrm{Y}\,,\quad \mathrm{H}\,\frac{d\rho}{dz} = \mathrm{Z}\,;$$

$$\frac{1}{h_1} = \mathrm{H}_1,\quad \mathrm{H}_1\,\frac{d\rho_1}{dx} = \mathrm{X}_1,\quad \mathrm{H}_1\,\frac{d\rho_1}{dy} = \mathrm{Y}_1,\quad \mathrm{H}_1\,\frac{d\rho_1}{dz} = \mathrm{Z}_1;$$

$$\frac{1}{h_2} = \mathrm{H}_2,\quad \mathrm{H}_2\,\frac{d\rho_2}{dx} = \mathrm{X}_2,\quad \mathrm{H}_2\,\frac{d\rho_2}{dy} = \mathrm{Y}_2,\quad \mathrm{H}_2\,\frac{d\rho_2}{dz} = \mathrm{Z}_2;$$

il sera aisé de conclure des équations précédentes, et d'autres semblables que l'on obtiendrait d'une manière analogue, le système d'équations

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{d\mathrm{X}}{d\rho_1} = \mathrm{X}_1\,\dfrac{1}{\mathrm{H}}\,\dfrac{d\mathrm{H}_1}{d\rho}, & \dfrac{d\mathrm{X}}{d\rho_2} = \mathrm{X}_2\,\dfrac{1}{\mathrm{H}}\,\dfrac{d\mathrm{H}_2}{d\rho}, & \dfrac{d\mathrm{X}}{d\rho} = -\mathrm{X}_1\,\dfrac{1}{\mathrm{H}_1}\,\dfrac{d\mathrm{H}}{d\rho_1} - \mathrm{X}_2\,\dfrac{1}{\mathrm{H}_2}\,\dfrac{d\mathrm{H}}{d\rho_2}; \\ \dfrac{d\mathrm{X}_1}{d\rho_2} = \mathrm{X}_2\,\dfrac{1}{\mathrm{H}_1}\,\dfrac{d\mathrm{H}_2}{d\rho_1}, & \dfrac{d\mathrm{X}_1}{d\rho} = \mathrm{X}\,\dfrac{1}{\mathrm{H}_1}\,\dfrac{d\mathrm{H}}{d\rho_1}, & \dfrac{d\mathrm{X}_1}{d\rho_1} = -\mathrm{X}_2\,\dfrac{1}{\mathrm{H}_2}\,\dfrac{d\mathrm{H}_1}{d\rho_2} - \mathrm{X}\,\dfrac{1}{\mathrm{H}}\,\dfrac{d\mathrm{H}_1}{d\rho}; \\ \dfrac{d\mathrm{X}_2}{d\rho} = \mathrm{X}\,\dfrac{1}{\mathrm{H}_2}\,\dfrac{d\mathrm{H}}{d\rho_2}, & \dfrac{d\mathrm{X}_2}{d\rho_1} = \mathrm{X}_1\,\dfrac{1}{\mathrm{H}_2}\,\dfrac{d\mathrm{H}_1}{d\rho_2}, & \dfrac{d\mathrm{X}_2}{d\rho_2} = -\mathrm{X}\,\dfrac{1}{\mathrm{H}}\,\dfrac{d\mathrm{H}_2}{d\rho} - \mathrm{X}_1\,\dfrac{1}{\mathrm{H}_1}\,\dfrac{d\mathrm{H}_2}{d\rho_1}; \end{cases}$$

lequel aurait encore lieu en y substituant Y, Y_1, Y_2, ou Z, Z_1, Z_2, à X, X_1, X_2.

Or, pour que la fonction X de ρ, ρ_1, ρ_2, existe, il faut que ses coefficients différentiels $\frac{d^2\mathrm{X}}{d\rho_1 d\rho_2}$, $\frac{d^2\mathrm{X}}{d\rho_2 d\rho}$, $\frac{d^2\mathrm{X}}{d\rho d\rho_1}$ aient les mêmes valeurs, de quelque manière qu'on les obtienne par la différentiation des équations (15). Ces conditions d'intégrabilité conduisent à des équations différen-

tielles, que doivent vérifier les fonctions H, H_1, H_2, $\left(\text{ou } \frac{1}{h}, \frac{1}{h_1}, \frac{1}{h_2}\right)$ et qu'il importe d'établir.

§ IX.

Si l'on égale l'une à l'autre, les deux valeurs de $\frac{d^2X}{d\varphi_1\, d\varphi_2}$, déduites par la différentiation des deux premieres équations (15), et qu'on substitue dans le résultat les valeurs (15) de $\frac{dX_1}{d\varphi_2}$ et $\frac{dX_2}{d\varphi_1}$, il vient

$$X_2 \frac{1}{H_1}\frac{dH_2}{d\varphi_1} \frac{1}{H}\frac{dH_1}{d\varphi} + X_1 \frac{d\frac{1}{H}\frac{dH_1}{d\varphi}}{d\varphi_2} = X_1 \frac{1}{H_2}\frac{dH_1}{d\varphi_2} \frac{1}{H}\frac{dH_2}{d\varphi} + X_2 \frac{d\frac{1}{H}\frac{dH_2}{d\varphi}}{d\varphi_1};$$

or cette équation doit avoir lieu quelle que soit la position de l'axe aux cosinus X, X_1, X_2, sans que les fonctions H, H_1, H_2, participent de cette indétermination; il faut donc que les coefficients de X_1 et de X_2, dans les deux membres de l'équation précédente, soient égaux: ce qui conduit au groupe suivant, facile à compléter :

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d\frac{1}{H_1}\frac{dH}{d\varphi_1}}{d\varphi_2} = \frac{1}{H_2}\frac{dH}{d\varphi_2}\cdot\frac{1}{H_1}\frac{dH_2}{d\varphi_1}, && \frac{d\frac{1}{H_2}\frac{dH}{d\varphi_2}}{d\varphi_1} = \frac{1}{H_1}\frac{dH}{d\varphi_1}\cdot\frac{1}{H_2}\frac{dH_1}{d\varphi_2};\\
&\frac{d\frac{1}{H_2}\frac{dH_1}{d\varphi_2}}{d\varphi} = \frac{1}{H}\frac{dH_1}{d\varphi}\cdot\frac{1}{H_2}\frac{dH}{d\varphi_2}, && \frac{d\frac{1}{H}\frac{dH_1}{d\varphi}}{d\varphi_2} = \frac{1}{H_2}\frac{dH_1}{d\varphi_2}\cdot\frac{1}{H}\frac{dH_2}{d\varphi};\\
&\frac{d\frac{1}{H}\frac{dH_2}{d\varphi}}{d\varphi_1} = \frac{1}{H_1}\frac{dH_2}{d\varphi_1}\cdot\frac{1}{H}\frac{dH_1}{d\varphi}, && \frac{d\frac{1}{H_1}\frac{dH_2}{d\varphi_1}}{d\varphi} = \frac{1}{H}\frac{dH_2}{d\varphi}\cdot\frac{1}{H_1}\frac{dH}{d\varphi_1}
\end{aligned}\right.$$

Ces six équations n'en comportent que trois distinctes, car les deux situées sur une même ligne horizontale sont respectivement identiques à l'une des suivantes :

$$(16\ bis)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\mathrm{H}}{d\rho_1 d\rho_2} = \dfrac{1}{\mathrm{H}_1}\dfrac{d\mathrm{H}}{d\rho_1}\dfrac{d\mathrm{H}_1}{d\rho_2} + \dfrac{1}{\mathrm{H}_2}\dfrac{d\mathrm{H}}{d\rho_2}\dfrac{d\mathrm{H}_2}{d\rho_1}, \\[2ex] \dfrac{d^2\mathrm{H}_1}{d\rho_2 d\rho} = \dfrac{1}{\mathrm{H}_2}\dfrac{d\mathrm{H}_1}{d\rho_2}\dfrac{d\mathrm{H}_2}{d\rho} + \dfrac{1}{\mathrm{H}}\dfrac{d\mathrm{H}_1}{d\rho}\dfrac{d\mathrm{H}}{d\rho_2}, \\[2ex] \dfrac{d\mathrm{H}_2}{d\rho\, d\rho_1} = \dfrac{1}{\mathrm{H}}\dfrac{d\mathrm{H}_2}{d\rho}\dfrac{d\mathrm{H}}{d\rho_1} + \dfrac{1}{\mathrm{H}_1}\dfrac{d\mathrm{H}_2}{d\rho_1}\dfrac{d\mathrm{H}_1}{d\rho}. \end{cases}$$

Il est à remarquer que ces équations peuvent se mettre sous une autre forme, car en y remplaçant H, H_1, H_2, par $\frac{1}{h}$, $\frac{1}{h_1}$, $\frac{1}{h_2}$, elles deviennent

$$(16\ ter)\quad \begin{cases} h_2^2 \dfrac{dh_1^2 \dfrac{d\frac{1}{h}}{d\rho_1}}{d\rho_2} + h_1^2 \dfrac{dh_2^2 \dfrac{d\frac{1}{h}}{d\rho_2}}{d\rho_1} = 0, \\[2ex] h^2 \dfrac{dh_2^2 \dfrac{d\frac{1}{h_1}}{d\rho_2}}{d\rho} + h_2^2 \dfrac{dh^2 \dfrac{d\frac{1}{h_1}}{d\rho}}{d\rho_2} = 0, \\[2ex] h_1^2 \dfrac{dh^2 \dfrac{d\frac{1}{h_2}}{d\rho}}{d\rho_1} + h^2 \dfrac{dh_1^2 \dfrac{d\frac{1}{h_2}}{d\rho_1}}{d\rho} = 0; \end{cases}$$

d'ou il suit que les fonctions $\frac{1}{h}$, $\frac{1}{h_1}$, $\frac{1}{h_2}$, vérifient respectivement l'une des trois équations différentielles du second ordre (10), auxquelles satisfont toutes les fonctions du premier degré en x, y, z.

§ X.

Si l'on égale l'une à l'autre les deux valeurs de $\frac{d^2\mathrm{X}}{d\rho_1 d\rho}$ données par les équations (15), et qu'on substitue dans le résultat les valeurs de $\frac{d\mathrm{X}_1}{d\rho}$, $\frac{d\mathrm{X}_1}{d\rho_1}$, $\frac{d\mathrm{X}_2}{d\rho_1}$ (15), $\dfrac{d\,\frac{1}{\mathrm{H}_2}\frac{d\mathrm{H}}{d\rho_2}}{d\rho_1}$ (16), on obtient une nouvelle relation en H,

H_1, H_2, et des calculs semblables forment le nouveau groupe

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d\,\frac{1}{H_1}\frac{dH}{d\rho_1}}{d\rho_1} + \frac{d\,\frac{1}{H}\frac{dH_1}{d\rho}}{d\rho} + \frac{1}{H_2}\frac{dH}{d\rho_2}\cdot\frac{1}{H_2}\frac{dH_1}{d\rho_2} = 0,\\
&\frac{d\,\frac{1}{H}\frac{dH_2}{d\rho}}{d\rho} + \frac{d\,\frac{1}{H_2}\frac{dH}{d\rho_2}}{d\rho_2} + \frac{1}{H_1}\frac{dH_2}{d\rho_1}\cdot\frac{1}{H_1}\frac{dH}{d\rho_1} = 0,\\
&\frac{d\,\frac{1}{H_2}\frac{dH_1}{d\rho_2}}{d\rho_2} = \frac{d\,\frac{1}{H_1}\frac{dH_2}{d\rho_1}}{d\rho_1} + \frac{1}{H}\frac{dH_1}{d\rho}\cdot\frac{1}{H}\frac{dH_2}{d\rho} = 0.
\end{aligned}\right.$$

Les équations (16) combinées deux à deux conduisent au résultat suivant :

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d\left(\frac{1}{H_1}\frac{dH}{d\rho_1}\cdot\frac{1}{H}\frac{dH_1}{d\rho}\right)}{d\rho_2} = \frac{d\left(\frac{1}{H}\frac{dH_2}{d\rho}\cdot\frac{1}{H_2}\frac{dH}{d\rho_2}\right)}{d\rho_1} = \frac{d\left(\frac{1}{H_2}\frac{dH_1}{d\rho_2}\cdot\frac{1}{H_1}\frac{dH_2}{d\rho_1}\right)}{d\rho}\\
&\qquad = \frac{1}{HH_1H_2}\left(\frac{dH}{d\rho_2}\frac{dH_1}{d\rho}\frac{dH_2}{d\rho_1} + \frac{dH}{d\rho_1}\frac{dH_1}{d\rho_2}\frac{dH_2}{d\rho}\right);
\end{aligned}\right.$$

d'où il suit que, R désignant une certaine fonction de ρ, ρ_1, ρ_2, on a

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{H_1}\frac{dH}{d\rho_1}\cdot\frac{1}{H}\frac{dH_1}{d\rho} = \frac{d^2R}{d\rho\,d\rho_1},\quad \frac{1}{H}\frac{dH_2}{d\rho}\cdot\frac{1}{H_2}\frac{dH}{d\rho_2} = \frac{d^2R}{d\rho_2\,d\rho},\quad \frac{1}{H_2}\frac{dH_1}{d\rho_2}\cdot\frac{1}{H_1}\frac{dH_2}{d\rho_1} = \frac{d^2R}{d\rho_1\,d\rho_2},\\
&\frac{1}{HH_1H_2}\left(\frac{dH}{d\rho_2}\frac{dH_1}{d\rho}\frac{dH_2}{d\rho_1} + \frac{dH}{d\rho_1}\frac{dH_1}{d\rho_2}\frac{dH_2}{d\rho}\right) = \frac{d^3R}{d\rho\,d\rho_1\,d\rho_2}.
\end{aligned}\right.$$

Les équations (17) ajoutées, après avoir été multipliées respectivement par H_2, H_1, H, donnent

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d\,\frac{1}{H}\frac{dH_1H_2}{d\rho}}{d\rho} + \frac{d\,\frac{1}{H_1}\frac{dH_2H}{d\rho_1}}{d\rho_1} + \frac{d\,\frac{1}{H_2}\frac{dHH_1}{d\rho_2}}{d\rho_2}\\
&\qquad = \frac{1}{H}\frac{dH_1}{d\rho}\frac{dH_2}{d\rho} + \frac{1}{H_1}\frac{dH_2}{d\rho_1}\frac{dH}{d\rho_1} + \frac{1}{H_2}\frac{dH}{d\rho_2}\frac{dH_1}{d\rho_2}.
\end{aligned}\right.$$

§ XI.

Les équations (15) donnent, en prenant celles qui ne contiennent que deux termes,

$$(21)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{H}\dfrac{dH_1}{d\rho} = \dfrac{1}{X_1}\dfrac{dX}{d\rho_1}, \quad \dfrac{1}{H_1}\dfrac{dH_2}{d\rho_1} = \dfrac{1}{X_2}\dfrac{dX_1}{d\rho_2}, \quad \dfrac{1}{H_2}\dfrac{dH}{d\rho_2} = \dfrac{1}{X}\dfrac{dX_2}{d\rho}, \\ \dfrac{1}{H}\dfrac{dH_2}{d\rho} = \dfrac{1}{X_2}\dfrac{dX}{d\rho_2}, \quad \dfrac{1}{H_1}\dfrac{dH}{d\rho_1} = \dfrac{1}{X}\dfrac{dX_1}{d\rho}, \quad \dfrac{1}{H_2}\dfrac{dH_1}{d\rho_2} = \dfrac{1}{X_1}\dfrac{dX_2}{d\rho_1}. \end{cases}$$

Ces valeurs substituées dans les trois équations (15) expriment que la somme $(X^2 + X_1^2 + X_2^2)$ est indépendante de ρ, ρ_1, ρ_2, ce que l'on savait déjà, car cette somme est l'unité, d'après les formules (3).

Si l'on substitue les valeurs (21) dans les équations (16), elles ne contiendront plus que les fonctions X, X_1, X_2, qui peuvent représenter les cosinus des angles qu'une droite quelconque fixe fait avec les normales aux surfaces ρ, ρ_1, ρ_2; et l'on aura

$$(22)\quad \begin{cases} \dfrac{d\,\dfrac{1}{X}\dfrac{dX_1}{d\rho}}{d\rho_2} = \dfrac{1}{X}\dfrac{dX_2}{d\rho}\cdot\dfrac{1}{X_2}\dfrac{dX_1}{d\rho_2}, \quad \dfrac{d\,\dfrac{1}{X}\dfrac{dX_2}{d\rho}}{d\rho_1} = \dfrac{1}{X}\dfrac{dX_1}{d\rho}\,\dfrac{1}{X_1}\dfrac{dX_2}{d\rho_1}; \\ \dfrac{d\,\dfrac{1}{X_1}\dfrac{dX_2}{d\rho_1}}{d\rho} = \dfrac{1}{X_1}\dfrac{dX}{d\rho_1}\cdot\dfrac{1}{X}\dfrac{dX_2}{d\rho}, \quad \dfrac{d\,\dfrac{1}{X_1}\dfrac{dX}{d\rho_1}}{d\rho_2} = \dfrac{1}{X_1}\dfrac{dX_2}{d\rho_1}\,\dfrac{1}{X_2}\dfrac{dX}{d\rho_2}; \\ \dfrac{d\,\dfrac{1}{X_2}\dfrac{dX}{d\rho_2}}{d\rho_1} = \dfrac{1}{X_2}\dfrac{dX_1}{d\rho_2}\cdot\dfrac{1}{X_1}\dfrac{dX}{d\rho_1}, \quad \dfrac{d\,\dfrac{1}{X_2}\dfrac{dX_1}{d\rho_2}}{d\rho} = \dfrac{1}{X_2}\dfrac{dX}{d\rho_2}\,\dfrac{1}{X}\dfrac{dX_1}{d\rho}; \end{cases}$$

ou bien les trois suivantes, seules distinctes les unes des autres,

$$(22\ bis)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2X}{d\rho_1 d\rho_2} = \dfrac{1}{X_1}\dfrac{dX}{d\rho_1}\dfrac{dX_1}{d\rho_2} + \dfrac{1}{X_2}\dfrac{dX}{d\rho_2}\dfrac{dX_2}{d\rho_1}, \\ \dfrac{d^2X_1}{d\rho_2 d\rho} = \dfrac{1}{X_2}\dfrac{dX_1}{d\rho_2}\dfrac{dX_2}{d\rho} + \dfrac{1}{X}\dfrac{dX_2}{d\rho}\dfrac{dX}{d\rho_2}, \\ \dfrac{d^2X_2}{d\rho d\rho_1} = \dfrac{1}{X}\dfrac{dX_2}{d\rho}\dfrac{dX}{d\rho_1} + \dfrac{1}{X_1}\dfrac{dX_2}{d\rho_1}\dfrac{dX_1}{d\rho}. \end{cases}$$

Les mêmes substitutions faites dans les équations (17) conduisent à

des équations que l'on retrouverait en combinant entre elles les relations (22 *bis*) et celle-ci :

$$(22\ ter)\qquad X^2 + X_1^2 + X_2^2 = 1.$$

Ainsi les quatre équations précédentes sont les seules auxquelles doivent satisfaire les cosinus des angles que les normales aux surfaces orthogonales font avec un axe fixe, pris arbitrairement.

Il est à remarquer que ces équations peuvent se mettre sous la forme

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{X_2^2}\,\frac{d\,\dfrac{1}{X_1^2}\,\dfrac{dX}{d\varphi_1}}{d\varphi_2} + \frac{1}{X_1^2}\,\frac{d\,\dfrac{1}{X_2^2}\,\dfrac{dX}{d\varphi_2}}{d\varphi_1} = 0,\\
&\frac{1}{X^2}\,\frac{d\,\dfrac{1}{X_2^2}\,\dfrac{dX_1}{d\varphi_2}}{d\varphi} + \frac{1}{X_2^2}\,\frac{d\,\dfrac{1}{X^2}\,\dfrac{dX_1}{d\varphi}}{d\varphi_2} = 0,\\
&\frac{1}{X_1^2}\,\frac{d\,\dfrac{1}{X^2}\,\dfrac{dX_2}{d\varphi}}{d\varphi_1} + \frac{1}{X^2}\,\frac{d\,\dfrac{1}{X_1^2}\,\dfrac{dX_2}{d\varphi_1}}{d\varphi} = 0,\\
&X^2 + X_1^2 + X_2^2 = 1.
\end{aligned}\right.$$

§ XII.

Le groupe d'équations (4) conduit à des formules qui donnent les paramètres différentiels du second ordre des surfaces orthogonales, en fonction de ceux du premier ordre et de leurs variations. Si l'on égale le coefficient de $\frac{d\varphi}{dy}$ en x à celui de $\frac{d\varphi}{dx}$ en y, ces deux fonctions étant données par les équations (4) (1re case), on aura

$$\frac{h}{h_1 h_2}\left\{\frac{d^2\varphi_1}{dz\,dy}\,\frac{d\varphi_2}{dy} - \frac{d^2\varphi_1}{dy^2}\,\frac{d\varphi_2}{dz} + \frac{d\varphi_1}{dz}\,\frac{d^2\varphi_2}{dy^2} - \frac{d\varphi_1}{dy}\,\frac{d^2\varphi_2}{dz\,dy}\right\} + \frac{d\,\dfrac{h}{h_1 h_2}}{dy}\left(\frac{d\varphi_1}{dz}\,\frac{d\varphi_2}{dy} - \frac{d\varphi_1}{dy}\,\frac{d\varphi_2}{dz}\right)$$

$$= \frac{h}{h_1 h_2}\left\{\frac{d^2\varphi_1}{dx^2}\,\frac{d\varphi_2}{dz} - \frac{d^2\varphi_1}{dz\,dx}\,\frac{d\varphi_2}{dx} + \frac{d\varphi_1}{dx}\,\frac{d^2\varphi_2}{dz\,dx} - \frac{d\varphi_1}{dz}\,\frac{d^2\varphi_2}{dx^2}\right\} + \frac{d\,\dfrac{h}{h_1 h_2}}{dx}\left(\frac{d\varphi_1}{dx}\,\frac{d\varphi_2}{dz} - \frac{d\varphi_1}{dz}\,\frac{d\varphi_2}{dx}\right),$$

ou bien

$$\frac{h}{h_1 h_2}\left(\frac{d\rho_1}{dz}\Delta_2\rho_2 - \frac{d\rho_2}{dz}\Delta_2\rho_1\right) +$$

$$\frac{h}{h_1 h_2}\left[\left(\frac{d\rho_2}{dx}\frac{d\frac{d\rho_1}{dz}}{dx} + \frac{d\rho_2}{dy}\frac{d\frac{d\rho_1}{dz}}{dy} + \frac{d\rho_2}{dz}\frac{d\frac{d\rho_1}{dz}}{dz}\right) - \left(\frac{d\rho_1}{dx}\frac{d\frac{d\rho_2}{dz}}{dx} + \frac{d\rho_1}{dy}\frac{d\frac{d\rho_2}{dz}}{dy} + \frac{d\rho_1}{dz}\frac{d\frac{d\rho_2}{dz}}{dz}\right)\right]$$

$$+\left[\frac{d\rho_1}{dz}\left(\frac{d\rho_2}{dx}\frac{d\frac{h}{h_1 h_2}}{dx} + \frac{d\rho_2}{dy}\frac{d\frac{h}{h_1 h_2}}{dy} + \frac{d\rho_2}{dz}\frac{d\frac{h}{h_1 h_2}}{dz}\right) - \frac{d\rho_2}{dz}\left(\frac{d\rho_1}{dx}\frac{d\frac{h}{h_1 h_2}}{dx} + \frac{d\rho_1}{dy}\frac{d\frac{h}{h_1 h_2}}{dy} + \frac{d\rho_1}{dz}\frac{d\frac{h}{h_1 h_2}}{dz}\right)\right] = 0.$$

D'après les formules (5), cette dernière équation donne la première du groupe suivant, qui se complète en égalant successivement les deux valeurs de $\frac{d^2\rho}{dz\,dx}$ et de $\frac{d^2\rho}{dy\,dz}$ fournies par les formules (4).

$$\frac{h}{h_1 h_2}\left(\frac{d\rho_1}{dz}\Delta_2\rho_2 - \frac{d\rho_2}{dz}\Delta_2\rho_1 + h_2^2\frac{d\frac{d\rho_1}{dz}}{d\rho_2} - h_1^2\frac{d\frac{d\rho_2}{dz}}{d\rho_1}\right) + \left(\frac{d\rho_1}{dz}h_2^2\frac{d\frac{h}{h_1 h_2}}{d\rho_2} - \frac{d\rho_2}{dz}h_1^2\frac{d\frac{h}{h_1 h_2}}{d\rho_1}\right) = 0,$$

$$\frac{h}{h_1 h_2}\left(\frac{d\rho_1}{dy}\Delta_2\rho_2 - \frac{d\rho_2}{dy}\Delta_2\rho_1 + h_2^2\frac{d\frac{d\rho_1}{dy}}{d\rho_2} - h_1^2\frac{d\frac{d\rho_2}{dy}}{d\rho_1}\right) + \left(\frac{d\rho_1}{dy}h_2^2\frac{d\frac{h}{h_1 h_2}}{d\rho_2} - \frac{d\rho_2}{dy}h_1^2\frac{d\frac{h}{h_1 h_2}}{d\rho_1}\right) = 0,$$

$$\frac{h}{h_1 h_2}\left(\frac{d\rho_1}{dx}\Delta_2\rho_2 - \frac{d\rho_2}{dx}\Delta_2\rho_1 + h_2^2\frac{d\frac{d\rho_1}{dx}}{d\rho_2} - h_1^2\frac{d\frac{d\rho_2}{dx}}{d\rho_1}\right) + \left(\frac{d\rho_1}{dx}h_2^2\frac{d\frac{h}{h_1 h_2}}{d\rho_2} - \frac{d\rho_2}{dx}h_1^2\frac{d\frac{h}{h_1 h_2}}{d\rho_1}\right) = 0.$$

Si l'on ajoute les trois équations précédentes, après les avoir respectivement multipliées par $\frac{d\rho_1}{dx}$, $\frac{d\rho_1}{dy}$, $\frac{d\rho_1}{dx}$, on aura, toute réduction faite, et en ayant égard aux formules (2) et au groupe (13),

$$\frac{\Delta_2\rho_2}{h_2^2} + \frac{d.\log\frac{h_1 h}{h_2}}{d\rho_2} = 0,$$

Si, au contraire, on ajoute les mêmes équations, respectivement multipliées par $\frac{d\rho_2}{dz}$, $\frac{d\rho_2}{dy}$, $\frac{d\rho_2}{dx}$, on trouvera

$$\frac{\Delta_2 \rho_1}{h_1^2} + \frac{d.\log \frac{h_2 h}{h_1}}{d\rho_1} = 0.$$

Enfin si on les ajoute, respectivement multipliées par $\frac{d\rho}{dz}$, $\frac{d\rho}{dy}$, $\frac{d\rho}{dx}$, leur somme donnera, d'après les équations (2),

$$h_2^2 \left(\frac{d\rho}{dx} \frac{d\frac{d\rho_1}{dx}}{d\rho_2} + \frac{d\rho}{dy} \frac{d\frac{d\rho_1}{dy}}{d\rho_2} + \frac{d\rho}{dz} \frac{d\frac{d\rho_1}{dz}}{d\rho_2} \right) = h_1^2 \left(\frac{d\rho}{dx} \frac{d\frac{d\rho_2}{dx}}{d\rho_1} + \frac{d\rho}{dy} \frac{d\frac{d\rho_2}{dy}}{d\rho_1} + \frac{d\rho}{dz} \frac{d\frac{d\rho_2}{dz}}{d\rho_1} \right),$$

équation qui est identique d'après le groupe (11).

§ XIII.

Il suit de là que les équations (4) ne donneront, en agissant sur la deuxième et la troisième case, comme il vient d'être fait sur la première, que les trois formules nouvelles

$$(24) \qquad \frac{\Delta_2 \rho}{h^2} = \frac{d.\log \frac{h}{h_1 h_2}}{d\rho}, \qquad \frac{\Delta_2 \rho_1}{h_1^2} = \frac{d.\log \frac{h_1}{h_2 h}}{d\rho_1}, \qquad \frac{\Delta_2 \rho_2}{h_2^2} = \frac{d.\log \frac{h_2}{h h_1}}{d\rho_2},$$

lesquelles peuvent se mettre sous la forme

$$(24\,bis) \qquad \begin{cases} \frac{dh}{d\rho} - \frac{\Delta_2 \rho}{h} = \frac{h}{h_1} \frac{dh_1}{d\rho} + \frac{h}{h_2} \frac{dh_2}{d\rho}, \\ \frac{dh_1}{d\rho_1} - \frac{\Delta_2 \rho_1}{h_1} = \frac{h_1}{h_2} \frac{dh_2}{d\rho_1} + \frac{h_1}{h} \frac{dh}{d\rho_1}, \\ \frac{dh_2}{d\rho_2} - \frac{\Delta_2 \rho_2}{h_2} = \frac{h_2}{h} \frac{dh}{d\rho_2} + \frac{h_2}{h_1} \frac{dh_1}{d\rho_2}. \end{cases}$$

Les formules (24) sont utiles, en ce qu'elles permettent de simplifier l'expression transformée du paramètre différentiel du second ordre d'une fonction quelconque; car si φ représente une fonction de x, y, z,

que l'on rapporte ensuite aux nouvelles coordonnées ρ, ρ_1, ρ_2, on aura successivement

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\varphi}{d\rho}\frac{d\rho}{dx} + \frac{d\varphi}{d\rho_1}\frac{d\rho_1}{dx} + \frac{d\varphi}{d\rho_2}\frac{d\rho_2}{dx},$$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{d^2\varphi}{d\rho^2}\left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2 + \frac{d^2\varphi}{d\rho_1^2}\left(\frac{d\rho_1}{dx}\right)^2 + \frac{d^2\varphi}{d\rho_2^2}\left(\frac{d\rho_2}{dx}\right)^2 +$$

$$2\,\frac{d^2\varphi}{d\rho_1 d\rho_2}\frac{d\rho_1}{dx}\frac{d\rho_2}{dx} + 2\,\frac{d^2\varphi}{d\rho_2 d\rho}\frac{d\rho_2}{dx}\frac{d\rho}{dx} + 2\,\frac{d^2\varphi}{d\rho d\rho_1}\frac{d\rho}{dx}\frac{d\rho_1}{dx} + \frac{d\varphi}{d\rho}\frac{d^2\rho}{dx^2} + \frac{d\varphi}{d\rho_1}\frac{d^2\rho_1}{dx^2} + \frac{d\varphi}{d\rho_2}\frac{d^2\rho_2}{dx^2};$$

et il est facile de voir que si l'on calcule de la même manière les deux autres coefficients différentiels $\frac{d^2\varphi}{dy^2}$, $\frac{d^2\varphi}{dz^2}$, la somme des trois donnera

$$\Delta_2\varphi = h^2\frac{d^2\varphi}{d\rho^2} + h_1^2\frac{d^2\varphi}{d\rho_1^2} + h_2^2\frac{d^2\varphi}{d\rho_2^2} + \frac{d\varphi}{d\rho}\Delta_2\rho + \frac{d\varphi}{d\rho_1}\Delta_2\rho_1 + \frac{d\varphi}{d\rho_2}\Delta_2\rho_2,$$

en ayant égard aux formules (2) et (2 *bis*). Or les équations (24) transforment cette expression comme il suit :

$$\Delta_2\varphi = h^2\left(\frac{d^2\varphi}{d\rho^2} + \frac{h_1h_2}{h}\frac{d\frac{h}{h_1h_2}}{d\rho}\right) + h_1^2\left(\frac{d^2\varphi}{d\rho_1^2} + \frac{h_2h}{h_1}\frac{d\frac{h_1}{h_2h}}{d\rho_1}\right) + h_2^2\left(\frac{d^2\varphi}{d\rho_2^2} + \frac{hh_1}{h_2}\frac{d\frac{h_2}{hh_1}}{d\rho_2}\right),$$

ou plus simplement,

$$(25)\qquad \Delta_2\varphi = hh_1h_2\left(\frac{d\frac{h}{h_1h_2}\frac{d\varphi}{d\rho}}{d\rho} + \frac{d\frac{h_1}{h_2h}\frac{d\varphi}{d\rho_1}}{d\rho_1} + \frac{d\frac{h_2}{hh_1}\frac{d\varphi}{d\rho_2}}{d\rho_2}\right).$$

On observera aussi que le carré du premier paramètre différentiel de la fonction φ, d'après les valeurs de $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$, calculées ci-dessus, et par les formules (2) et (2 *bis*), a pour expression

$$(26)\qquad \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 = h^2\left(\frac{d\varphi}{d\rho}\right)^2 + h_1^2\left(\frac{d\varphi}{d\rho_1}\right)^2 + h_2^2\left(\frac{d\varphi}{d\rho_2}\right)^2.$$

DEUXIÈME PARTIE.

Courbure des surfaces orthogonales.

La plupart des formules établies dans la première partie de ce Mémoire signalent des propriétés géométriques qui appartiennent à tous les systèmes de surfaces orthogonales. Cette seconde partie a pour objet de démêler ces propriétés. (Pour éviter toute confusion, et pour faciliter les renvois, les chiffres entre parenthèses continueront à désigner exclusivement les équations de la première partie; celles de la seconde seront marquées par des lettres.)

§ I.

Le groupe des équations (12) indique que chacune des trois surfaces ρ, ρ_1, ρ_2, est coupée suivant ses lignes de courbure par toutes les surfaces des deux autres systèmes.

En effet, considérons une des surfaces ρ; sa normale, rapportée aux coordonnées courantes x', y', z', aura pour équations

$$\frac{dz}{dz}(x'-x) = (z'-z)\frac{dz}{dx}, \qquad \frac{dz}{dz}(y'-y) = (z'-z)\frac{dz}{dy};$$

si x', y', z' représentent les coordonnées d'un des centres de courbure, et δ_1 l'indice de la variation des coordonnées du point (x, y, z) de la surface, lorsqu'on le quitte pour marcher sur la ligne de courbure correspondante à ce centre, on aura

$$(x'-x)\delta_1\frac{dz}{dz} - \frac{dz}{dz}\delta_1 x = (z'-z)\delta_1\frac{dz}{dx} - \frac{dz}{dx}\delta_1 z,$$

$$(y'-y)\delta_1\frac{dz}{dz} - \frac{dz}{dz}\delta_1 y = (z'-z)\delta_1\frac{dz}{dy} - \frac{dz}{dy}\delta_1 z;$$

et l'élimination de $(x'-x)$, $(y'-y)$, $(z'-z)$, entre les quatre équations précédentes, conduit à la suivante, en observant que, par hypothèse, $\frac{dz}{dx}\delta_1 x + \frac{dz}{dy}\delta_1 y + \frac{dz}{dz}\delta_1 z = 0$:

$$(a)\ \left(\frac{d\rho}{dz}\delta_1 y-\frac{d\rho}{dy}\delta_1 z\right)\delta_1\frac{d\rho}{dx}+\left(\frac{d\rho}{dx}\delta_1 z-\frac{d\rho}{dz}\delta_1 x\right)\delta_1\frac{d\rho}{dy}+\left(\frac{d\rho}{dy}\delta_1 x-\frac{d\rho}{dx}\delta_1 y\right)\delta_1\frac{d\rho}{dz}=0.$$

Si l'on pose

$$\frac{d\rho}{dz}\delta_1 y-\frac{d\rho}{dy}\delta_1 z=k\delta_2 x,\quad \frac{d\rho}{dx}\delta_1 z-\frac{d\rho}{dz}\delta_1 x=k\delta_2 y,\quad \frac{d\rho}{dy}\delta_1 x-\frac{d\rho}{dx}\delta_1 y=k\delta_2 z,$$

on en déduira

$$\frac{d\rho}{dx}\delta_2 x+\frac{d\rho}{dy}\delta_2 y+\frac{d\rho}{dz}\delta_2 z=0,$$

$$\delta_1 x\,\delta_2 x+\delta_1 y\delta_2 y+\delta_1 z\delta_2 z=0;$$

ce qui indique que le point de la surface, aux coordonnées $x+\delta_2 x$, $y+\delta_2 y$, $z+\delta_2 z$, se trouve sur la surface ρ et sur la seconde ligne de courbure.

L'équation de condition (a) se réduira alors à

$$\delta_1\frac{d\rho}{dx}.\delta_2 x+\delta_1\frac{d\rho}{dy}.\delta_2 y+\delta_1\frac{d\rho}{dz}.\delta_2 z=0,$$

ou, en supposant que ρ_1 et ρ_2 soient les paramètres de deux surfaces coupant la proposée ρ rectangulairement, et suivant les deux lignes de courbure

$$\frac{d\rho_2}{dx}\frac{d\frac{d\rho}{dx}}{d\rho_1}+\frac{d\rho_2}{dy}\frac{d\frac{d\rho}{dy}}{d\rho_1}+\frac{d\rho_2}{dz}\frac{d\frac{d\rho}{dz}}{d\rho_1}=0,$$

équation qui reproduirait toutes les équations (12).

Ainsi, *trois systèmes conjugués de surfaces orthogonales sont toujours tels, que deux quelconques d'entre eux tracent sur une surface du troisième toutes ses lignes de courbure.*

§ II.

La courbure d'une ligne ou d'une surface, en un point et dans un plan déterminé, étant totalement définie par la fraction dont le numérateur est l'unité, et le dénominateur le rayon du cercle osculateur, on

peut appeler cette fraction *coefficient de courbure*, ou simplement *courbure*. D'après cela, à chaque point de l'espace, découpé par un système de surfaces orthogonales, correspondent six courbures, en général différentes, appartenant deux à deux aux trois surfaces conjuguées qui se coupent en ce point.

Les trois lignes d'intersection de ces surfaces forment en quelque sorte trois axes coordonnés courbes, dont le point considéré est l'origine. Pour fixer les idées, je désigne ces axes courbes par les noms d'axes des s, des s_1, des s_2, et par surfaces des $s_1 s_2$, des $s_2 s$, des $s s_1$, les surfaces conjuguées ρ, ρ_1, ρ_2; je suppose en outre que la première tangente à l'axe courbe des s soit verticale, et que l'observateur, placé sur le plan horizontal tangent à la surface $s_1 s_2$, et regardant l'axe des s, ait l'axe des s_1 à sa gauche, celui des s_2 à sa droite.

Dans cette représentation géométrique, chacune des surfaces coordonnées a pour lignes de courbure les deux axes qu'elle contient, et les centres de ses deux courbures sont situés sur la tangente au troisième axe. D'un autre côté, chaque axe étant une ligne de courbure, pour chacune des deux surfaces coordonnées dont il est l'intersection, cet axe doit être considéré comme offrant deux courbures différentes, mesurées dans les plans tangents à ces surfaces. Les six courbures réunies des trois axes sont d'ailleurs les mêmes que celles des surfaces coordonnées.

Le paramètre de chaque surface coordonnée ne varie que sur l'axe qui lui est normal; il reste constant sur les deux autres. Quant aux paramètres différentiels d'une même surface, ils varient en général sur les trois axes, et ce sont les grandeurs de ces variations elles-mêmes qui déterminent celles des six courbures (§ III). Lorsqu'on marche infiniment peu sur l'axe des s, par exemple, le paramètre intégral ρ de la surface des $s_1 s_2$ change, et le rapport de sa variation à l'arc parcouru donne précisément son paramètre différentiel du premier ordre (§ IV, première partie). Il suit de là que dans tous les changements d'équations, pour représenter une même famille de surfaces, le rapport de la différentielle du paramètre intégral au paramètre différentiel du premier ordre conserve la même valeur en chaque point (§ II, première partie).

§ III.

Soient ds, ds_1, ds_2, les arcs à parcourir sur les normales aux surfaces ρ, ρ_1, ρ_2, pour passer aux surfaces de même espèce infiniment voisines; da et $d\alpha$ les angles de contingence de l'arc ds dans deux plans tangents aux surfaces ρ_2 et ρ_1; da_1 et $d\alpha_1$ ceux de ds_1 dans les plans tangents aux surfaces ρ et ρ_2; da_2 et $d\alpha_2$, ceux de ds_2 dans les plans tangents aux surfaces ρ_1 et ρ; et soit posé

$$\begin{aligned} ds &= c.da = \gamma.d\alpha, \\ ds_1 &= c_1.da_1 = \gamma_1.d\alpha_1, \\ ds_2 &= c_2.da_2 = \gamma_2.d\alpha_2; \end{aligned}$$

(γ_1, c_2), (γ_2, c), (γ, c_1), seront les rayons de plus grande et de plus petite courbure des surfaces ρ, ρ_1, ρ_2.

Les équations du § I donnent, en désignant par x', y', z', les coordonnées du centre de courbure au rayon γ_1, de la ligne s_1 prise sur la surface ρ,

$$\frac{d\rho}{dz}\gamma_1 = h(z'-z),$$

$$(z'-z)\left(\frac{d\rho}{dx}\delta_1\frac{d\rho}{dz} - \frac{d\rho}{dz}\delta_1\frac{d\rho}{dx}\right) = \frac{d\rho}{dz}\left(\frac{d\rho}{dz}\delta_1 x - \frac{d\rho}{dx}\delta_1 z\right),$$

δ_1 indiquant la variation par rapport à ρ_1 seul. On déduit de là

$$\gamma_1\left(\frac{d\rho}{dx}\frac{d\frac{d\rho}{dz}}{d\rho_1} - \frac{d\rho}{dz}\frac{d\frac{d\rho}{dx}}{d\rho_1}\right) = h\left(\frac{d\rho}{dz}\frac{dx}{d\rho_1} - \frac{d\rho}{dx}\frac{dz}{d\rho_1}\right),$$

ou, d'après les formules (6) et (11),

$$\gamma_1\left[\frac{d\rho}{dx}\left(\frac{1}{h}\frac{dh}{d\rho_1}\frac{d\rho}{dz} - \frac{h^2}{h_1^3}\frac{dh_1}{d\rho}\frac{d\rho_1}{dz}\right) - \frac{d\rho}{dz}\left(\frac{1}{h}\frac{dh}{d\rho_1}\frac{d\rho}{dx} - \frac{h^2}{h_1^3}\frac{dh_1}{d\rho}\frac{d\rho_1}{dx}\right)\right] = \frac{h}{h_1^2}\left(\frac{d\rho}{dz}\frac{d\rho_1}{dx} - \frac{d\rho}{dx}\frac{d\rho_1}{dz}\right),$$

ou enfin, en réduisant,

$$\frac{1}{\gamma_1} = \frac{h}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho}.$$

Des calculs analogues au précédent conduiraient aux six équations :

$$(b)\qquad \begin{cases} \dfrac{h_1}{h}\dfrac{dh}{d\rho_1} = \dfrac{1}{c}, & \dfrac{h_2}{h_1}\dfrac{dh_1}{d\rho_2} = \dfrac{1}{c_1}, & \dfrac{h}{h_2}\dfrac{dh_2}{d\rho} = \dfrac{1}{c_2}, \\ \dfrac{h_2}{h}\dfrac{dh}{d\rho_2} = \dfrac{1}{\gamma}, & \dfrac{h}{h_1}\dfrac{dh_1}{d\rho} = \dfrac{1}{\gamma_1}, & \dfrac{h_1}{h_2}\dfrac{dh_2}{d\rho_1} = \dfrac{1}{\gamma_2}. \end{cases}$$

Si l'on a égard aux formules $ds = \frac{d\rho}{h}$, $ds_1 = \frac{d\rho_1}{h_1}$, $ds_2 = \frac{d\rho_2}{h_2}$, les six équations précédentes pourront s'écrire ainsi :

$$(b')\qquad \begin{cases} \dfrac{dh}{ds_1} = \dfrac{h}{c}, & \dfrac{dh_1}{ds_2} = \dfrac{h_1}{c_1}, & \dfrac{dh_2}{ds} = \dfrac{h_2}{c_2}, \\ \dfrac{dh}{ds_2} = \dfrac{h}{\gamma}, & \dfrac{dh_1}{ds} = \dfrac{h_1}{\gamma_1}, & \dfrac{dh_2}{ds_1} = \dfrac{h_2}{\gamma_2}. \end{cases}$$

Elles indiquent que les six rayons de courbure sont liés, par de simples proportions, aux premiers paramètres différentiels des surfaces conjuguées et à leurs variations. Il faut remarquer que les rayons de courbure déduits des équations (b) seront tantôt positifs, tantôt négatifs, suivant les signes des variations dont ils dépendent.

Les formules (24 *bis*) peuvent, d'après les équations (b), se mettre sous la forme

$$(c)\qquad \begin{cases} \dfrac{dh}{d\rho} - \dfrac{\Delta_2\rho}{h} = \dfrac{1}{\gamma_1} + \dfrac{1}{c_2}, \\ \dfrac{dh_1}{d\rho_1} - \dfrac{\Delta_2\rho_1}{h_1} = \dfrac{1}{\gamma_2} + \dfrac{1}{c}, \\ \dfrac{dh_2}{d\rho_2} - \dfrac{\Delta_2\rho_2}{h_2} = \dfrac{1}{\gamma} + \dfrac{1}{c_1}. \end{cases}$$

Ces équations expriment que la différence $\left(\dfrac{dh}{d\rho} - \dfrac{\Delta_2\rho}{h}\right)$, qui conserve la même valeur pour tous les paramètres de la même famille de surfaces (§ II, première partie), est égale à la somme des deux courbures de la surface individuelle passant au point que l'on considère.

§ IV.

Toutes les équations (16), (17), ... en H, H_1, H_2, peuvent être ex-

primées au moyen des six courbures et des arcs ds, ds_1, ds_2; elles sont alors complétement dégagées des paramètres différentiels, et énoncent autant de propriétés géométriques, communes à tous les systèmes conjugués de surfaces orthogonales. Pour démontrer ces propriétés, il faut transformer les équations (b) en H, H_1, H_2, ce qui donne

$$(b'')\quad \begin{cases} \dfrac{1}{H_1}\dfrac{dH}{d\rho_1} = -\dfrac{H}{c}, & \dfrac{1}{H_2}\dfrac{dH_1}{d\rho_2} = -\dfrac{H_1}{c_1}, & \dfrac{1}{H}\dfrac{dH_2}{d\rho} = -\dfrac{H_2}{c_2}. \\ \dfrac{1}{H_2}\dfrac{dH}{d\rho_2} = -\dfrac{H}{\gamma}, & \dfrac{1}{H}\dfrac{dH_1}{d\rho} = -\dfrac{H_1}{\gamma_1}, & \dfrac{1}{H_1}\dfrac{dH_2}{d\rho_1} = -\dfrac{H_2}{\gamma_2}. \end{cases}$$

La première des équations (16) [première ligne] devient alors successivement

$$\frac{d\frac{H}{c}}{d\rho_2} + \frac{H}{\gamma}\frac{H_2}{\gamma_2} = 0, \quad H\frac{d\frac{1}{c}}{d\rho_2} + \frac{1}{c}\frac{dH}{d\rho_2} + \frac{HH_2}{\gamma\gamma_2} = 0, \quad \frac{1}{H_2}\frac{d\frac{1}{c}}{d\rho_2} - \frac{1}{\gamma c} + \frac{1}{\gamma\gamma_2} = 0.$$

ou, en observant que $H_2\, d\rho_2 = \frac{d\rho_2}{h_2} = ds_2$,

$$\frac{d\frac{1}{c}}{ds_2} = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{\gamma_2}\right).$$

En répétant les mêmes calculs sur les autres équations (16), elles prennent une forme analogue, et l'on a pour les remplacer le groupe suivant :

$$(d)\quad \begin{cases} \dfrac{d\frac{1}{c}}{ds_2} = \dfrac{1}{\gamma}\left(\dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{\gamma_2}\right), & \dfrac{d\frac{1}{\gamma}}{ds_1} = \dfrac{1}{c}\left(\dfrac{1}{\gamma} - \dfrac{1}{c_1}\right), \\ \dfrac{d\frac{1}{c_1}}{ds} = \dfrac{1}{\gamma_1}\left(\dfrac{1}{c_1} - \dfrac{1}{\gamma}\right), & \dfrac{d\frac{1}{\gamma_1}}{ds_2} = \dfrac{1}{c_1}\left(\dfrac{1}{\gamma_1} - \dfrac{1}{c_2}\right), \\ \dfrac{d\frac{1}{c_2}}{ds_1} = \dfrac{1}{\gamma_2}\left(\dfrac{1}{c_2} - \dfrac{1}{\gamma_1}\right), & \dfrac{d\frac{1}{\gamma_2}}{ds} = \dfrac{1}{c_2}\left(\dfrac{1}{\gamma_2} - \dfrac{1}{c}\right). \end{cases}$$

De ces formules on déduit plusieurs autres qui méritent d'être citées.

telles sont les suivantes :

$$(e)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{\gamma_1}\frac{d\frac{1}{\gamma}}{ds_1} + \frac{1}{c}\frac{d\frac{1}{c_1}}{ds} = 0,\\
&\frac{1}{\gamma_2}\frac{d\frac{1}{\gamma_2}}{ds_2} + \frac{1}{c_1}\frac{d\frac{1}{c_2}}{ds_1} = 0,\\
&\frac{1}{\gamma}\frac{d\frac{1}{\gamma_2}}{ds} + \frac{1}{c_2}\frac{d\frac{1}{c}}{ds_2} = 0,\\
&\frac{d\frac{1}{\gamma^2}}{ds_1}\cdot\frac{d\frac{1}{\gamma_1^2}}{ds_2}\cdot\frac{d\frac{1}{\gamma_2^2}}{ds} = \frac{d\frac{1}{c^2}}{ds_2}\cdot\frac{d\frac{1}{c_1^2}}{ds}\cdot\frac{d\frac{1}{c_2^2}}{ds_1}.
\end{aligned}\right.$$

§ V.

Il faut remarquer que les six courbures semblent se partager en deux groupes distincts, le premier $\left(\frac{1}{c}, \frac{1}{c_1}, \frac{1}{c_2}\right)$, le second $\left(\frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\gamma_1}, \frac{1}{\gamma_2}\right)$. Il importe de définir ces groupes pour bien concevoir les propriétés exprimées par les formules (d) et (e), et par celles qui vont suivre. Si l'on se reporte à la représentation géométrique adoptée au § II, on voit que chaque groupe comprend l'une des deux courbures de chaque axe, et aussi l'une des deux courbures de chaque surface coordonnée. Les plans des cercles osculateurs de chaque groupe se coupent tous les trois à angle droit, et il est facile de voir qu'en séparant d'une autre manière les six courbures, on formerait des groupes qui ne jouiraient pas de cette propriété; car deux des cercles osculateurs de chacun d'eux auraient le même plan.

Ainsi il n'y a qu'une seule manière de séparer les six courbures en deux groupes, de telle manière que les plans des cercles osculateurs de chacun d'eux soient orthogonaux. Dans le groupe $\left(\frac{1}{c}, \frac{1}{c_1}, \frac{1}{c_2}\right)$, la courbure de l'axe des s est mesurée tangentiellement à la surface des $s_2 s$, et son centre est sur la tangente à l'axe s_2, placé par hypothèse à la droite de l'observateur; par cette raison, on peut donner à ce groupe la qua-

lification de *groupe de droite*. Dans le groupe $\left(\frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\gamma_1}, \frac{1}{\gamma_2}\right)$, la courbure de l'axe des s est mesurée tangentiellement à la surface des ss_1, et son centre est sur la tangente à l'axe s_1, placé à gauche de l'observateur; ce groupe sera désigné sous le nom de *groupe de gauche*.

§ VI.

J'emploierai l'expression de *courbures conjuguées en axe* ou *en surface*, pour désigner les deux courbures d'un même axe, ou celles d'une même surface coordonnée. Par exemple, $\frac{1}{\gamma}$ est la courbure conjuguée en axe de $\frac{1}{c}$, et $\frac{1}{\gamma_2}$ est sa courbure conjuguée en surface. Il est en outre permis d'appeler *plan d'une courbure*, celui de son cercle osculateur. Enfin je donnerai simplement le nom de *variation d'une quantité suivant une certaine ligne*, à la limite du rapport de l'accroissement de cette quantité à l'arc parcouru sur la ligne. Ces conventions établies :

Les six relations (d) sont toutes comprises dans cette loi : *la variation d'une courbure, suivant l'axe normal à son plan, est égale au produit de sa conjuguée en axe, par son excès sur sa conjuguée en surface.*

Les trois premières relations (e) sont réunies dans cette loi : *la somme algébrique des variations, des deux courbures d'une même surface coordonnée, prises normalement à leurs plans, et respectivement divisées par leurs conjuguées en axe, est toujours nulle.*

Enfin la dernière des relations (e) démontre que *si l'on prend séparément les variations, normales à leurs plans, des carrés des courbures formant le groupe de droite, et de celles composant le groupe de gauche, le produit des trois premières variations sera égal au produit des trois autres.*

§ VII.

Les équations (17) conduisent à d'autres propriétés géométriques. Les formules (b'') transforment ainsi la première :

$$\frac{d\frac{H}{c}}{ds_1} + \frac{d\frac{H}{\gamma_2}}{ds} = \frac{H}{\gamma}\frac{H_1}{c_1}, \quad H\frac{d\frac{1}{c}}{ds_1} + H_1\frac{d\frac{1}{\gamma_2}}{ds} + \frac{1}{c}\frac{dH}{ds_1} + \frac{1}{\gamma_2}\frac{dH_1}{ds} = \frac{H}{\gamma}\frac{H_1}{c_1};$$

et si l'on observe que $H_1 dp_1 = ds_1$, $H dp = ds$, on a simplement :

$$\frac{d\frac{1}{c}}{ds_1} + \frac{d\frac{1}{\gamma_1}}{ds} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{\gamma_1^2} + \frac{1}{\gamma c_1}.$$

Ainsi les équations (17) peuvent être remplacées par le groupe suivant :

$$(f)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\frac{1}{c}}{ds_1} + \frac{d\frac{1}{\gamma_1}}{ds} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{\gamma_1^2} + \frac{1}{\gamma c_1},\\ &\frac{d\frac{1}{c_2}}{ds} + \frac{d\frac{1}{\gamma}}{ds_2} = \frac{1}{c_2^2} + \frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\gamma_2 c},\\ &\frac{d\frac{1}{c_1}}{ds_2} + \frac{d\frac{1}{\gamma_2}}{ds_1} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{\gamma_2^2} + \frac{1}{\gamma_1 c_2}, \end{aligned}\right.$$

compris dans une même loi qu'on peut énoncer ainsi :

Le produit des deux courbures d'une même surface, augmenté de la somme des carrés de leurs conjuguées en axe, est égal à la somme des variations de ces deux dernières courbures, suivant leurs arcs réciproques.

§ VIII.

Si l'on multiplie la première des relations (*b*), premiere ligne, par $\frac{1}{\gamma_1}$, la seconde de la deuxième ligne par $\frac{1}{c}$, qu'on les ajoute ensuite, et qu'on opère d'une manière analogue sur les autres équations du même groupe, on obtient les nouvelles formules

$$(g)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{c_1}\right)\frac{1}{c\gamma_1} - \frac{d\frac{1}{c\gamma_1}}{ds_2} = \left(\frac{1}{\gamma_2} + \frac{1}{c}\right)\frac{1}{c_2\gamma} - \frac{d\frac{1}{c_2\gamma}}{ds_1}\\ &\quad = \left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{c_2}\right)\frac{1}{c_1\gamma_2} - \frac{d\frac{1}{c_1\gamma_2}}{ds} = \frac{1}{cc_1c_2} + \frac{1}{\gamma\gamma_1\gamma_2}, \end{aligned}\right.$$

lesquelles remplacent celles (18).

D'après ces formules, *si l'on multiplie la somme des courbures de chaque surface coordonnée par le produit de leurs conjuguées en axe, et qu'on retranche ensuite la variation de ce dernier produit suivant l'axe normal à la surface, on aura trois différences, lesquelles seront égales entre elles.* De plus, *si l'on forme le produit des trois courbures de chaque groupe de droite et de gauche, la somme des deux produits obtenus sera la valeur commune de ces différences.*

§ IX.

Lorsque les surfaces conjuguées orthogonales sont toutes dans la classe des surfaces isothermes, les lois exprimées par les formules (*g*) sont remplacées par d'autres plus simples. Pour faire voir en quoi consiste cette simplification, il faut revenir d'abord aux formules de la première partie.

Une famille de surfaces, au paramètre ρ, est dite *isotherme*, lorsque le rapport $\left(\frac{\Delta_2\rho}{h^2}\right)$ du second paramètre différentiel au carré du premier est une fonction du paramètre intégral ρ (§ I, première partie). Or il est facile de voir, d'après les considérations du § II (première partie), que si l'on met cette fonction sous la forme $\frac{d^2.F(\rho)}{d\rho^2} : \frac{d.F(\rho)}{d\rho}$, et qu'on prenne pour nouveau paramètre de la même famille $\varepsilon = F(\rho)$, le second paramètre différentiel $\Delta_2\varepsilon$ sera nul.

On peut donc dire qu'une famille de surfaces isothermes est telle, qu'en choisissant convenablement son paramètre intégral, son second paramètre différentiel est nul. D'après cela, si les trois systèmes conjugués sont isothermes, on pourra supposer que leurs paramètres ρ, ρ_1, ρ_2, ont été choisis de telle manière que

$$\Delta_2\rho = 0, \qquad \Delta_2\rho_1 = 0, \qquad \Delta_2\rho_2 = 0;$$

les équations (24) donneront alors

$$\frac{d\frac{h}{h_1h_2}}{d\rho} = 0, \qquad \frac{d\frac{h_1}{h_2h}}{d\rho_1} = 0, \qquad \frac{d\frac{h_2}{hh_1}}{d\rho_2} = 0.$$

ou bien

$$\frac{d\frac{H_1 H}{H}}{d\rho_2} = 0, \qquad \frac{d\frac{H_2 H}{H_1}}{d\rho_1} = 0, \qquad \frac{d\frac{H H_1}{H_2}}{d\rho_2} = 0;$$

de telle sorte que si l'on pose

$$H_1 H_2 = HQ^2, \qquad H_2 H = H_1 Q_1^2, \qquad H H_1 = H_2 Q_2^2,$$

d'où il est facile de conclure

$$H = Q_1 Q_2, \qquad H_1 = Q_2 Q, \qquad H_2 = Q Q_1;$$

la fonction Q sera indépendante de ρ, Q_1 de ρ_1, Q_2 de ρ_2.

§ X.

Or il suit des valeurs précédentes de H, H_1, H_2, que, par exemple,

$$\frac{1}{H_1}\frac{dH}{d\rho_1}\frac{1}{H}\frac{dH_1}{d\rho} = \frac{1}{Q_1^2}\frac{dQ_2}{d\rho_1}\frac{dQ_1}{d\rho},$$

c'est-à-dire que le résultat est indépendant de ρ_2, ou que

$$\frac{d\frac{1}{H_1}\frac{dH}{d\rho_1}\frac{1}{H}\frac{dH_1}{d\rho}}{d\rho_2} = 0.$$

D'où l'on conclut, d'après les formules (18),

$$\frac{dH}{d\rho_1}\frac{dH_1}{d\rho}\frac{dH_2}{d\rho_2} + \frac{dH}{d\rho_2}\frac{dH_1}{d\rho_1}\frac{dH_2}{d\rho} = 0,$$

et par suite, d'après les formules (b''),

$$(i) \qquad \frac{1}{cc_1c_2} + \frac{1}{zz_1z_2} = 0.$$

Ainsi, dans le cas où les surfaces conjuguées appartiennent toutes à

la classe des surfaces isothermes les relations (g) donnent

$$(j)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{cc_1c_2} + \dfrac{1}{\gamma\gamma_1\gamma_2} = 0, \\[2ex] \dfrac{1}{\gamma} + \dfrac{1}{c_1} = \dfrac{d.\log\dfrac{1}{c\gamma_1}}{ds_2}, \quad \dfrac{1}{\gamma_2} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{d.\log\dfrac{1}{c_2\gamma}}{ds_1}, \quad \dfrac{1}{\gamma_1} + \dfrac{1}{c_2} = \dfrac{d.\log\dfrac{1}{c_1\gamma}}{ds}. \end{cases}$$

C'est-à-dire qu'abstraction faite de leurs signes, *le produit de trois des six rayons de courbure, pris dans un certain ordre, est égal au produit des trois autres*. De plus, les trois différences définies à la fin du § VIII sont nulles, ou autrement : *la somme des deux courbures de chaque surface est égale à la variation du logarithme népérien du produit de leurs conjuguées en axe, prise normalement à la surface.*

§ XI.

Dans le cas particulier où l'un des trois systèmes conjugués, que nous ne supposerons plus isothermes, serait une famille de plans parallèles, les deux autres systèmes seraient des surfaces cylindriques orthogonales. Il n'y aurait plus alors que deux courbures à considérer en chaque point, les quatre autres étant nulles, ou leurs rayons infinis. Les surfaces cylindriques, conjuguées entre elles et aux plans parallèles, traceraient sur chacun de ces plans des courbes orthogonales, dont le système serait d'ailleurs identique d'un plan à l'autre.

Dans ce cas particulier, toutes les relations des paragraphes précédents deviennent identiques, à l'exception d'une seule qui exprime une propriété commune à tous les systèmes de courbes planes, conjuguées et orthogonales.

En effet, supposons que ce soient les surfaces au paramètre ρ_2 qui deviennent des plans parallèles. On a alors $H_2 = 1$; H et H_1 sont indépendants de ρ_2; les formules (b'') donnent

$$\frac{1}{c_1} = 0, \quad \frac{1}{c_2} = 0, \quad \frac{1}{\gamma} = 0, \quad \frac{1}{\gamma_2} = 0,$$

et

$$\frac{1}{c} = -\frac{1}{HH_1}\frac{dH}{ds_2}, \quad \frac{1}{\gamma_1} = -\frac{1}{HH_1}\frac{dH_1}{ds_2};$$

toutes les équations (d), (e), (g) sont identiquement satisfaites, ainsi que les deux dernières du groupe (f) : il ne reste plus que la première de ce groupe, qui devient

$$(k) \qquad \frac{d\frac{1}{c}}{ds_1} + \frac{d\frac{1}{\gamma_1}}{ds} = \left(\frac{1}{c}\right)^2 + \left(\frac{1}{\gamma_1}\right)^2.$$

C'est-à-dire que *dans tout système de lignes planes orthogonales, la somme des variations des courbures des deux lignes, suivant leurs arcs réciproques, est égale à la somme des carrés de ces courbures mêmes.*

ADDITION

à la Note sur l'équation $x^7 + y^7 + z^7 = 0$:

Par M. V.-A. LEBESGUE [*].

M. Liouville vient de me communiquer une lettre de M. Lamé, relative à la Note dont il s'agit.

« J'ai vu avec tout le soin possible, dit M. Lamé, la démonstration » de M. Lebesgue ; mais j'ai été arrêté sur un point qu'il importe d'é- » claircir : vous savez qu'au commencement il y a quatre décomposi- » tions, desquelles trois se trouveraient absurdes, suivant l'auteur, » parce que leurs seconds membres seraient de la forme $4k+3$; or l'un » de ces cas, le troisième des quatre, conduit à l'équation

$$q^2 - 2^{a-1}.3.7^4 t^2 s^2 = 2^{4a-4}.s^4 - 7^7 t^4.$$

» et puisque a, plus grand que 1, est au moins 2, que q, t, s, sont im- » pairs, le premier membre est $\equiv +1$ (mod. 8), et le second membre » (qui devrait être de la forme $4k+3$, d'après M. Lebesgue), est

$$\equiv -7^7 \text{ mod. } 8 \equiv -(8-1)^7 \equiv -(-1)^7 \equiv +1 :$$

» ainsi, le second membre est, comme le premier, de la forme $8i+1$, » ou $4k+1$.

» D'après cela, il y a un autre cas à considérer, etc. »

L'objection de M. Lamé est très fondée. Elle porte, comme on voit, sur le troisième des quatre cas indiqués à la ligne 4 de la page 277 de ce volume. Heureusement j'ai reconnu qu'on peut aisément compléter ma démonstration, et prouver d'une manière simple que le système d'équations

[*] Voir le Cahier d'août, page 276.

$$p+q^2-2^{2a-1}.3.7^4t^2s^2=2^{4a-3}s^4,\quad p-q^2+2^{a-1}.3.7^4t^2s^2=2.7^7t^4,$$

où p, q, t, s, sont des nombres impairs premiers entre eux et a un entier positif est impossible.

En effet, les deux équations précédentes donnent

$$q^2-2^{2a-1}.3.7^4t^2s^2=2^{4a-4}s^4-7^7t^4,$$

ou

$$(2^{2a-2}s^2+3.7^4t^2)^2-q^2=2^6.7^7.t^4.$$

Si l'on pose $t=uv$ en représentant par u et v des entiers impairs premiers entre eux, on aura les deux décompositions

$$2^{2a-2}s^2+3.7^4t^2\pm q=2v^4,\qquad \text{ou}\quad =2.7^7v^4,$$
$$2^{2a-2}s^2+3.7^4t^2\mp q=2^5.7^7u^4,\qquad \text{ou}\quad =2^5.u^4$$

La première donne

$$2^{2a-2}s^2=v^4-3.7^4.u^2v^2+2^4.7^7u^4,$$

équation impossible, son second membre ayant la forme $4k+2$.

La seconde donne

$$2^{2a-2}s^2=7^7v^4-3.7^4u^2v^2+2^4u^4;$$

si l'on multiplie les deux membres par 2^6, on aura

$$2^{2a+4}s^2-(2^5u^2-3.7^4v^2)^2=7^7v^4.$$

Posant $v=m.n$, les nombres impairs m, n, étant premiers entre eux, on a les décompositions

$$2^{a+2}s\pm(2^5u^2-3.7^4.v^2)=m^4,\quad 2^{a+2}s\mp(2^5.u^2-3.7^4.v^2)=7^7n^4,$$

d'où par addition

$$2^{a+3}s=m^4+7^7n^4.$$

Mais m^4, n^4 ont la forme $16k+1$, $7^7=7(3.16+1)^3=16g+7$; le deuxième membre a donc la forme $16k+8$, c'est-à-dire qu'il est seulement divisible par 2^3, tandis que le premier membre l'est par 2^{a+3}. Il est donc démontré que le système en question est impossible.

LETTRE

ADRESSÉE A M. LE PRÉSIDENT DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES;

PAR M. JACOBI [*].

M. de Humboldt vient de me communiquer un fragment d'une Notice biographique sur M. Poisson, dont la lecture m'a donné envie d'adresser à vous, Monsieur, et à votre illustre Académie, quelques remarques sur la plus profonde découverte de M. Poisson, mais qui, je crois, n'a été bien comprise ni par Lagrange, ni par les nombreux géomètres qui l'ont citée, ni par son auteur lui-même. Le théorème dont je parle me semble être le plus important de la mécanique et de cette partie du calcul intégral qui s'attache à l'intégration d'un système d'équations différentielles ordinaires; toutefois, on ne le trouve ni dans les Traités de calcul intégral, ni dans la *Mécanique analytique*. Comme ce théorème ne servait qu'à établir une autre proposition dont Lagrange avait donné une démonstration plus simple, celui-ci n'en parlait dans sa *Mécanique analytique* que comme d'une preuve d'une grande force analytique, sans trouver nécessaire de le faire entrer dans cet ouvrage. Et depuis, tout le monde ne le regardant que comme un théorème auxiliaire remarquable par la difficulté de le prouver, et personne ne l'examinant en lui-même, ce théorème vraiment prodigieux, et jusqu'ici sans exemple, est resté en même temps découvert et caché.

Le théorème en question, énoncé convenablement, est le suivant :

« Un nombre quelconque de points matériels étant tirés par des » forces et soumis à des conditions telles, que le principe de la conser- » vation des forces vives ait lieu, si l'on connaît, outre l'intégrale [**]

[*] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, tome XI, page 529.

[**] Je nomme intégrale une équation $u = const.$ telle que sa différentielle $du = 0$ soit vérifiée identiquement par le système des équations différentielles proposées, sans avoir recours en aucune façon aux équations intégrales.

» fournie par ce principe, deux autres intégrales, on en peut déduire
» une troisième d'une manière directe et sans même employer des qua-
» dratures. »

En poursuivant le même procédé on pourra trouver une quatrième, une cinquième intégrale, et, en général, on parviendra de cette manière à déduire des deux intégrales données toutes les intégrales, ou, ce qui revient au même, l'intégration complète du problème. Dans des cas particuliers, on retombera sur une combinaison des intégrales déjà trouvées, avant qu'on soit parvenu à toutes les intégrales du problème, mais alors les deux intégrales données jouissent de propriétés particulières desquelles on peut tirer un autre profit pour l'intégration des équations dynamiques proposées. C'est ce qu'on verra dans un ouvrage auquel je travaille depuis plusieurs années, et dont peut-être je pourrai bientôt faire commencer l'impression.

Note de l'Éditeur.

On appréciera facilement la justesse et l'importance de la remarque de M. Jacobi. C'est dans son premier Mémoire sur la *variation des constantes* (*Journal de l'École Polytechnique*, XVme cahier, page 280) que M. Poisson arrive à l'équation

$$\frac{db}{ds}\cdot\frac{da}{d\varphi}-\frac{da}{ds}\cdot\frac{db}{d\varphi}+\ldots=\textit{constante},$$

sur laquelle portent les réflexions du célèbre géomètre allemand. M. Poisson ajoute ensuite : « On conçoit que la constante qui fait le second membre de cette équation, sera
» en général une fonction de a, b, et des constantes arbitraires contenues dans les au-
» tres intégrales des équations du mouvement; quelquefois il pourra arriver que sa va-
» leur ne renferme ni la constante a, ni la constante b; dans d'autres cas elle ne con-
» tiendra aucune constante arbitraire, et se réduira à une constante déterminée. » Mais il ne parle nullement de l'utilité que son équation pourra présenter quelquefois en faisant connaître de nouvelles intégrales.

En général, l'équation

$$\frac{db}{ds}\cdot\frac{da}{d\varphi}-\frac{da}{ds}\cdot\frac{db}{d\varphi}+\ldots=\textit{constante}$$

conduit à une intégrale des équations différentielles dont on s'occupe. Mais il peut arriver aussi qu'elle soit identique ou qu'elle rentre dans les intégrales déjà connues. Par

exemple, en partant de deux équations fournies par le principe des aires, on est conduit d'abord à la troisième; mais en continuant à appliquer le même procédé, on ne retombe plus que sur des résultats déjà obtenus.

Tous les géomètres verront avec plaisir M. Jacobi annoncer la publication prochaine du grand ouvrage qu'il prépare depuis plusieurs années sur la Mécanique analytique. Les fragments que l'auteur a laissé échapper à diverses reprises [*] montrent suffisamment que cet ouvrage soutiendra ou même augmentera encore la gloire de son illustre auteur.

Desireux de faire passer dans l'enseignement quelques-unes des belles découvertes de M. Jacobi, j'ai rédigé depuis long-temps la Note suivante, relative à l'un de ses théorèmes. Cette Note a servi de texte à une de mes leçons. Bien que le cas particulier auquel elle se rapporte ait été déjà traité par M. Poisson, dans ce Journal même (tome II, page 334), peut-être quelques lecteurs la verront encore avec intérêt. La marche que je suis n'est pas tout-à-fait la même, et les équations différentielles dont je m'occupe sont un peu plus générales. Je prends pour point de départ un théorème bien connu, savoir que si X, X′, etc., sont des fonctions de t, x, x', etc., toute intégrale $\varphi(t, x, x', \ldots) = constante$ du système d'équations

$$\frac{dx}{dt} = \mathrm{X}, \quad \frac{dx'}{dt} = \mathrm{X}', \ldots$$

devra donner l'équation identique

$$\frac{d\varphi}{dt} + \mathrm{X}\frac{d\varphi}{dx} + \mathrm{X}'\frac{d\varphi}{dx'} + \ldots = 0.$$

Réciproquement si l'on a une fonction φ des variables $t, x, x', \ldots$ satisfaisant à l'équation aux différentielles partielles que je viens d'écrire, $\varphi = constante$ sera une intégrale du système $\frac{dx}{dt} = \mathrm{X}$, $\frac{dx'}{dt} = \mathrm{X}', \ldots$ De là naît une méthode d'intégration dont Laplace a donné un bel exemple dans la *Mécanique céleste*, et dont M. Cauchy a beaucoup étendu l'usage dans ces derniers temps.

J'entre en matière.

Soit t une variable indépendante. Désignons par x, x', y, y' quatre fonctions de t qui doivent satisfaire aux quatre équations différentielles du premier ordre

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = \lambda\frac{d\mathrm{U}}{dx'}, \quad \frac{dx'}{dt} = -\lambda\frac{d\mathrm{U}}{dx}, \quad \frac{dy}{dt} = \lambda\frac{d\mathrm{U}}{dy'}, \quad \frac{dy'}{dt} = -\lambda\frac{d\mathrm{U}}{dy},$$

---

[*] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, tome III, page 59, et tome V, page 61. — Tome III de ce Journal, pages 44 et 60.

dans lesquelles U est une fonction donnée de x, x', y, y', tandis que λ est une autre fonction donnée aussi de x, x', y, y' et t. $U = constante = a$ sera évidemment une des intégrales du système des équations (1). Supposons que $V = b$ soit une seconde intégrale du même système, V étant une fonction de x, x', y, y', et b une constante arbitraire, c'est-à-dire supposons que V satisfasse identiquement à l'équation aux différences partielles

$$(2)\qquad \frac{dV}{dx}\cdot\frac{dU}{dx'} - \frac{dV}{dx'}\cdot\frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy}\cdot\frac{dU}{dy'} - \frac{dV}{dy'}\cdot\frac{dU}{dy} = 0,$$

puis proposons de trouver les deux autres intégrales qu'il faut joindre aux deux precedentes pour déterminer complétement x, x', y, y', en fonction de t.

Pour cela observons d'abord que des deux équations $U = a$, $V = b$, on peut tirer les valeurs de deux des quatre quantités x, x', y, y', de x' et y' par exemple, en fonction des deux autres et des constantes arbitraires a, b. En portant ces valeurs de x' et y' dans la première et la troisième des équations (1), ces équations, savoir

$$(3)\qquad \frac{dx}{dt} = \lambda\frac{dU}{dx'},\quad \frac{dy}{dt} = \lambda\frac{dU}{dy'},$$

ne seront plus qu'à trois variables, et pour que $\varphi = constante$ en soit une intégrale, il suffira que l'on ait

$$(4)\qquad \frac{d\varphi}{dt} + \lambda\left(\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{dU}{dx'} + \frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{dU}{dy'}\right) = 0,$$

si φ contient x, y et t; il suffira même que l'on ait plus simplement

$$(5)\qquad \frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{dU}{dx'} + \frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{dU}{dy'} = 0,$$

si φ est une fonction de x et y, indépendante de t.

Admettons maintenant (ce qui sera démontré plus bas) que $x'dx + y'dy$ est une différentielle exacte, en sorte que l'on a

$$\int(x'\,dx + y'\,dy) = \theta,\quad \text{ou}\quad x' = \frac{d\theta}{dx},\quad y' = \frac{d\theta}{dy},$$

θ étant une certaine fonction de x et y; en différentiant l'équation $U = a$ par rapport à la constante arbitraire b dont x' et y' dépendent, il nous viendra

$$\frac{dU}{dx'}\cdot\frac{dx'}{db} + \frac{dU}{dy'}\cdot\frac{dy'}{db} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d\left(\frac{d\theta}{db}\right)}{dx}\cdot\frac{dU}{dx'} + \frac{d\left(\frac{d\theta}{db}\right)}{dy}\cdot\frac{dU}{dy'} = 0;$$

donc l'équation (5) sera satisfaite par $\varphi = \frac{d\theta}{db}$; donc aussi $\frac{d\varphi}{db} = \textit{constante} = \varphi$ sera une intégrale des équations (3) et par suite des équations (1).

Si λ est une fonction de t seulement, on trouvera aisement une quatrième intégrale. Différentions en effet par rapport à a l'équation $U = a$; nous aurons, en multipliant par λ,

$$-\lambda + \lambda\left(\frac{dU}{dx'}\cdot\frac{dx'}{da} + \frac{dU}{dy'}\cdot\frac{dy'}{da}\right) = 0,$$

ou

$$-\lambda + \lambda\left\{\frac{d\left(\frac{d\theta}{da}\right)}{dx}\cdot\frac{dU}{dx'} + \frac{d\left(\frac{d\theta}{da}\right)}{dy}\cdot\frac{dU}{dy'}\right\} = 0.$$

d'où il suit que l'équation (4) sera satisfaite par $\varphi = \frac{d\theta}{da} - \int \lambda dt$, et que par conséquent, α étant une constante arbitraire, la dernière intégrale cherchée des équations (3) et (1) sera

$$\frac{d\theta}{da} = \int \lambda\, dt + \alpha$$

Mais lorsque λ ne se réduit pas à une simple fonction de t, on doit se borner à tirer des trois intégrales connues les valeurs de trois des quantités x, x', y, y', des trois dernières par exemple, pour les reporter dans la première des équations (1) qui ne sera plus qu'à deux variables et dont il restera à trouver l'intégrale complète.

Il faut maintenant prouver le théorème admis plus haut, savoir que $x'dx + y'dy$ est une différentielle exacte, ou que $\frac{dx'}{dy} = \frac{dy'}{dx}$. Or les équations $U = a$, $V = b$, ayant fourni par hypothèse les valeurs de x', y', en fonction de x et y, devront fournir aussi celles de $\frac{dx'}{dy}$ et de $\frac{dy'}{dx}$; pour avoir $\frac{dy'}{dx}$, il faut différentier, par rapport à x, les deux équations $U = a$, $V = b$, puis résoudre par la règle ordinaire les deux équations nouvelles

$$\frac{dU}{dx} + \frac{dU}{dx'}\cdot\frac{dx'}{dx} + \frac{dU}{dy'}\cdot\frac{dy'}{dx} = 0,$$

$$\frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dx'}\cdot\frac{dx'}{dx} + \frac{dV}{dy'}\cdot\frac{dy'}{dx} = 0,$$

que cette différentiation produit. On trouve ainsi

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dV}{dx}\cdot\frac{dU}{dx'} - \frac{dV}{dx'}\cdot\frac{dU}{dx}}{\frac{dV}{dx'}\cdot\frac{dU}{dy'} - \frac{dV}{dy'}\cdot\frac{dU}{dx'}}.$$

En différentiant par rapport à y, on obtient de même

$$\frac{dx'}{dy} = \frac{\frac{dV}{dy'}\frac{dU}{dy} - \frac{dV}{dy}\cdot\frac{dU}{dy'}}{\frac{dV}{dx'}\frac{dU}{dy'} - \frac{dV}{dy'}\cdot\frac{dU}{dx'}}.$$

Or, en vertu de l'équation (2), ces deux valeurs sont égales entre elles; ce qu'il fallait démontrer.

On prouverait de la même manière qu'en supposant x et y déterminés en fonction de x' et y' par les équations $U = a$, $V = b$, la quantité $x\,dx' + y\,dy'$ est une différentielle exacte, et ce nouveau théorème pourrait remplacer l'ancien dans la recherche des intégrales du système (1).

On peut, comme l'a observé M. Jacobi, appliquer les formules précédentes au cas d'un mobile qui se meut dans un plan, et qui est soumis à des actions fonctions des distances, émanant de deux centres fixes situés dans ce plan. En représentant par $\frac{dR}{dr}$, $\frac{dQ}{dq}$, les fonctions des distances r et q par lesquelles ces actions sont exprimées, on a ici les deux équations

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dR}{dx} - \frac{dQ}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dy},$$

que l'on remplacera, si l'on veut, par les quatre suivantes :

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dx'}{dt} = -\frac{d(R+Q)}{dx}, \quad \frac{dy}{dt} = y', \quad \frac{dy'}{dt} = -\frac{d(R+Q)}{dy};$$

ces dernières se déduisent du système (1) en posant $\lambda = 1$, $U = \frac{x'^2 + y'^2}{2} - R - Q$. Or on voit dans la *Mécanique analytique* (tome II, page 108), qu'outre l'intégrale $U = a$ des forces vives, il est très facile de trouver une seconde intégrale $V = b$; les deux autres intégrales cherchées se déduiront donc des formules de M. Jacobi.

— —

SUR LES CONDITIONS DE CONVERGENCE

D'UNE CLASSE GÉNÉRALE DE SÉRIES;

PAR J. LIOUVILLE [*].

On connaît assez les difficultés que présente dans un grand nombre de cas la théorie des suites infinies, à laquelle cependant on est forcé chaque jour de recourir pour résoudre les problèmes de mécanique céleste et de physique mathématique. Aussi, depuis plus de deux siècles, les géomètres en ont fait un des objets principaux de leurs méditations. Notre savant confrère, M. Cauchy, s'en est surtout occupé avec succès : il y est revenu plusieurs fois, en employant des méthodes diverses, et si les théorèmes qu'il a donnés ne suffisent pas encore pour épuiser la question, c'est qu'elle est vraiment de sa nature inépuisable.

Un des plus beaux résultats que l'on ait obtenus en ce genre de recherches consiste dans une relation singulière entre les conditions de convergence de quelques séries et la résolution numérique de certaines équations transcendantes. Déjà Laplace avait fait voir que les séries à l'aide desquelles, dans la théorie du mouvement elliptique des planètes, on développe le rayon vecteur et l'anomalie vraie suivant les puissances croissantes de l'excentricité, sont convergentes tant que l'excentricité ne dépasse pas une certaine limite; il avait montré qu'en supposant, pour plus de simplicité, l'anomalie moyenne égale à un angle droit, cette limite dépend de la résolution d'une équation transcendante dans laquelle entre la base des logarithmes népériens. Depuis, M. Cauchy a retrouvé et beaucoup étendu cette importante proposition : l'analyse élégante et rigoureuse dont il s'est servi lui a fourni des règles

[*] Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, tome XI, page 615.

commodes pour la convergence des séries qui proviennent de l'application de la formule de Lagrange et des autres formules analogues employées par les géomètres pour développer les racines des équations.

Dans le Mémoire que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie, je me propose d'abord de discuter une série assez remarquable dont la convergence ou la divergence dépend aussi du rapport de grandeur existant entre le module du paramètre suivant les puissances duquel elle est ordonnée et une certaine racine d'une équation transcendante déterminée. L'équation dont je parle a une infinité de racines positives; c'est tantôt la première, tantôt la seconde, tantôt la $m^{ième}$ de ces racines qu'il faut considérer. La convergence a lieu tant que le module du paramètre est inférieur à cette première, seconde, ou $m^{ième}$ racine : au-delà la série devient divergente. Je traite ensuite par les mêmes principes d'autres séries plus compliquées. On verra peut-être avec intérêt reparaître dans ces problèmes d'analyse pure, auxquels elles semblent d'abord étrangères, ces intégrales d'équations différentielles du second ordre, dont nous sommes tant occupés M. Sturm et moi, et qui jouent un rôle si important dans la théorie de la chaleur et dans celle des corps élastiques.

Soit x une variable réelle comprise entre deux limites x, X : désignons par φ et g deux fonctions de x, qui ne deviennent jamais infinies, et dont la première est quelconque, tandis que la seconde est essentiellement positive. Faisons

$$\varphi_1 = \int_x^x dx \int_X^x g\varphi dx \ldots \quad \varphi_{n+1} = \int_x^x dx \int_X^x g\varphi_n dx \ldots$$

et soit proposée la série

$$\varphi + \alpha\varphi_1 + \alpha^2\varphi_2 + \ldots + \alpha^n\varphi_n + \ldots$$

Voici la règle à l'aide de laquelle on détermine les cas de convergence ou de divergence de cette série.

Considérons la fonction V qui satisfait à l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{d^2V}{dx^2} + gV = 0,$$

et aux conditions définies

$$V = 0, \quad \frac{dV}{dr} = 1, \quad \text{pour} \quad x = X :$$

V sera une fonction $V(x, r)$ de x et de r. Maintenant déterminons r en posant

$$\frac{dV(X, r)}{dX} = \varpi(r) = 0;$$

l'équation $\varpi(r) = 0$ aura une infinité de racines $r_1, r_2, \ldots r_n, \ldots$ que nous supposons ici rangées par ordre de grandeur, et qui sont toutes réelles et positives.

Cela posé, formons le produit

$$V \int_x^X gV\varphi dx,$$

où x conserve hors du signe $\int$ la valeur déterminée entrant actuellement dans $\varphi + \alpha\varphi_1 +$ etc.; puis faisons successivement $r = r_1$, $r = r_2 \ldots$ dans ce produit, et désignons par r_m la première racine pour laquelle il ne s'évanouit pas. La série $\varphi + \alpha\varphi_1 + \alpha^2\varphi_2 + \ldots$ est convergente quand le module du paramètre α est inférieur à r_m, et divergente dans le cas contraire.

Quant à la somme de la série $\varphi + \alpha\varphi_1 +$ etc., elle est évidemment égale à $\varphi + \alpha s$, s désignant une fonction de x et de α qui satisfait à la fois à l'équation indéfinie

$$\frac{d^2 s}{dx^2} - \alpha g s = g\mathcal{T}$$

et aux conditions définies

$$s = 0 \quad \text{pour} \quad x = X, \qquad \frac{ds}{dx} = 0 \quad \text{pour} \quad x = X.$$

Une fonction $\psi(\alpha)$ est développable en série convergente ordonnée suivant les puissances entières et positives de α, tant que le module de α reste inférieur au plus petit des modules de z pour lesquels une des deux fonctions $\psi(z)$, $\frac{d\psi(z)}{dz}$, cesse d'être finie et continue. Comme les

formules dont s dépend ne sont pas trop compliquées, on peut appliquer à la série $\varphi + \alpha\varphi_1 +$ etc., ce théorème de M. Cauchy, et l'on retombe (je m'en suis assuré) sur la règle indiquée plus haut. Mais la méthode que j'expose de préférence dans mon Mémoire est différente : elle a l'avantage de fournir une expression très simple et très approchée de φ_n, lorsque l'indice n est très grand. D'ailleurs elle s'étend d'elle-même à une foule de séries dont la somme ne peut être trouvée par aucun moyen connu. Elle ramène par exemple l'étude de la série

$$A\varphi + A_1\varphi_1 + A_2\varphi_2 + \ldots + A_n\varphi_n + \ldots$$

à celle de la série plus simple

$$A + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + A_n z^n + \ldots$$

On peut obtenir beaucoup d'autres théorèmes du même genre, soit en conservant entre φ_n et φ_{n+1} une relation de la forme

$$\varphi_{n+1} = \int dx \int g\varphi_n dx,$$

mais déterminant autrement les deux constantes relatives aux deux intégrations indiquées, soit en établissant entre φ_n et φ_{n+1} une relation plus compliquée et contenant le signe $\int$ un plus grand nombre de fois.

Sur l'équation $Z^{2n} - Y^{2n} = 2x^n$;

PAR J. LIOUVILLE.

« Si l'équation $u^n + v^n = w^n$ est impossible en nombres entiers dif-
» férents de zéro, l'équation $Z^{2n} - Y^{2n} = 2x^n$ le sera également. »

En effet, l'impossibilité de l'équation $u^n + v^n = w^n$ entraîne, comme M. Lebesgue l'a fait voir (page 184 de ce volume), celle de l'équation $x^{2n} + y^{2n} = z^2$. Or si l'on avait $Z^{2n} - Y^{2n} = 2x^n$, en posant $Y^{2n} + x^n = z$, il viendrait $Z^{2n} - x^n = z$; on trouverait donc à la fois

$$z - x^n = Y^{2n}, \qquad z + x^n = Z^{2n},$$

d'où, en multipliant membre à membre et faisant pour abréger $YZ = y$, l'on tire

$$x^{2n} + y^{2n} = z^2,$$

résultat impossible. Donc l'équation proposée $Z^{2n} - Y^{2n} = 2x^n$ est impossible aussi. Elle l'est même pour $n = 2$, puisque alors elle conduit à la formule inadmissible $x^4 + y^4 = z^2$. Le théorème que je viens de démontrer est en lui-même très peu important; mais il se présente et paraît devoir être utile dans certaines questions relatives à la théorie des nombres : c'est ce qui m'a engagé à le donner ici.

MÉMOIRE

SUR LES INÉGALITÉS SÉCULAIRES

DES ÉLÉMENTS DES PLANÈTES;

PAR M. J. BINET,

Professeur au Collège de France.

Les recherches suivantes sont principalement relatives aux inégalités séculaires des excentricités, des inclinaisons, des longitudes des périhélies et des nœuds des orbites; elles exigent que l'on ait sous les yeux les équations différentielles qui servent à déterminer ces variations. Je vais rapporter ces équations, que l'on doit à Lagrange et à Laplace. Pour les former, j'emploierai la méthode suivie par Lagrange, et qu'il a déduite, comme application, de sa théorie de la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de mécanique. Dans cette nouvelle exposition, Lagrange est parvenu à plusieurs résultats généraux remarquables, et sur lesquels doivent s'appuyer les propositions que je me propose d'établir. Je supposerai toujours l'approximation bornée à la première dimension des forces perturbatrices.

1. Soient m la masse d'une planète,
$2a$ le grand axe de son orbite,
ε l'époque de l'anomalie moyenne,
e l'excentricité,
ϖ la longitude de son périhélie,
γ l'inclinaison de l'orbite sur un plan fixe,
θ la longitude de son nœud sur ce plan;

on posera encore, pour simplifier les équations différentielles qui doivent déterminer les quatre derniers éléments,

$$h = e \sin \varpi, \qquad l = e \cos \varpi;$$
$$p = \gamma \sin \theta, \qquad q = \gamma \cos \theta.$$

e et γ seront regardés comme des quantités assez petites pour que l'on néglige les puissances supérieures relativement aux inférieures. On dénotera, selon l'usage, par m', a', e', etc.; m'', a'', etc., les quantités analogues relatives aux autres planètes.

Les équations différentielles dont dépendent les quantités h, l, h', l', etc., p, q, p', q', etc., exigent, pour leur formation, que l'on compose en premier lieu deux fonctions distinctes de ces éléments, savoir :

$$\mathrm{H} = \tfrac{1}{2} \sum mm' \{[a, a'](h^2 + h'^2 + l^2 + l'^2) - 2[\overline{a, a'}](hh' + ll')\},$$

$$\mathrm{P} = \tfrac{1}{2} \sum mm' \{[a, a'](\overline{p - p'}^2 + \overline{q - q'}^2)\}.$$

(*Mécanique analytique*, tome II, et *Mécanique céleste*, tome V, p. 332).

Le signe sommatoire $\sum$ s'étend, dans ces formules, à toutes les planètes m, m', m'', etc., prises deux à deux; les symboles $[a, a']$, $[\overline{a, a'}]$ sont des fonctions des demi-axes a et a', etc., auxquelles on a donné diverses expressions. La plus usuelle est celle dont Laplace fait usage : pour la former on développe la fonction $\sqrt{a^2 - 2aa' \cos\varphi + a'^2}$ en une série procédant selon les cosinus des multiples de φ, savoir :

$$(a^2 - 2aa' \cos\varphi + a'^2)^{\frac{1}{2}} = (a, a')_0 + (a, a')_1 \cos\varphi + (a, a')_2 \cos 2\varphi + \text{etc.};$$

à l'aide des deux premiers coefficients $(a, a')_0$, $(a, a')_1$ de cette série, on obtient les valeurs suivantes des deux symboles

$$[a, a'] = -\frac{3}{4} \frac{aa'}{(a'^2 - a^2)^2} (a, a')_1,$$

$$[\overline{a, a'}] = -\frac{3}{2} \frac{1}{(a'^2 - a^2)^2} \{(a, a')_1 (a^2 + a'^2) + aa' . (a, a')_0\}.$$

J'ai reconnu que l'expression de ce dernier symbole pouvait être simplifiée par la relation qui existe entre trois coefficients consécutifs $(a, a')_i$, $(a, a')_{i+1}$, $(a, a')_{i+2}$, de la série précédente; il résulte de cette relation que

$$[\overline{a, a'}] = -\frac{15}{4} \frac{aa'}{(a'^2 - a^2)^2} (a, a')_2.$$

les deux symboles dont il s'agit peuvent être fournis encore plus simplement par le développement de la puissance $-\frac{3}{2}$ du même trinome $a^2 - 2aa'\cos\varphi + a'^2$. Lagrange a trouvé, en effet, qu'en posant

$$(a^2 - 2aa'\cos\varphi + a'^2)^{-\frac{3}{2}} = (\overline{a, a'}) + (\overline{a, a'})_1 \cos\varphi + (\overline{a, a'})_2 \cos 2\varphi + \text{etc.},$$

on a aussi

$$[a, a'] = \frac{aa'}{4}(\overline{a, a'})_1, \quad \text{et} \quad [\overline{a, a'}] = \frac{aa'}{4}(\overline{a, a'})_2$$

(*Mécanique analytique*, tome II, page 141). En rapprochant ces valeurs des précédentes, il en résulterait les relations

$$(\overline{a, a'})_1 = -\frac{3}{a'^2 - a^2}[a, a']_1,$$

$$(\overline{a, a'})_2 = -\frac{15}{a'^2 - a^2}[a, a']_2;$$

elles peuvent être rattachées à un beau théoreme d'Euler, sur une espece particulière d'intégrales définies. A la suite de cet écrit on en trouvera l'énoncé et une démonstration nouvelle.

Les coefficients $[a', a'']$, $[\overline{a', a''}]$, etc., se déduisent des précédents par de simples changements d'accents; on doit y regarder a, a', etc., comme des quantités constantes, parce qu'il a été prouvé que les grands axes des orbites n'admettent aucune équation séculaire dans les deux premiers ordres d'approximation. Cela posé, on aura les équations différentielles suivantes, pour déterminer h, l, h', l', etc.,

$$\left.\begin{aligned} m\sqrt{a}\frac{dh}{dt} &= \frac{dH}{dl}, & m'\sqrt{a'}\frac{dh'}{dt} &= \frac{dH}{dl'}, \quad \text{etc.,} \\ -m\sqrt{a}\frac{dl}{dt} &= \frac{dH}{dh}, & -m'\sqrt{a'}\frac{dl'}{dt} &= \frac{dH}{dh'}, \quad \text{etc.;} \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

on aura semblablement, pour déterminer p, q, p', q', etc., les équations différentielles

$$\left.\begin{aligned} -m\sqrt{a}\frac{dp}{dt} &= \frac{dP}{dq}, & -m'\sqrt{a}\frac{dp'}{dt} &= \frac{dP}{dq'}, \quad \text{etc.,} \\ m\sqrt{a}\frac{dq}{dt} &= \frac{dP}{dp}, & m'\sqrt{a'}\frac{dq'}{dt} &= \frac{dP}{dp'}, \quad \text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad b$$

Puisque H est une fonction homogène de deux dimensions en h, l, h', etc., le premier groupe d'équations sera de forme linéaire et à coefficients constants; il en sera ainsi du second groupe. Ces équations seront donc facilement intégrables, et c'est ce qui a été complétement exécuté. Mais ces équations admettent plusieurs intégrales générales qu'il convient de remarquer.

2. En effet, des équations (a), prises deux à deux, on tire

$$\frac{dH}{dh}\,dh + \frac{dH}{dl}\,dl = 0, \qquad \frac{dH}{dh'}\,dh' + \frac{dH}{dl'}\,dl' = 0, \quad \text{etc.}$$

En ajoutant toutes ces relations, on aura

$$\frac{dH}{dh}\,dh + \frac{dH}{dl}\,dl + \frac{dH}{dh'}\,dh' + \frac{dH}{dl'}\,dl' + \text{etc.} = 0.$$

Mais H étant une fonction des seuls éléments variables h, l, h', l', etc., l'équation précédente revient à $dH = 0$, d'où l'on tire $H = H_1$, H_1 étant une constante arbitraire ou une valeur particulière de H. On aura ainsi, entre les éléments variables h, l, h', l', etc., l'équation

$$\sum mm' \{[a, a'](h^2 + h'^2 + l^2 + l'^2) - 2[\overline{a, a'}](hh' + ll')\} = 2H_1;$$

ou bien encore

$$\sum mm' \{[a, a'](e^2 + e'^2) - 2[\overline{a, a'}]ee' \cos(\varpi' - \varpi)\} = 2H_1.$$

A l'aide du groupe d'équations différentielles (b), en p, p', etc., q, q', etc., on obtiendra pareillement l'égalité $P = P_1$, où P_1 est aussi une constante arbitraire; c'est-à-dire

$$\sum mm' [a, a'] \{(p - p')^2 + (q - q')^2\} = 2P_1 = \text{constante}.$$

Lorsque p, p', q, q' sont de petites quantités, comme nous le supposons, la fonction $\sqrt{(p - p')^2 + (q - q')^2}$ exprime l'inclinaison mutuelle I′ des orbites de m et de m'; en dénotant encore par I″ l'inclinaison des orbites de m et de m''; par ′I″ l'inclinaison de l'orbite de m' et de l'or-

bite de m'', etc., l'équation devient

$$\sum mm'[a, a'].\Pi'^2 = 2P_1$$

on prouvera ci-dessous que Π_1 est une constante positive : cela est évident pour P_1. Cette observation, que Lagrange n'a pas faite, nous semble propre à mieux préciser le sens et le caractère de ces relations : elle va bientôt nous être utile.

3. La fonction H est homogène et de seconde dimension, relativement aux variables h, h', etc., l, l', etc. La propriété de ces sortes de fonctions donne donc

$$2H = h\frac{dH}{dh} + h'\frac{dH}{dh'} + \text{etc.} + l\frac{dH}{dl} + l'\frac{dH}{dl'} + \text{etc.} = 2H_1 ;$$

mais on tire immédiatement des équations (a), respectivement multipliées par l, l', l'', etc., h, h', h'', etc.,

$$m\sqrt{a}\,\frac{ldh - hdl}{dt} + m'\sqrt{a'}\,\frac{l'dh' - h'dl'}{dt} + \text{etc.} =$$
$$= h\frac{dH}{dh} + l\frac{dH}{dl} + h'\frac{dH}{dh'} + l'\frac{dH}{dl'} + \text{etc.} = 2H_1.$$

On tang $\varpi = \frac{h}{l}$; conséquemment $d\varpi = \frac{ldh - hdl}{l^2 + h^2}$; on a $h^2 + l^2 = e^2$: ainsi $ldh - hdl = e^2 d\varpi$. L'équation que nous formons devient donc

$$m\sqrt{a}\,e^2\frac{d\varpi}{dt} + m'\sqrt{a'}\,e'^2\frac{d\varpi'}{dt} + \text{etc.} = 2H_1, \qquad (c)$$

formule donnée par Lagrange (*Mécan. analyt.*, tome II, p. 148).

On tire du second groupe (b) des équations en dp, dq, dp', dq', etc.,

$$m\sqrt{a}\,\frac{q\,dp - p\,dq}{dt} + m'\sqrt{a'}\,\frac{q'dp' - p'dq'}{dt} + \text{etc.} =$$
$$= q\frac{dP}{dq} + p\frac{dP}{dp} + q'\frac{dP}{dq'} + p'\frac{dP}{dp'} + \text{etc.} ;$$

P est homogène et de deux dimensions en p, q, p', q', p'', etc ; et

par suite

$$2P = p\frac{dP}{dp} + q\frac{dP}{dq} + p'\frac{dP}{dp'} + q'\frac{dP}{dq'} + \text{etc.} = 2P_1;$$

on a d'ailleurs $\tang\theta = \frac{p}{q}$, et $p^2 + q^2 = \gamma^2$; il en résulte

$$d\theta = \frac{q\,dp - p\,dq}{p^2 + q^2} = \frac{q\,dp - p\,dq}{\gamma^2},$$

partant $q\,dp - p\,dq = \gamma^2\,d\theta$; en transformant de la même manière tous les termes de l'équation, elle devient

$$m\sqrt{a}\,\gamma^2\frac{d\theta}{dt} + m'\sqrt{a'}\,\gamma'^2\frac{d\theta'}{dt} + \text{etc.} = -2P_1. \qquad (d$$

Cette relation entre les vitesses $\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{d\theta'}{dt}$, etc., des nœuds des orbites, analogue à celle qui existe entre $\frac{d\varpi}{dt}$, $\frac{d\varpi'}{dt}$, etc., n'a pas été remarquée par Lagrange; elle a été formée par M. de Pontécoulant (1er volume de sa *Théorie analytique du Système du Monde*, page 371).

Avec les équations en dh, dh', etc., dl, dl', etc., on formera la combinaison suivante :

$$\frac{h\,dh + l\,dl}{dt}\,m\sqrt{a} + \frac{h'\,dh' + l'\,dl'}{dt}\,m'\sqrt{a'} + \text{etc.}$$
$$= h\frac{dH}{dl} - l\frac{dH}{dh} + h'\frac{dH}{dl'} - l'\frac{dH}{dh'} + \text{etc.}$$

On voit facilement par la composition algébrique de

$$2H = \sum mm'[a, a'](h^2 + h'^2 + l^2 + l'^2) - 2\sum mm'[\overline{a, a'}](hh' + ll'),$$

que le second membre de l'équation que nous venons d'écrire est nul; l'équation, devenue intégrable, donne donc

$$K_1 = (h^2 + l^2)\,m\sqrt{a} + (h'^2 + l'^2)\,m'\sqrt{a'} + (h''^2 + l''^2)\,m''\sqrt{a''} + \text{etc.},$$

K_1 étant une constante arbitraire.

Cette équation, plus simplement écrite, revient à

$$K_1 = e^2 m \sqrt{a} + e'^2 m' \sqrt{a'} + e''^2 m'' \sqrt{a''} + \text{etc.};$$

des équations en dp, dq, dp', dq', etc., on déduit semblablement cette autre relation due, ainsi que la précédente, à Laplace,

$$L_1 = \gamma^2 m \sqrt{a} + \gamma'^2 m' \sqrt{a'} + \text{etc.}$$

4. Remarquons que la fonction $2H$ est composée de termes de la forme

$$mm' \{[a, a'](h^2 + h'^2 + l^2 + l'^2) - 2[\overline{a, a'}](hh' + ll')\};$$

et établissons que chacune de ces quantités est positive. Pour s'en assurer, on observe que, d'après l'origine indiquée ci-dessus des symboles $[a, a']$, et $[\overline{a, a'}]$, ces deux quantités sont positives; et l'on peut prouver que le rapport $\frac{[\overline{a, a'}]}{[a, a']} = \rho$ est une quantité inférieure à l'unité. Cette propriété importante a été reconnue par Poisson. Nous en donnerons ci-dessous une démonstration différente de la sienne: mais, afin de ne pas interrompre notre sujet, nous admettrons ici que $\rho < 1$.

Or

$$[a, a'](h^2 + h'^2) - 2[\overline{a, a'}]hh' = [a, a'](h^2 + h'^2 - 2\rho hh')$$
$$= [a, a'](h - \rho h')^2 + h'^2(1 - \rho^2),$$

quantité positive, puisque $1 - \rho^2 > 0$. Il en est ainsi de la partie

$$[a, a'](l^2 + l'^2) - 2[\overline{a, a'}]ll',$$

et par conséquent le terme de H que nous considérons est positif. Puisque H ne renferme que des termes de cette forme, multipliés par des produits positifs mm', $m'm''$, etc., la valeur de H est *positive;* partant la constante H_1 a aussi le même signe.

La fonction P, composée de termes

$$mm'[a, a'](p - p')^2 + (q - q')^2],$$

est positive; car chaque coefficient $[a, a']$ est positif, ainsi que nous

l'avons déjà dit. Il s'ensuit que la seconde constante P_1 est positive.

5. Au moyen des équations (c) et (e), on peut former le rapport

$$\frac{m\sqrt{a}\,e^2\,\frac{d\varpi}{dt} + m'\sqrt{a'}\,e'^2\,\frac{d\varpi'}{dt} + \text{etc.}}{m\sqrt{a}\,e^2 + m'\sqrt{a'}\,e'^2 + \text{etc.}} = \frac{2H_1}{K_1};$$

et, selon ce qui vient d'être prouvé, le second membre est ici une constante positive. Mais le premier a une valeur nécessairement renfermée entre la plus grande des vitesses angulaires $\frac{d\varpi}{dt}$, $\frac{d\varpi'}{dt}$, etc., et la moindre de ces vitesses, parce que les coefficients $m\sqrt{a}\,e^2$, $m'\sqrt{a'}\,e'^2$, etc., quoique variables, sont constamment positifs : c'est à toute époque une sorte de moyenne entre les vitesses diverses des périhélies; cette moyenne, d'après l'équation, est donc une grandeur constante et *positive*. Il s'ensuit, dans la formation de cette moyenne, que l'effet des vitesses directes l'emporte sur celui des vitesses séculaires rétrogrades, et que dans aucun temps, toutes les vitesses des périhélies ne pourront être rétrogrades : sur quoi il convient de se rappeler que nous n'entendons parler que de la partie séculaire de ces vitesses, et abstraction faite de la partie périodique, selon l'usage des géomètres en cette matière.

6. A l'aide des équations (d), (f), on formera aussi le rapport

$$\frac{\frac{d\delta}{dt}\gamma^2 m\sqrt{a} + \frac{d\delta'}{dt}\gamma'^2 m'\sqrt{a'} + \text{etc.}}{\gamma^2 m\sqrt{a} + \gamma'^2 m'\sqrt{a'} + \text{etc.}} = -\frac{2P_1}{L_1};$$

le second membre est ici une quantité négative; le premier est une moyenne obtenue en multipliant chacune des vitesses $\frac{d\delta}{dt}$, $\frac{d\delta'}{dt}$, $\frac{d\delta}{dt}$, etc., des nœuds des orbites, par un coefficient positif variable

$$\gamma^2 m\sqrt{a}, \quad \gamma'^2 m'\sqrt{a'}, \quad \gamma''^2 m''\sqrt{a''}, \quad \text{etc.},$$

et en divisant la somme des produits par la somme des coefficients des vitesses : puisque cette moyenne est une quantité négative, on peut en conclure qu'à aucune époque toutes les vitesses séculaires $\frac{d\delta}{dt}$, $\frac{d\delta'}{dt}$, etc., des nœuds des orbites ne peuvent être directes.

On voit que ce résultat est la conséquence immédiate du signe reconnu de la constante P_1, comme celui qui concerne les vitesses $\frac{d\varpi}{dt}$, $\frac{d\varpi'}{dt}$, etc., est la conséquence du signe de la constante H_1. La considération des moyennes ne sert ici qu'à fournir un énoncé simple de ces propositions, savoir : qu'entre les vitesses des périhélies on peut toujours former une moyenne constante et *positive*, et entre les vitesses des nœuds des orbites on peut obtenir à toute époque une moyenne constante et *négative*.

L'équation $\sum mm'[a, a']\,I'^2 = 2P_1$ fournit une relation entre les carrés des inclinaisons mutuelles des orbites considérées deux à deux; il existe une relation différente entre les mêmes quantités que nous allons faire connaître.

7. Dans cette vue, nous reprendrons l'équation du principe des aires relative au mouvement des planètes m, m', etc., sous la forme que Laplace lui donne (*Mécanique céleste*, 1er volume, page 315),

$$c = m\sqrt{a(1-e^2)}\cos\gamma + m'\sqrt{a'(1-e'^2)}\cos\gamma' + \text{etc.}$$
$$+ \sum mm'\frac{(x'-x)(dy'-dy)-(y'-y)(dx'-dx)}{dt}.$$

γ, γ', etc. sont ici les inclinaisons des orbites au plan des x, y, qui peuvent avoir des valeurs quelconques; c est une quantité constante.

La partie comprise dans le signe $\sum$ contient des termes semblables à ceux qui forment la première ligne, et auxquels on pourra les réunir: mais ils seront d'un ordre inférieur, à cause des produits mm', etc. Les autres termes de $\sum$ seront périodiques, ou d'un ordre encore inférieur à celui de mm', et pour cette raison nous les négligerons. L'équation ainsi réduite devient

$$c = m\sqrt{a(1-e^2)}\cos\gamma + m'\sqrt{a'(1-e'^2)}\cos\gamma' + \text{etc.};$$

or
$$m\sqrt{a(1-e^2)} = \frac{ma^2\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a^3}};$$

et en désignant le moyen mouvement de la planète m par n, on a

$$n = \sqrt{\frac{M + m}{a^3}};$$

par suite

$$m\sqrt{a(1 - e^2)} = \frac{mn.a^2\sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{M + m}},$$

et au degré d'approximation où nous nous bornons, l'on peut écrire simplement

$$m\sqrt{a(1 - e^2)} = mn.a^2\sqrt{\frac{1 - e^2}{M}}.$$

Soit E la surface de l'ellipse décrite par la planète m; on a

$$E = \pi.a^2\sqrt{1 - e^2};$$

l'équation des aires pourra donc être réduite à cette forme

$$\pi c\sqrt{M} = mnE\cos\gamma + m'n'E'\cos\gamma' + m''n''E''\cos\gamma'' + \text{etc.};$$

prenant la masse M du Soleil pour unité des masses, le premier membre sera simplement $\pi.c$. Cette équation est relative à la projection des aires sur l'un des plans des coordonnées. En désignant par β et par α les angles que l'orbite de m forme avec les deux autres plans des coordonnées; par α', β', les angles analogues relatifs à l'orbite de m', etc., on aura deux équations semblables à la précédente, savoir :

$$c.\pi = mnE\cos\beta + m'n'E'\cos\beta' + \text{etc.},$$
$$c.\pi = mnE\cos\alpha + m'n'E'\cos\alpha' + \text{etc.}$$

Désignons, comme dans l'article 2, par I' l'inclinaison de l'orbite de m sur l'orbite de m'; par I'' l'inclinaison de l'orbite m'' sur l'orbite de m', et ainsi des autres; on sait que

$$\cos I' = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma',$$
$$\cos I'' = \cos\alpha'\cos\alpha'' + \text{etc.},$$
$$\text{etc.};$$

on a de plus, entre les angles α, β, γ, relatifs à une même orbite, l'équation

$$1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma;$$

Si, en ayant égard à ces relations, l'on compose la somme des carrés de $c\pi$, $c_{,}\pi$, $c_{,,}\pi$, données dans les formules précédentes, on aura

$$(c^2 + c_{,}^2 + c_{,,}^2)\pi^2 = m^2 n^2 E^2 + m'^2 n'^2 E'^2 + \text{etc.}$$
$$+ 2\sum mm' nn' EE' \cos(I'); \quad \text{etc.}$$

mais

$$\cos I' = 1 - 2\sin^2\left(\frac{I'}{2}\right), \quad \cos I'' = 1 - 2\sin^2\left(\frac{I''}{2}\right), \quad \text{etc.}$$

D'après cela, l'équation pourra être ainsi écrite :

$$(mnE + m'n'E' + m''n''E'' + \text{etc.})^2$$
$$- 4\sum mm' nn' EE' \sin^2\left(\frac{I'}{2}\right) = (c^2 + c_{,}^2 + c_{,,}^2)\pi^2.$$

En négligeant les puissances de e, e', etc., supérieures à la seconde dimension, la somme

$$mnE + m'n'E' + \text{etc.} = \pi m\sqrt{a(1 - e^2)} + \pi m'\sqrt{a'(1 - e'^2)} + \text{etc.},$$

est constante. En effet, par le développement de chaque radical, tel que $\sqrt{1 - e^2}$, cette somme égale

$$m\sqrt{a} + m'\sqrt{a'} + \text{etc.} - \left(\frac{m\sqrt{a}e^2}{2} + \frac{m'\sqrt{a'}e'^2}{2} + \text{etc.}\right),$$

mais nous avons vu que la somme

$$m\sqrt{a}e^2 + m'\sqrt{a'}e'^2 + \text{etc.} = K_{,} = \text{constante},$$

et la somme $m\sqrt{a} + m'\sqrt{a'} + \text{etc.}$ est aussi une quantité constante, puisque l'on fait abstraction des termes périodiques de a, a', etc. Il s'ensuit que l'équation précédente donne

$$4\sum mm' nn' EE' \sin^2\left(\frac{I'}{2}\right) = \text{constante}.$$

Dans le premier de ses termes le facteur

$$4nn'\mathrm{EE}'\sin^2\frac{\mathrm{I}'}{2} = \frac{4\pi^2}{\sqrt{a^3a'^3}}a^2a'^2\sqrt{(1-e^2)(1-e'^2)}\left(\frac{\mathrm{I}'^2}{4} - \frac{\mathrm{I}'^4}{48} + \text{etc.}\right);$$

cette quantité doit être réduite à $\pi^2\sqrt{aa'}.\mathrm{I}'^2$ quand on néglige les termes de quatre dimensions en e, e', I'; tous les termes renfermés dans le $\sum$ ayant la même forme, l'équation, divisée par π^2, se réduit à

$$\sum mm'\sqrt{aa'}.\mathrm{I}'^2 = \text{constante},$$

qui doit être considérée comme une intégrale des équations (b). Dans le premier membre de cette égalité, on voit la somme des carrés des inclinaisons mutuelles des orbites des planètes prises deux à deux, multipliées par les produits des masses et des racines carrées des distances moyennes correspondantes; et le théorème exprime que cette somme est une grandeur invariable. L'équation de Lagrange,

$$\sum mm'[a, a']\mathrm{I}'^2 = 2\mathrm{P}_1,$$

établit déjà une relation entre les mêmes carrés. Ces relations s'accordent entre elles pour établir que l'inclinaison I' est invariable quand il n'y a que deux orbites.

Si l'on considère trois orbites, on a immédiatement, par ces deux équations distinctes, deux des inclinaisons exprimées au moyen de la troisième, qui reste seule à déterminer en fonction du temps t. C'est ce que l'on peut faire de différentes manières, et il n'est pas difficile de reconnaître que celle que Lagrange a employée dans la *Mécanique analytique* (deuxième volume), revient à prendre pour inconnue la surface du triangle sphérique formé par les pôles des trois orbites, de manière que chaque côté de ce triangle représente l'inclinaison de deux des orbites. La même variable entre aussi dans les formules élégantes données, sur ce problème, par M. Liouville (*Journal des Mathématiques*, tome IV).

Note sur des relations employées dans le Mémoire précédent, et indiquées aux articles **2** *et* **5**.

On sait que la puissance d'un trinome

$$a^2 - 2aa' \cos\varphi + a'^2$$

peut être développée en une série procédant selon des cosinus multiples de φ, savoir :

$$(a^2 - 2aa' \cos\varphi + a'^2)^{-s} = \tfrac{1}{2} A_0^s + A_1^s \cos\varphi + \ldots + A_i^s \cos(i\varphi) + \text{etc.};$$

les méthodes à suivre pour cet objet sont rapportées, depuis Euler, dans plusieurs Traités, et particulièrement dans la *Mécanique* de Laplace (tome I, page 267), etc. On voit aisément que les coefficients A_i^s sont des grandeurs positives quand s est positif, c'est-à-dire quand on développe une puissance négative $-s$ du trinome. Lorsque l'on suppose $s = \frac{3}{2}$, les coefficients $\frac{1}{2} A_{\frac{3}{2}}^0$, $A_{\frac{3}{2}}^1$, $A_{\frac{3}{2}}^2$, se changent dans les symboles que nous avons désignés ci-dessus, article **2**, par

$$(\overline{a, a'}), \qquad (a, a')_1, \qquad (\overline{a, a'})_2.$$

Si l'on prend $s = -\frac{1}{2}$, les coefficients $\frac{1}{2} A_{-\frac{1}{2}}^0$, $A_{-\frac{1}{2}}^1$, $A_{-\frac{1}{2}}^2$, deviennent les symboles que nous avons dénotés par

$$(a, a'), \qquad (a, a')_1, \qquad (a, a')_2.$$

On obtient d'ailleurs le coefficient général A_i^s par une intégrale définie au moyen du procédé de d'Alembert; pour cela on multiplie les deux membres de l'équation précédente par $\cos(i\varphi)$, et l'on intègre de $\varphi = 0$ à $\varphi = \pi$; il en résulte

$$\int_0^\pi \frac{\cos(i\varphi)\, d\varphi}{(a^2 - 2aa' \cos\varphi + a'^2)^s} = A_i^s \frac{\pi}{2}.$$

M. Jacobi a donné à cette intégrale une forme remarquable, et de mon

côté je l'ai traitée par une méthode qui a conduit à une expression différente (voyez le tome XV du *Journal de Mathématiques* de M. Crelle et le *Journal de l'École Polytechnique*, tome XVI).

En supposant $a' > a$, on posera $a = a'\alpha$, et l'on aura

$$(a^2 - 2aa' \cos\varphi + a'^2)^{-s} = a'^{-2s}(\alpha^2 - 2\alpha\cos\varphi + 1)^{-s};$$

et si vous développez cette dernière fonction selon des cosinus, savoir,

$$(1 - 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2)^{-s} = \tfrac{1}{2}b_s^{(0)} + b_s^{(1)}\cos\varphi + \ldots + b_s^{(i)}\cos i\varphi \ldots,$$

vous aurez $$A_s^i = a'^{-2s}.b_s^i.$$

Cette fonction génératrice des coefficients $b_s^{(i)}$, donnera aussi

$$b_s^{(i)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{d\varphi \cos(i\varphi)}{(1 - 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2)^s}.$$

De cette valeur, ou encore de la considération directe de la série $\frac{1}{2}b_s^{(0)} + b_s^{(1)}\cos\varphi +$ etc., provenant de la fonction génératrice $(1 - 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2)^{-s}$, on déduit entre trois coefficients consécutifs $b_s^{(i+1)}$, $b_s^{(i)}$, $b_s^{(i-1)}$, l'équation suivante, aux différences finies (*Mécanique céleste*, tome I, page 268),

$$(i + 1 - s)\, b_s^{(i+1)} - \frac{1 + \alpha^2}{\alpha}.i.b_s^{(i)} + (i - 1 + s)\, b_s^{(i-1)} = 0. \quad (s)$$

Le développement analogue de $(1 - 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2)^{s-1}$, qui ne diffère de la première fonction génératrice qu'en ce que $1 - s$ y remplace s, donnera naissance à des coefficients $b_{1-s}^{(i)}$, entre lesquels on aura pareillement une équation aux différences; elle se déduit de la précédente en remplaçant s par $1 - s$, savoir :

$$(i + s)\, b_{1-s}^{(i+1)} - \frac{1 + \alpha^2}{\alpha}.i.b_{1-s}^{(i)} + (i - s)\, b_{1-s}^{(i-1)} = 0. \quad (s')$$

Posons

$$b_s^{(i)} = \frac{s(1-s)(2+s)\ldots(i-1+s)}{1\cdot(2-s)(3-s)\ldots(i-s)}.\mathcal{E}^{(i)}:$$

$\mathcal{E}^{(i)}$ sera une fonction de α et de i, qui satisfera à une équation aux diffé-

rences finies que nous allons former; ce sera, pour nous, une série déterminée procédant, comme $b_s^{(i)}$ et $b_{1-s}^{(i)}$, selon les puissances α^i, α^{i+2}, etc., et de forme entièrement connue; lorsque $i=0$, on devra avoir simplement $b_s^{(0)} = \mathcal{E}^{(0)}$. En mettant $i+1$ et $i-1$ dans la valeur supposée de $b_s^{(i)}$, on aura

$$b_s^{(i+1)} = \frac{s.1+s.2+s\ldots i-1+s}{1-s.2-s.3-s\ldots i-s}\cdot\frac{i-s}{i+1-s}.\mathcal{E}^{(i+1)}.$$

$$b_s^{(i-1)} = \frac{s.1+s.2+s\ldots i-1+s}{1-s.2-s.3-s\ldots i-s}\cdot\frac{i-s}{i-1-s}.\mathcal{E}^{(i-1)};$$

ces valeurs de $b^{(i+1)}$, $b_s^{(i)}$, $b_s^{(i-1)}$ en $\mathcal{E}^{(i+1)}$, $\mathcal{E}^{(i)}$, $\mathcal{E}^{(i-1)}$, substituées dans l'équation (s) donnent la suivante, après avoir écarté le facteur commun $\frac{s.1+s.2+s\ldots i-1+s}{1-s.2-s.3-s\ldots i-s}$:

$$\frac{i-s}{i+1-s}.(i+1-s)\mathcal{E}^{(i+1)} - \frac{1+\alpha^2}{\alpha}.i.\mathcal{E}^{(i)} + \frac{i-s}{i-1-s}.(i-1+s).\mathcal{E}^{(i-1)} = 0.$$

ou bien

$$(i+s)\mathcal{E}^{(i+1)} - \frac{1+\alpha^2}{\alpha}.i.\mathcal{E}^{(i)} + (i-s).\mathcal{E}^{(i-1)} = 0.$$

La forme de cette équation linéaire est identique à celle de l'équation (s) en $b_{1-s}^{(i)}$; d'ailleurs les quantités $b_{1-s}^{(i)}$ et $\mathcal{E}^{(i)}$ sont des séries déterminées et procédant l'une et l'autre selon les puissances α^i, α^{i+2}, α^{i+4}, etc.; il est facile de voir, d'après cela, que l'on doit avoir $\mathcal{E}^{(i)} = b_{1-s}^{(i)}.S$, en dénotant par S un coefficient indépendant de i, et conséquemment

$$b_s^{(i)} = \frac{s(1+s)(2+s)\ldots(i-1+s)}{(1-s)(2-s)(3-s)\ldots(i-s)}.b_{1-s}^{(i)}.S.$$

La valeur de S sera fournie par l'hypothèse de $i=0$; il en résultera $b_s^{(0)} = b_{1-s}^{(0)}.S$; ainsi cette constante S sera le rapport de $b_s^{(0)}$ à $b_{1-s}^{(0)}$.

Pour déterminer ce rapport nous aurons recours à l'expression

$$b_s^{(0)} = \frac{1}{2\pi}\int_0 \frac{d\varphi}{(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^s};$$

qui résulte de celle que nous avons donnée ci-dessus $b_s^{(s)}$; sous le signe $\int$ de l'intégration définie nous changerons la variable φ en une autre φ' qui sera liée à la première par la relation

$$(1 - 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2)(1 + 2\alpha\cos\varphi' + \alpha^2) = (1 - \alpha^2)^2,$$

qui résulte d'une propriété de l'ellipse; elle montre qu'aux valeurs $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$, répondent $\varphi' = 0$, $\varphi' = \pi$.

On en tire

$$\cos\varphi' = \frac{(1+\alpha^2)\cos\varphi - 2\alpha}{1 - 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2},$$

et par suite

$$\sin\varphi' = \frac{(1-\alpha^2)\sin\varphi}{1 - 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2}.$$

Mais en différentiant le logarithme de la relation de $\cos\varphi$ et de $\cos\varphi'$, on a

$$\frac{d\varphi\sin\varphi}{1 - 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2} = \frac{d\varphi'.\sin\varphi'}{1 + 2\alpha\cos\varphi' + \alpha^2}.$$

Cette équation, multipliée par celle qui la précède, donnera sur-le-champ

$$d\varphi = \frac{(1-\alpha^2)\,d\varphi'}{1 + 2\alpha\cos\varphi' + \alpha^2},$$

on multipliera encore celle-ci par l'équation

$$\frac{(1-\alpha^2)^{2s}}{(1 - 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2)^s} = (1 + 2\alpha\cos\varphi' + \alpha^2)^s;$$

cela donne

$$\int_0^\pi \frac{(1-\alpha^2)^{2s}\,d\varphi}{(1 - 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2)^s} = \int_0^\pi (1-\alpha^2)\,d\varphi'\,(1 + 2\alpha\cos\varphi' + \alpha^2)^{s-1}.$$

Puisque

$$(1 - 2\alpha\cos\varphi' + \alpha^2)^{-(1-s)} = \tfrac{1}{2}b_{1-s}^{(s)} + b_{1-s}^{(1)}\cos\varphi' + \text{etc.},$$

on aura, en remplaçant φ' par $\pi - \varphi'$,

$$(1 + 2\alpha \cos\varphi' + \alpha^2)^{s-1} = \tfrac{1}{2} b'^{(0)}_{i-} - b'^{1}_{i-} \cos\varphi' + \text{etc.},$$

et en multipliant par $d\varphi'$ et intégrant de $\varphi' = 0$, à $\varphi' = \pi$, on aura

$$\int_0^\pi d\varphi' (1 + 2\alpha \cos\varphi' + \alpha^2)^{s-1} = \frac{\pi}{2} b'^{(0)}_{i-}.$$

L'équation que nous venons de former, et qui renferme les deux intégrales définies, devient donc

$$\frac{\pi}{2}(1 - \alpha^2)^{2s} b_s = \frac{\pi}{2}(1 - \alpha^2) b'^{(0)}_{i-};$$

et l'on aura

$$\frac{b'^{(0)}_{i-}}{b_{i-}} = S = \frac{1}{(1 - \alpha^2)^{2s-1}}.$$

Substituant cette valeur de la constante S dans la relation de $b'^{(0)}$ à b'_{i-}, on aura

$$b'^{(0)} = \frac{1}{(1 - \alpha^2)^{2s-1}} \frac{s(1+s)(2+s)\ldots(i-1+s)}{(1-s)(2-s)(3-s)\ldots(i-s)} b'^{(0)}_{i-},$$

ou l'on peut remettre à la place de $b'^{(0)}$ et b'_{i-} leurs formes en intégrales définies, savoir,

$$\int_0^\pi \frac{\cos(i\varphi)\,d\varphi}{1 - 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2)^s} = \frac{1}{(1 - \alpha^2)^{2s-1}} \frac{s(1+s)\ldots(i-1+s)}{(1-s)(2-s)\ldots(i-s)} \int_0^\pi \frac{\cos(i\varphi)\,d\varphi}{(1 - 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2)^{1-s}};$$

c'est le théorème d'Euler auquel nous avons fait allusion, art. 2, et dont une démonstration ingénieuse a été donnée par M. Jacobi (*Journal de M. Crelle*, tome XV). On posera dans l'équation $s = \frac{3}{2}$, d'où $1 - s = -\frac{1}{2}$, et $\alpha = \frac{a}{a'}$: en observant qu'alors le facteur

$$\frac{s(1+s)(2+s)\ldots(i-1+s)}{(1-s)(2-s)(3-s)\ldots(i-s)} = \frac{3.5.7\ldots(2i-1)(2i-1)}{-1.1.3.5\ldots(2i-3)} = -(2i-1)(2i+1),$$

on aura

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos(i\varphi)\,d\varphi}{(a'^2 - 2a'a\cos\varphi + a^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{(4i^2-1)}{2\pi(a'^2 - a^2)^2}\int_0^\pi \cos(i\varphi)\,d\varphi\,(a'^2 - 2aa'\cos\varphi + a^2)^{\frac{1}{2}}$$

Mais le premier membre représente le symbole $(\overline{a, a'})_i$, et l'intégrale définie du second est aussi le symbole $(a, a')_i$ de l'article **2**; on a donc entre ces quantités l'équation

$$(\overline{a, a'})_i = -\frac{4i^2 - 1}{(a'^2 - a^2)^2}(a, a')_i.$$

En donnant à i les valeurs $i = 1$, $i = 2$, on retrouve les rapports que nous avions remarqués art. **2**.

Le développement de $(a^2 - 2aa' \cos\varphi + a'^2)^{-s-1}$ selon les cosinus des multiples de φ, aura pour terme général $A_{s+1}^{(i)} \cos(i\varphi)$. Il existe des relations utiles entre les coefficients $A_s^{(i)}$ et $A_{s+1}^{(i)}$, que l'on déduit immédiatement de celles que Laplace a rapportées dans le 1er volume de sa *Mécanique céleste*, page 268. Ces formules ont la propriété de conduire à des résultats exacts, et que l'on peut former par des éliminations, quand on y écrit $-i$ à la place de i, pourvu que $A_s^{(-i)}$ soit remplacé par $A_s^{(i)}$. Si l'on exécute ce changement dans la première formule de la page 269 de Laplace, on en déduit

$$(i + s) A_s^{(i)} = s(a^2 + a'^2) A_{s+1}^{(i)} - 2s.aa'.A_{s+1}^{(i+1)}.$$

Écrivons ici $-i - 1$ à la place de i, et remplaçons toujours les A_s^{-i} par $A_s^{(i)}$, il vient

$$(i + 1 - s) A_s^{(i+1)} = 2saa' A_{s+1}^{(i)} - s(a^2 + a'^2) A_{s+1}^{(i+1)};$$

ajoutant et soustrayant ces formules, on a

$$(i + s) A_s^{(i)} + (i + 1 - s) A_s^{(i+1)} = s(a' + a)^2 [A_{s+1}^{(i)} - A_{s+1}^{(i+1)}],$$
$$(i + s) A_s^{(i)} - (i + 1 - s) A_s^{(i+1)} = s(a' - a)^2 [A_{s+1}^{(i)} + A_{s+1}^{(i+1)}].$$

Nous avons déjà rappelé que tous les coefficients $A_s^{(i)}$ sont positifs quand $s > 0$; si s est négatif et que $1 + s$ soit > 0, le coefficient $A_s^{(0)}$ seul est positif, et les autres $A_s^{(1)}$, $A_s^{(2)}$, etc., sont négatifs.

Le terme $-sA_s^{(i+1)}$ de la première équation précédente, sera donc négatif quand s est > 0; mais dès que $i + 1 - s$ est positif, le premier membre de l'équation est nécessairement positif, et la différence $A_{s+1}^{(i)} - A_{s+1}^{(i+1)}$ le devient elle-même. Ainsi, par exemple, si $s = \frac{1}{2}$,

$i + 1 - s = i + \frac{1}{2}$, cette quantité étant positive pour toute valeur entière de i, il s'ensuit que les différences $A^{(0)}_{\frac{3}{2}} - A^{(1)}_{\frac{3}{2}}$, $A^{(1)}_{\frac{3}{2}} - A^{(2)}_{\frac{3}{2}}$, etc., sont positives. Mais ces coefficients $A^{(0)}_{\frac{3}{2}}$, $A^{(1)}_{\frac{3}{2}}$, etc., sont ceux du développement de

$$a^2 - 2aa' \cos\varphi + a'^2 \,^{-\frac{3}{2}} = (a, a') + (a, a')_1 \cos\varphi + \text{etc.}:$$

on a donc $$(a, a') > (a, a')_1 > (a, a')_2, \text{ etc.}$$

Nous avons donné (art. **2**) une expression des symboles $[\bar{a}, a']$, $[a, a]$, de laquelle résulte pour leur rapport ρ

$$\rho = \frac{[a, a']}{[a, a]} = \frac{(a, a')_2}{(a, a')_1};$$

d'après l'inégalité qui vient d'être établie, on voit que ρ est < 1, conformément à ce que nous avons supposé art. **5**. Par des moyens analogues appliqués aux autres expressions des deux mêmes symboles, on arriverait au même résultat.

La démonstration sur laquelle Poisson a établi que $\rho < 1$ exige la transformation des symboles en fonctions elliptiques, et de plus le développement de ces fonctions en séries procédant selon les puissances du rapport $\frac{a}{a'}$; elle nous paraît moins simple que celle que nous venons de donner (voyez les *Additions à la Connaissance des Temps* pour 1836, page 41).

Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace, et de la variation des coordonnées provenant de ces déplacements considérés indépendamment des causes qui peuvent les produire;

PAR M. OLINDE RODRIGUES.

Idée générale de la translation et de la rotation d'un système solide.

1. J'entends par système solide un assemblage quelconque, continu ou discontinu, de points invariablement liés entre eux, de telle sorte que trois de ces points étant donnés de position, non en ligne droite, ainsi que leurs distances à tous les autres points du système, la situation de ce système soit invariablement déterminée pour chaque changement de situation du triangle formé par ces trois points;

Ce qui doit être, en effet, puisque sur une base triangulaire donnée, avec des distances données, on ne peut construire qu'une *seule* pyramide, identique ou superposable à une autre pyramide donnée. Ainsi donc, trois points d'un solide non en ligne droite étant fixes, aucun déplacement de ce solide n'est possible.

Mais s'il n'y a que deux points donnés qui doivent rester immobiles dans le système, l'invariabilité des distances de tout autre point à ces deux-là entraîne d'abord l'immobilité de tous les points avec lesquels ils sont en ligne droite; cette droite devient un *axe fixe*, autour duquel tout autre point du système ne peut que tourner dans une circonférence concentrique et normale à l'axe; et comme tous les points du système sont invariablement liés à l'un d'eux et à l'axe fixe, la *rotation* de l'un implique la rotation de tous; et l'*amplitude* de cette rotation est égale pour tous les points du système.

Tout déplacement d'un *solide* autour de deux points fixes se réduit

donc à une *rotation* d'égale amplitude et *de même sens* pour tous les points du système autour de l'axe formé par les deux points fixes.

C'est ici le lieu de remarquer que toute rotation donnée peut être remplacée par une rotation de sens opposé, d'une amplitude complémentaire de celle de la première à 400°.

Des rotations différentes autour d'un même axe se composent en une rotation égale à leur somme, en ayant soin d'affecter de signes contraires les amplitudes de rotation qui s'effectueraient en sens opposés, l'ordre de succession des rotations restant d'ailleurs arbitraire.

Si l'amplitude des rotations est infiniment petite, les arcs décrits par les points du solide déplacé à distance finie de l'axe, se confondent avec leurs cordes, lesquelles sont diversement inclinées entre elles, selon les angles des rayons menés de l'axe aux points du système.

Mais si l'on suppose que l'axe lié invariablement au système que l'on considère en soit pourtant infiniment éloigné, une rotation infiniment petite d'un ordre infinitésimal *réciproque* à celui de la distance de l'axe à ce système, aura pour effet de faire décrire à tous ses points des droites finies *égales* et *parallèles*, de manière que le système n'aura fait que subir une *translation*, en désignant ainsi le déplacement d'un solide qui résulte du transport égal de tous les points parallèlement à une direction donnée.

Ainsi donc, toute *translation* d'un système peut rigoureusement être considérée comme une rotation d'une amplitude infiniment petite autour d'un axe fixe infiniment éloigné et normal à la direction de cette translation.

On ne sera donc pas surpris de trouver ultérieurement toutes les propriétés des *translations* comprises dans celles des rotations, comme les propriétés de la ligne droite dans celles de la circonférence ; et toutefois nous nous y arrêterons spécialement.

Mais auparavant nous compléterons cet exposé général du déplacement autour d'un axe fixe, par le théorème suivant, que l'inspection de la figure rend sensible et dont les conséquences serviront dans ce qui va suivre.

Du transport de l'axe de rotation parallèlement à lui-même.

La rotation d'un système solide autour d'un axe fixe peut être rem-

placée par une rotation égale autour d'un autre axe parallèle au premier *suivie* d'une *translation* de ce système égale et parallèle à la corde de l'arc décrit par un point du *second* axe autour du premier, en vertu de la première rotation, ou, ce qui revient au même, sauf le sens de la translation qui est changé, à la corde de l'arc qui serait décrit par un point du premier axe autour du second.

2. Revenons au déplacement par *translation*.

Si deux situations d'un même solide sont telles, que les cordes qui joindraient chaque point du solide dans l'une de ces situations à son *correspondant* dans l'autre soient égales et parallèles, il est clair que ce solide, pour arriver de la première à la seconde situation, aura pu ne faire que glisser en quelque sorte parallèlement à lui-même le long de l'une de ces cordes, dont la grandeur et la direction mesureront la grandeur et la direction de la translation de ce système, *et vice versâ*. Rien n'est plus simple que la translation d'un système solide selon une direction et une grandeur de translation données.

Loi générale de la composition des translations successives.

Si le système subit plusieurs translations consécutives, différentes en direction comme en étendue, toutes ces translations se composent évidemment en une translation unique, égale et parallèle à la droite qui joindrait un point de la première situation à son correspondant dans la situation définitive du système; droite qui fermerait le polygone tracé par les translations successives de ce point, et dont la grandeur et la direction ne dépendent, comme on le sait, que de la grandeur et de la direction des divers côtés de ce polygone, *quel que soit d'ailleurs leur ordre de succession*.

Les projections de cette *translation résultante* sur trois axes coordonnés rectangulaires seront égales aux sommes des projections des translations données sur les mêmes axes et détermineront ainsi sa grandeur et sa direction, par un procédé analytique, indépendant du procédé graphique de la construction de ce polygone.

Telle est la loi de composition des translations successives d'un système solide, au moyen de laquelle on peut réciproquement décomposer toute translation donnée en une suite de translations diverses en gran-

deur et en directions, assujéties seulement à satisfaire à cette condition que la somme de leurs projections sur trois axes rectangulaires, ou plus généralement sur un axe *quelconque*, soit égale à celle des projections de la translation donnée sur le même axe.

On peut appeler cette loi de composition *loi du polygone des translations*.

Du déplacement d'un système autour d'un point fixe.

3. Deux situations différentes d'un même système étant données autour d'un point qui, dans ce déplacement est resté immobile, qu'on choisisse arbitrairement dans ce solide un triangle dont le point fixe serait le sommet, et que l'on considère les deux situations *correspondantes* de ce triangle, et particulièrement les angles formés par les côtés *correspondants* des deux triangles partant du même sommet commun; si par ce sommet, on mène deux plans qui, normaux aux plans respectifs de ces angles, les partagent également; il est évident que l'intersection de ces deux plans jouira de cette propriété que chacun de ses points pourra être considéré comme le sommet commun de deux pyramides *identiques* ou *superposables*, ayant pour bases les deux triangles considérés, de manière que cette intersection supposée liée invariablement au système déplacé, sera nécessairement restée immobile dans le déplacement supposé. Ce déplacement lui-même se réduit donc à un déplacement en rotation autour d'un axe fixe, que l'on détermine par la construction qui vient d'être expliquée.

Dans le cas singulier, que d'ailleurs on peut toujours éviter, où les deux plans bisséquants, dont l'intersection sert à déterminer l'axe de la rotation, se confondraient en un seul plan, l'axe n'est autre évidemment que la droite d'intersection des plans des deux triangles considérés. Toute autre droite que celle-là, bien qu'appartenant aux deux plans bisséquants confondus en un seul, forme avec les côtés des triangles considérés, des angles trièdres symétriques non superposables.

Ainsi donc, tout déplacement d'un système autour d'un point fixe revient à un déplacement par voie de rotation autour d'un axe fixe passant par ce point, ou plus généralement, peut être obtenu par une rotation égale autour d'un axe différent, mais parallèle au premier situé d'ailleurs comme on voudra, pourvu que cette rotation soit suivie d'un

déplacement en translation parallele et d'une étendue égale à la corde de l'arc que le point fixe devenu mobile décrirait autour de ce nouvel axe, le sens de la translation étant opposé à celui de cette corde;

Cette généralisation du déplacement autour d'un point fixe, étant la conséquence du théorème relatif au transport de l'axe de rotation parallèlement à lui-même (n° **1**).

Du déplacement quelconque d'un système solide dans l'espace.

4. Considérons enfin deux situations entièrement arbitraires d'un même solide, et cherchons à nous représenter de la manière la plus simple, le mode de déplacement qui a pu amener le solide de l'une de ces situations à l'autre.

Par un point quelconque de ce solide dans la première situation, imaginons qu'on mène des droites égales et parallèles à celles qui, dans la seconde situation joignent le point *correspondant* de celui-ci à tous les autres points du solide déplacé; on aurait ainsi construit un assemblage de points, un solide entièrement identique à celui que nous considérons; mais dont la situation intermédiaire entre les deux situations données serait dérivée de la première par le moyen d'une certaine rotation autour d'un axe fixe, passant par ce point choisi pour y rapporter le déplacement du système, tandis qu'à son tour la seconde situation du solide serait dérivée de cette situation intermédiaire, au moyen d'une translation dont la direction et l'étendue seraient égales à celle de la droite qui joint le point choisi et son correspondant.

Si, de plus, on observe qu'en vertu du théorème relatif au transport de la rotation autour d'un axe donné, à un autre axe parallèle à celui-ci, rien n'empêche de supposer que cette situation intermédiaire du solide résulte d'une rotation égale et de même sens autour d'un axe passant par un point quelconque du solide, suivie d'une translation égale et parallèle à la corde de l'arc décrit par ce nouveau point choisi pour y rapporter le déplacement du système autour du premier axe dans la première rotation admise; comme cette translation, composée avec celle qui s'opère du solide intermédiaire à la situation définitive, se réduit à une translation égale et parallèle à la droite qui joint cette nouvelle origine à son point correspondant dans la situation définitive;

comme enfin, pour chaque origine du déplacement, il n'y a qu'un seul axe de rotation possible; on se trouve enfin avoir démontré complétement le théorème suivant, l'un des plus beaux, sans contredit, de la géométrie, et qu'on doit considérer comme la base fondamentale des lois géométriques du mouvement.

Théorème fondamental.

De quelque manière qu'un solide ait été transporté d'un lieu dans un autre, on peut toujours considérer ce déplacement comme résultant de deux déplacements consécutifs en rotation et en translation, la rotation s'effectuant autour d'un axe fixe mené par un point quelconque du solide dans la première situation, parallèlement à une certaine direction, invariablement déterminée par les deux situations considérées du solide, aussi bien que le sens et l'amplitude de la rotation; la translation s'opérant ensuite parallèlement à la droite qui joint un point de cet axe à son correspondant dans la seconde situation du système, la grandeur de cette droite mesurant celle de la translation.

L'ordre de ces déplacements peut être interverti : la translation peut précéder la rotation, mais celle-ci s'effectue ensuite autour d'un axe passant par le point de la seconde situation correspondant à celui auquel est rapporté le déplacement dans la première situation. D'ailleurs la direction de l'axe de rotation, l'amplitude et le sens de rotation sont les mêmes pour tous les points du système, avant ou après la translation.

Dans cette succession de déplacements on remarque que la droite qui joindrait un point quelconque du solide dans sa première situation à son correspondant dans la seconde, c'est-à-dire la droite *réellement* parcourue par ce point, forme le troisième côté d'un triangle dont le premier, variable pour chaque point du système, est normal à l'axe de rotation, et dont le second, constant pour tous les points du système, mesure la translation du système relative à l'origine du déplacement.

La projection de cette droite sur l'axe de rotation est donc constante pour tous les points du solide, et ne peut être constante que relativement à cette même direction de l'axe de rotation; car cette projection sur toute direction est la somme de deux projections, savoir, de celle de

la corde de l'arc de la rotation, et de celle de la droite parcourue en translation. La première de ces projections est variable, la seconde est constante. Leur somme ne saurait donc être constante pour toute direction autre que celle qui rend nulle la première de ces projections, savoir, la direction même de l'axe de la rotation.

Tous les points d'un système solide déplacé d'une manière quelconque sont donc *également* transportés *relativement* à la direction de l'axe de la rotation.

Si cette projection constante est nulle, le déplacement se réduit à une rotation sans translation autour d'un certain axe, facile à déterminer, puisque la droite parcourue par chaque point dans un plan normal à la direction commune de tous les *axes* de rotation se trouve être la base d'un triangle isoscèle situé dans ce plan, dont l'angle au sommet serait égal à l'amplitude de la rotation, et dont le sommet appartient à l'axe cherché.

En général, cette projection constante est la mesure de la translation *absolue* du système, qui est un minimum entre toutes celles qui sont relatives aux diverses origines du déplacement; c'est la translation même des points du système qui seraient transportés parallèlement à l'axe de rotation. Pour tous ces points considérés comme origines du déplacement, l'axe de rotation, que nous nommerons, pour le distinguer, l'*axe central du déplacement*, est en même temps l'axe de la translation; de manière que le déplacement du système rapporté à cet axe central, se réduit à tourner autour de cet axe, en *glissant* parallèlement à sa direction, sorte de mouvement qu'on a comparé à celui de la vis dans son écrou; expression la plus simple du théorème fondamental où les deux déplacements de rotation et de translation se trouvent effectués orthogonalement [*].

5. Mais il s'agit de trouver cet axe central, c'est-à-dire de déterminer les points du système dont le déplacement définitif se réduit à une translation parallèle à la direction de l'axe de rotation. Or c'est à quoi l'on arrive par la construction suivante.

---

[*] Ce beau théorème de géométrie appartient, je crois, à M. Chasles, qui l'a publié dans le *Bulletin universel des Sciences*, tome XIV, année 1830.

Par un point quelconque du solide, et dans le plan des deux axes de rotation et de translation *relatifs à ce point* considéré comme origine du déplacement, menez à l'axe de rotation une perpendiculaire égale à l'étendue de la translation projetée sur cette perpendiculaire; sur cette perpendiculaire, comme base et normalement au plan des deux axes, construisez un triangle isoscele, dont l'angle au sommet soit égal à l'amplitude de la rotation du système, ce sommet appartiendra à l'*axe central*, si d'ailleurs le triangle isoscèle est, relativement au plan des deux axes, placé dans le sens de la rotation.

Car il est évident que ce sommet, tournant d'abord autour de l'axe de rotation relatif, puis décrivant une parallèle à l'axe de translation relatif, d'une grandeur égale à celle de la translation relative, arrivé à sa position définitive, se trouve avoir parcouru parallèlement à l'axe de rotation, une droite égale à cette même translation, *projetée sur l'axe de rotation.*

Et réciproquement, si l'on considère par rapport à l'axe de rotation, qui serait mené par ce sommet, le déplacement de l'origine des deux axes relatifs donnés, on voit ce point, en vertu de la rotation autour de l'*axe central*, arriver d'abord à l'extrémité de la base du triangle isoscèle ci-dessus indiqué, base qui mesure le déplacement de ce point perpendiculairement à l'axe de rotation central, puis, en vertu de la translation parallèle à ce même axe, arriver enfin à sa situation définitive, à l'extrémité de l'axe relatif de translation supposé.

Et cette construction montre bien que tout le déplacement se réduit à une simple rotation autour de l'axe central, quand l'axe de translation relatif est normal à l'axe de rotation, puisque alors le sommet du triangle isoscèle revient en définitive à sa première position.

Aussi toutes les fois que les divers points d'un solide, dans le déplacement de ce solide, restent dans des plans parallèles, ce déplacement se réduit à une rotation autour d'un certain axe fixe normal à ces plans.

Déplacement d'une figure plane dans son plan

Le déplacement d'une figure plane dans son plan se réduit donc toujours à une rotation autour d'un centre fixe dans ce plan, ainsi qu'il est aisé de l'établir directement.

Si l'on considère le quadrilatère formé par la droite qui joint deux situations correspondantes d'un point du solide, l'axe central et les perpendiculaires abaissées de ces deux situations sur cet axe, on trouve que la droite qui joint les milieux du premier côté de ce quadrilatère et de celui qui lui est opposé, est perpendiculaire à ces deux lignes, propriété qui donne une autre construction de l'axe central, étant donnés seulement deux points du système, leurs correspondants, avec la direction de l'axe de rotation.

Par le milieu de chacune des droites qui joignent un des points donnés à son correspondant, faites passer une droite parallèle à la direction donnée de l'axe de rotation et une normale à ces deux droites, les plans formés en chaque milieu par cette normale et la droite parallèle à l'axe de rotation se couperont au lieu même de l'axe central [*].

6. Nous avons à énoncer maintenant les principaux corollaires qui se déduisent du théorème fondamental, relativement aux déplacements particuliers des points, des droites, des plans d'un système solide.

1°. Les distances qui séparent chaque point du solide dans sa première situation, de son correspondant dans la seconde, se projettent toutes également sur la direction de l'axe de rotation; cette projection commune est la mesure de la translation *absolue* du système;

2°. Toute droite, partie du système déplacé, ne faisant que tourner *quant à sa direction*, autour de l'axe de rotation, il en résulte un rapport très simple entre l'angle que forme cette droite avec l'axe de rotation et celui qu'elle forme avec sa position primitive, par suite de son déplacement et de l'amplitude de la rotation, savoir :

Le sinus du demi-*déplacement* angulaire *de toute droite, partie d'un système solide déplacé, est égal au sinus de la demi-rotation de ce système, multiplié par le sinus de l'angle de cette droite avec l'axe de rotation.*

Cette proposition, que l'inspection de la figure rend évidente, sert à établir de la manière la plus élémentaire l'une des propriétés les plus remarquables du mouvement de la Terre, qui est l'invariabilité presque absolue des pôles du globe, le mouvement *angulaire* de l'axe terrestre étant infiniment moindre que celui de rotation de la Terre;

---

[*] Cette construction m'a été indiquée par mon ami M. Lévy.

3°. Toute droite parallèle à l'axe de rotation est transportée parallèlement à elle-même, tandis que le déplacement angulaire de toute droite normale à cet axe est égal à l'amplitude de la rotation;

4°. Toute figure plane invariablement liée au système déplacé, et dont le plan est normal à l'axe de rotation, est donc transportée dans un plan parallèle au premier, à une distance égale à la translation absolue du système.

Toute figure plane, parallèle à l'axe, est au contraire transportée dans un plan incliné sur sa position primitive, d'un angle égal à l'amplitude de la rotation.

5°. Le milieu de la droite qui joint un point quelconque du système à son correspondant, est le point de cette droite le plus rapproché de l'axe central du déplacement;

6°. Les milieux de toutes les droites qui joignent tous les points d'une figure plane à leurs correspondants, après un déplacement quelconque de cette figure, sont dans un même plan avec les milieux de toutes les droites qui joindraient tout point *extérieur* à cette figure plane, à son correspondant *symétrique*.

Ce plan fait un angle égal avec les plans des deux figures planes, aussi bien qu'avec les droites *correspondantes* dans les deux figures, dans leur plan ou en dehors de leur plan, mais *symétriquement* inclinées;

7. Après avoir exposé la loi géométrique fondamentale du passage d'un solide, d'une situation donnée à une autre également donnée d'une manière quelconque, nous devons rechercher la loi de composition successive de ces déplacements au moyen de laquelle, étant donnés les éléments de ces déplacements successifs, on puisse construire ou calculer les éléments de la situation définitive du solide, la position de son axe central définitif, l'amplitude de la rotation et l'étendue de la translation.

Nous avons exposé déjà la loi de composition des *translations*, nous allons donner celle des rotations autour d'axes fixes différents, et enfin celle des déplacements quelconques, résultant chacun d'une translation et d'une rotation combinées.

De cette loi de composition des rotations autour d'axes différents, nous déduirons une transformation importante du théorème fondamental, savoir :

« Tout déplacement d'un système solide peut être représenté d'une » infinité de manières par la succession de deux rotations de ce système » autour de deux axes fixes non convergents. Le produit des sinus de » ces demi-rotations multipliés par le sinus de l'angle de ces axes et par » leur plus courte distance, est égal, pour tous ces *couples* d'axes *con-* » *jugués*, au produit du sinus de la demi-rotation du système autour » de l'axe *central* du déplacement, multiplié par la demi-translation » absolue du système.

» Autrement, le volume du tétraèdre dont les arêtes opposées seraient » situées d'une manière quelconque sur chacun des axes conjugués et » dont les grandeurs seraient proportionnelles aux sinus des demi- » rotations respectives, est constant pour tous les couples de rotations » conjuguées, propres à représenter un déplacement donné. »

Ainsi donc, tout déplacement d'un système solide se réduit en définitive à tourner autour d'un ou de deux axes fixes.

Dans le cas où l'un de ces axes est parallèle à l'axe *central*, il résulte de la loi de composition des rotations, que son conjugué est situé à l'infini, que la rotation qui lui correspond devient infiniment petite et se transforme ainsi en une simple translation, ce qui conduit au premier énoncé du théorème fondamental, énoncé qui n'est plus qu'un cas particulier de celui que nous venons de donner.

De la composition des rotations successives d'un solide autour de deux axes convergents.

8. Il s'agit maintenant d'exposer la loi de composition des rotations successives d'un solide autour d'axes différents. Commençons par ne considérer que deux axes convergents, et cherchons à déterminer l'axe *résultant* de ces deux rotations, celui autour duquel, en définitive, se trouvera avoir tourné le solide donné, pour arriver de sa première à sa dernière situation.

Cet axe résultant, doit être placé de telle sorte, qu'accomplissant lui-même les deux rotations indiquées autour des axes convergents supposés, il revienne à sa position première. Si donc par chacun des axes donnés on mène un plan qui fasse avec celui de ces deux axes un angle égal a la demi-rotation relative a cet axe, l'intersection de ces deux plans sera l'axe résultant cherché, arrivant en vertu de la pre-

mière rotation à sa position *symétrique* par rapport au plan des deux axes, et revenant par la seconde rotation à sa position primitive.

On voit en même temps que l'angle de ces deux plans mesurera la demi-rotation composée, puisque le premier axe, immobile pendant la première rotation, ne se déplace que par la seconde et se trouve décrire autour de l'axe résultant, déterminé comme on vient de le dire, un angle double de celui des deux plans. Observons ici que la demi-rotation autour de chaque axe peut indifféremment se mesurer par l'angle intérieur ou par l'angle extérieur des deux plans qui passent par cet axe, le sens de la rotation étant seulement changé, selon que l'on adopte l'une ou l'autre mesure, puisque toute rotation accomplie dans un sens autour d'un axe équivaut à une rotation contraire d'une amplitude complémentaire de la première à 400°.

Ensuite, relativement à l'ordre de succession de ces rotations, il arrive que l'axe *symétrique* de celui qui vient d'être déterminé par rapport au plan des deux axes donnés, correspondrait, comme axe résultant, aux mêmes rotations accomplies dans un ordre inverse de celui qui est supposé autour des mêmes axes; d'où l'on voit que la valeur de la rotation résultante ne dépend pas de l'ordre des rotations, mais que la position de l'axe résultant en dépend essentiellement, et que dans la composition des rotations d'un système solide, l'ordre de ces rotations ne peut être modifié sans altérer la position de l'axe résultant et la valeur même de la rotation résultante, s'il y a plus de deux axes à composer successivement.

Telle est la différence caractéristique à signaler entre la composition des rotations et celle des translations successives. Il y a d'ailleurs entre ces deux sortes de composition l'analogie qui existe entre les propriétés du triangle rectiligne et celles du triangle sphérique; et si l'on compare les translations parallèles aux trois côtés d'un triangle rectiligne, aux sinus des demi-rotations accomplies autour des trois côtés d'un angle trièdre, les valeurs des translations et celles de ces sinus seront également proportionnelles aux sinus des angles opposés aux côtés respectifs dans le triangle rectiligne et dans l'angle trièdre.

Composition des rotations infiniment petites.

9. Mais ces deux axes symétriques résultants correspondant aux

mêmes rotations dans deux ordres différents de succession, coïncident dans le plan des deux axes si les rotations deviennent infiniment petites, et il en résulte deux conséquences importantes :

La première, c'est que l'ordre de succession des rotations infiniment petites autour de deux axes convergents, et, par suite, autour de tant d'axes qu'on voudra, est indifférent; la seconde, c'est que l'axe et l'amplitude de la rotation infiniment petite, résultante de la succession de deux rotations infiniment petites autour de deux axes convergents, se déterminent de la même manière que l'axe et la grandeur de la translation qui résulterait de deux translations successives proportionnelles aux rotations données et parallèles à leurs axes; et comme, en éloignant infiniment les axes de rotation, on transforme les rotations infiniment petites en translations finies perpendiculaires à ces axes et inclinées entre elles comme ces axes mêmes, on comprend toute la généralité de la loi de composition des rotations finies qui, par l'intermédiaire des rotations infiniment petites, comprend aussi la loi de composition des translations.

De la composition des rotations autour de deux axes parallèles.

10. Tous les points du système déplacé par suite de deux rotations consécutives autour de deux axes parallèles, sont restés dans des plans parallèles normaux à ces axes. Le déplacement se réduit donc à une simple rotation autour d'un certain axe parallèle aux premiers. Cela étant posé, le mode de détermination et de construction de cet axe, qui a été exposé pour deux axes convergents, s'applique également à deux axes parallèles et donne pour résultat un axe parallèle aux premiers et une rotation composée égale à la somme ou à la différence des rotations données, selon qu'elles s'effectuent dans un même sens ou dans des sens opposés.

Couples de rotations parallèles.

Mais ici se présente un cas bien remarquable, celui où les deux rotations étant égales et de sens contraire, la rotation composée est nulle et l'axe résultant situé à l'infini, circonstance où le déplacement aboutit à une simple translation. En effet, par suite des deux rotations égales mais contraires, autour de deux axes parallèles, chaque point du solide

déplacé a parcouru définitivement une droite constante de grandeur et de direction pour tous les points du système; la direction de cette droite fait avec la normale au plan des deux axes, un angle égal à la demi-rotation supposée autour de chaque axe en même temps qu'elle est normale à ces deux axes; sa grandeur est égale au produit de la distance des deux axes par le double sinus de la demi-rotation.

L'ordre de succession des rotations n'est pas indifférent; la position symétrique de la direction de la translation, relativement à la normale au plan des deux axes, correspond au changement d'ordre dans la succession des rotations.

Tout cela résulte facilement d'une comparaison de triangles semblables; et, lorsque les rotations sont infiniment petites, on voit encore que l'ordre de succession est indifférent, la translation s'opérant alors suivant la normale au plan des deux axes.

Ainsi donc, tout *couple de rotations parallèles* équivaut à une simple translation, et réciproquement, toute *translation* peut être remplacée d'une infinité de manières par un couple de ce genre.

Ces couples de rotations parallèles se composent donc et se décomposent, selon la loi des translations, dans un ordre de succession arbitraire pouvant occuper dans l'espace toutes les positions qui correspondent à une même translation en grandeur et en direction.

Compositions et décompositions qui s'obtiennent en substituant aux couples les translations qu'ils représentent.

Ainsi se trouve généralisée pour les *couples de rotations finies* la loi de composition que M. Poinsot a, je crois, indiquée le premier pour les couples de rotations *infiniment petites*.

11. Tout déplacement d'un système solide se réduisant à une rotation suivie d'une translation, cette translation pouvant toujours être remplacée par un *couple de rotations* dont l'un des axes coupera l'axe donné de la rotation du système, les rotations autour de ces deux axes convergents se composant en une seule rotation, il en résulte évidemment la démonstration de la transformation énoncée ci-dessus du théorème fondamental, savoir : que tout déplacement d'un système solide peut toujours provenir de la succession de deux rotations autour de deux axes fixes non convergents et d'une infinité de manières.

De la composition des rotations autour d'axes fixes non convergents en nombre quelconque.

12. Il s'agit enfin de composer des rotations autour d'axes fixes non convergents en nombre quelconque. Prenons un point dans l'espace pour y *rapporter* dans leur ordre toutes ces rotations; nous avons vu que toute rotation autour d'un axe fixe pouvait être remplacée par une autre rotation égale, accomplie autour d'un autre axe parallèle au premier, suivie d'une translation égale à la corde de l'arc décrit par un point du nouvel axe autour du premier par suite de la première rotation donnée. Nous avons vu aussi qu'une translation suivie d'une rotation accomplie autour d'un axe passant par l'extrémité de l'axe de translation pouvait au contraire en être précédée, si l'axe de rotation passait par l'origine de l'*axe* de translation. Cela posé, si par le point choisi pour y rapporter toutes les rotations, on fait passer des axes parallèles aux axes donnés non convergents, le déplacement du systeme opéré successivement autour de ces axes, au moyen du transport des rotations aux axes convergents menés parallèlement aux premiers, et de l'échange successif des rotations autour d'axes passant aux extrémités des lignes de translation en rotations autour d'axes passant par leur origine, le déplacement du système se partagera en une suite de rotations respectivement égales aux rotations données, accomplies successivement autour des axes convergents parallèles aux premiers, suivies d'une suite de translations telles, qu'elles résulteront des cordes *successivement* parcourues par le point choisi autour des axes non convergents donnés *dans l'ordre indiqué par les rotations*.

La composition des rotations autour d'axes convergents et celle des translations s'opéreront suivant les modes indiqués plus haut. Le déplacement du système se ramènera en définitive à une rotation et à une translation relatives à deux axes de rotation et de translation passant par le point choisi pour origine du déplacement.

On voit par cette construction que les éléments de la rotation définitive du système ne dépendent que de l'amplitude et de la direction des rotations, et nullement de l'écartement des axes de rotation; tandis que la grandeur et la direction de la translation dépendent à la fois des rotations, de leurs directions, et de la *position* des axes de ces rotations

composantes, attendu que les cordes successivement décrites par le point choisi pour y rapporter le déplacement du système varient de grandeur et de direction suivant les positions successives que prend le point déplacé relativement aux divers axes de rotation donnés.

Si dans le système de ces axes il s'en trouve de consécutifs qui forment des *couples de rotations parallèles*, il est évident que ces *couples* ne fourniront aucun élément dans la détermination de la direction et de l'amplitude de la rotation résultante, et qu'ils n'auront d'influence que sur la grandeur et la direction de la translation résultante. le point dont les rotations successives déterminent cette translation se trouvant, par suite de ces *couples de rotations*, lorsqu'il y arrive, décrire la translation équivalente à chaque couple respectif.

Examen du cas particulier de deux axes fixes non convergents.

13. Si nous considérons deux axes non convergents et leur plus courte distance, et que nous prenions pour origine du déplacement l'extrémité de cette plus courte distance sur le premier axe de rotation, c'est-à-dire sur l'axe de la rotation qui doit s'effectuer la première, en faisant passer par cette origine un axe parallèle au second donné, on composera les deux axes convergents en un troisième, qui sera l'*axe de rotation* du déplacement relatif à cette origine, et l'on aura l'axe de la translation relative par la corde de l'arc que décrirait cette origine, en vertu de la rotation à effectuer autour du second axe donné. La projection de cette corde sur l'axe relatif de rotation, ainsi déterminé, mesure la translation absolue du déplacement; elle est égale à la somme des projections des deux côtés du triangle isoscèle dont elle est la base; chacun de ces côtés est égal à la plus courte distance des deux axes non convergents donnés, et il est facile de s'assurer en outre que chacun de ces côtés est également incliné sur l'axe relatif composé. En effet, cette plus courte distance est normale au plan des deux axes convergents; or, en considérant l'angle formé par cette normale et par la droite *symétrique* de l'axe résultant relativement à ce plan, on voit que cet angle ne change pas lorsqu'on le suppose mobile et entraîné par la seconde rotation qui amène la droite *symétrique* dont nous parlons, à se confondre avec l'axe résultant; mais, dans cette rotation, la normale s'est inclinée

sur elle-même dans un plan perpendiculaire au second axe, de manière à être parallèle au second côté du triangle isoscèle que nous considérons, et comme il est évident que l'angle de la normale avec l'axe résultant est supplément de celui qu'elle forme avec sa position *symétrique*, on voit qu'effectivement l'axe résultant est, ainsi que nous venons de le dire, également incliné par rapport aux deux côtés de ce triangle isoscèle. D'où l'on conclut enfin que la translation absolue d'un système solide provenant de la succession de deux rotations autour de deux axes fixes non convergents, est égale au double de la distance de ces deux axes projetée sur la direction de l'axe de la rotation composée ou résultante.

Mais il est évident que le cosinus de l'angle de cette distance avec l'axe composé est égal au sinus de l'angle de même axe avec le plan des deux axes composants, lequel, par suite de la loi de proportion des sinus des demi-rotations à ceux des angles compris entre les axes opposés, se trouve être égal au produit des sinus des demi-rotations données par le sinus de l'angle des deux axes, divisé par celui de la demi-rotation composée; d'où l'on arrive à compléter le théorème fondamental transformé ainsi que nous l'avons déjà énoncé, savoir, que *tout déplacement d'un système solide peut toujours provenir, d'une infinité de manières, de la succession de deux rotations autour de deux axes fixes non convergents*, pourvu que *le produit des sinus des demi-rotations successives multiplié par la distance des deux axes conjugués et par le sinus de l'angle de ces axes, soit égal au produit de la demi-translation absolue du système déplacé multipliée par le sinus de la demi-rotation résultante.*

De la composition des déplacements successifs d'un système combinés de rotations et de translations.

14. Nous sommes maintenant en mesure de résoudre complétement le problème général suivant, où l'on considère la succession des déplacements quelconques d'un même solide.

Étant donnés les axes de rotation et de translation ainsi que l'amplitude et l'étendue de ces rotations et translations pour chaque déplacement successif d'un système, on demande de construire les axes de rotation et de translation de ce système relatif à une origine donnée.

La solution de ce problème est évidemment la même que celle du problème précédent, où il ne s'agissait que de rotations autour d'axes fixes, puisque les translations peuvent être remplacées par des couples de rotations autour d'axes fixes. Nous l'avons indiqué nettement dans le dernier paragraphe du n° **12**. Il n'y a donc pas lieu de s'y arrêter davantage.

Examen du cas particulier des déplacements infiniment petits successifs.

Cette solution se simplifie notablement lorsqu'on ne considère que des déplacements infiniment petits; d'abord en ce qui concerne les rotations données et leur résultante, parce que l'ordre de ces rotations est indifférent, et que leur composition en nombre quelconque autour d'axes convergents s'opère comme celles de translations proportionnelles à ces rotations et parallèles à ces axes; ensuite, en ce qui concerne la translation composée, parce que l'ordre des rotations et des translations successivement effectuées par l'origine du déplacement est également indifférent, et que chacune de ces rotations et translations peut être établie directement et séparément, comme si le point à déplacer ne se déplaçait qu'alternativement et non successivement, ce qui tient à ce que l'espace parcouru pour chacun de ces déplacements est infiniment petit; la composition de ces translations partielles résultant de l'écartement des axes donnés, ou des translations mêmes qui sont jointes aux rotations, s'opère suivant la même loi que celle des rotations.

15. Il nous faut maintenant appliquer le calcul aux lois géométriques que nous venons d'exposer relativement aux déplacements quelconques d'un système solide, et en déduire d'abord les formules de la variation des coordonnées d'un système solide, qui tiennent une si grande place dans la mécanique analytique.

Détermination des formules de la variation *des coordonnées d'un système solide, provenant d'un déplacement quelconque.*

Soient $x, y, z, \ldots, x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z$, les coordonnées de deux points quelconques correspondants dans les deux situations

du systeme déplacé; soient de plus X, Y, Z, les coordonnées du milieu de la droite qui les joint, en sorte que l'on ait

$$X = x + \tfrac{1}{2}\Delta x, \quad Y = y + \tfrac{1}{2}\Delta y, \quad Z = z + \tfrac{1}{2}\Delta z:$$

soient enfin g, h, l, les angles formés par la direction de l'axe de rotation avec les axes des coordonnées, θ l'amplitude de la rotation, t la grandeur de la translation absolue, X, Y, Z, les coordonnés d'un point quelconque de l'axe central du déplacement.

Si l'on considère le triangle rectangle dont l'hypoténuse est formée par la droite de jonction des deux points correspondants et dont les deux autres côtés sont donnés, l'un par la corde de l'arc décrit par le premier point en vertu de la rotation θ, et l'autre par la droite parcourue en translation par ce même point après la rotation effectuée; il est clair que les variations Δx, Δy, Δz, seront respectivement égales aux projections respectives de cette hypoténuse, c'est-à-dire à la somme des projections des deux autres côtés de ce triangle rectangle sur les axes des coordonnées respectifs. Or le côté égal et parallèle à la translation absolue t, donne les trois projections $t \cos g$, $t \cos h$, $t \cos l$; l'autre côté est égal à $2u \operatorname{tang} \frac{1}{2}\theta$, u désignant la distance de l'axe central à ce côté même qui lui est perpendiculaire. Cette distance est évidemment la même que celle du point (X, Y, Z) au même axe central, comme la direction de ce côté est la même que celle d'une droite qui serait menée par le point (X, Y, Z) perpendiculairement à l'axe central et à la distance de ce point à l'axe. Appelons G, H, L, les angles de cette droite avec les axes des coordonnées, nous aurons d'abord les expressions suivantes:

$$\begin{aligned} \Delta x &= t \cos g + 2u \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta \cos G, \\ \Delta y &= t \cos h + 2u \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta \cos H, \\ \Delta z &= t \cos l + 2u \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta \cos L: \end{aligned}$$

et comme on a nécessairement

$$\cos g \cos G + \cos h \cos H + \cos l \cos L = 0,$$

on en déduira, comme cela résulte aussi de la figure,

$$\begin{aligned} \Delta x \cos g + \Delta y \cos h + \Delta z \cos l &= t. \\ \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 &= t^2 + 4u^2 \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\theta \end{aligned}$$

Les premiers termes $t \cos g$, $t \cos h$, $t \cos l$, représentent la partie des variations qui provient du déplacement absolu en translation; les seconds termes, celle qui est due à la rotation opérée par le déplacement. En comparant ces premiers et seconds termes entre eux, relativement à chaque axe coordonné, on trouve que les premiers qui, relativement à chaque axe coordonné, mesurent l'effet ou le *moment* de la translation du système, ont pour valeur les projections de cette translation sur chaque axe des coordonnées, tandis que les seconds termes, qui représentent pour chaque point l'*effet* ou le *moment* de la rotation du système relatif à chaque axe coordonné, ont pour valeur la projection relative à chaque axe coordonné d'un triangle ayant pour sommet le milieu de la droite, définitivement parcourue par le point considéré, et pour base une droite comptée sur l'axe central d'une étendue égale à $4 \operatorname{tang} \frac{1}{2} \theta$.

Dans le cas d'un déplacement infiniment petit, ce milieu et le point lui-même se confondent, et il en résulte que pour un point du système infiniment peu déplacé, l'*effet* de la rotation, relatif à une direction donnée, est égal au double de la projection relative à cette direction d'un triangle dont ce point est le sommet et dont la base prise sur l'axe central est égale à la rotation du système.

Ceci fait comprendre comment la théorie des projections se rattache par les projections linéaires aux lois de la translation, et par les projections des aires à celle de la rotation des solides. Poursuivons.

La corde $2u \operatorname{tang} \frac{1}{2} \theta$ étant normale à la fois à l'axe central et à la perpendiculaire abaissée du point $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ sur cet axe, laquelle est égale à u, on aura

$$\begin{aligned}
u \cos \mathrm{G} &= (\mathrm{Y} - \mathrm{Y}) \cos l - (\mathrm{Z} - \mathrm{Z}) \cos h, \\
u \cos \mathrm{H} &= (\mathrm{Z} - \mathrm{Z}) \cos g - (\mathrm{X} - \mathrm{X}) \cos l, \\
u \cos \mathrm{I} &= (\mathrm{X} - \mathrm{X}) \cos h - (\mathrm{Y} - \mathrm{Y}) \cos g,
\end{aligned}$$

et par suite,

$$\begin{aligned}
\Delta x &= t \cos g + 2u \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \theta \cos \mathrm{G} = \mathrm{A} + p\,\mathrm{Y} - n\,\mathrm{Z}, \\
\Delta y &= t \cos h + 2u \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \theta \cos \mathrm{H} = \mathrm{B} + m\,\mathrm{Z} - p\,\mathrm{X}, \\
\Delta z &= t \cos l + 2u \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \theta \cos \mathrm{I} = \Gamma + n\,\mathrm{X} - m\,\mathrm{Y}.
\end{aligned}$$

A, B, Γ, m, n, p, désignant six constantes qui dépendent de la position

de l'axe central du déplacement, de la grandeur de la translation et de l'amplitude de la rotation, ainsi qu'il suit :

$$\begin{aligned} A &= t\cos g + 2\tang\tfrac{1}{2}\theta\,(Z\cos h - Y\cos l), \\ B &= t\cos h + 2\tang\tfrac{1}{2}\theta\,(X\cos l - X\cos g), \\ \Gamma &= t\cos l + 2\tang\tfrac{1}{2}\theta\,(Y\cos g - X\cos h), \end{aligned}$$

$$m = 2\tang\tfrac{1}{2}\theta\cos g, \quad n = 2\tang\tfrac{1}{2}\theta\cos h, \quad p = 2\tang\tfrac{1}{2}\theta\cos l.$$

Si l'on désigne par α, β, γ, les variations des coordonnées de l'origine des axes coordonnés, on aura les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha &= A + \tfrac{1}{2}(p\beta - n\gamma), \\ \beta &= B + \tfrac{1}{2}(m\gamma - p\alpha), \\ \gamma &= \Gamma + \tfrac{1}{2}(n\alpha - m\beta). \end{aligned}$$

au moyen desquelles on remplacera, quand on voudra, les constantes A, B, Γ, par leurs valeurs en fonction des variations α, β, γ; et l'on aurait ainsi

$$\begin{aligned} \Delta x &= \alpha + 2\tang\tfrac{1}{2}\theta\,[(y - \tfrac{1}{2}\beta)\cos l - (z - \tfrac{1}{2}\gamma)\cos h], \\ \Delta y &= \beta + 2\tang\tfrac{1}{2}\theta\,[(z - \tfrac{1}{2}\gamma)\cos g - (x - \tfrac{1}{2}\alpha)\cos l], \\ \Delta z &= \gamma + 2\tang\tfrac{1}{2}\theta\,[(x - \tfrac{1}{2}\alpha)\cos h - (y - \tfrac{1}{2}\beta)\cos g], \end{aligned}$$

dont les premiers termes α, β, γ, expriment les *moments* de la translation *relative* à l'origine des coordonnées dont la valeur est $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$, et ceux affectés de la rotation expriment les *moments* de cette rotation autour de l'axe *relatif* à l'origine. Nous aurions pu établir directement ces formules, comme celles qui précèdent, et que nous avons construites sur l'axe *central*.

Équations de l'axe central.

16. Les équations de l'axe central se déduisent à leur tour des formules ci-dessus, avec la plus grande simplicité; car pour tous les points de cet axe, l'effet de la rotation étant nul, on a $\Delta x = t\cos g$, $\Delta y = t\cos h$, $\Delta z = t\cos l$; les coordonnées x, y, z, appartiennent à

cet axe, et en supprimant le trait on a les équations cherchées, exprimées au moyen des éléments des variations,

$$py - nz + \delta = t\cos g = \frac{m(Am + Bn + \Gamma p)}{m^2 + n^2 + p^2} = \frac{m(\alpha m + \beta n + \gamma p)}{m^2 + n^2 + p^2},$$

$$mz - px + \beta = t\cos h = \frac{n(Am + Bn + \Gamma p)}{m^2 + n^2 + p^2} = \frac{n(\alpha m + \beta n + \gamma p)}{m^2 + n^2 + p^2},$$

$$nx - my + \Gamma = t\cos l = \frac{p(Am + Bn + \Gamma p)}{m^2 + n^2 + p^2} = \frac{p(\alpha m + \beta n + \gamma p)}{m^2 + n^2 + p^2},$$

et plus simplement encore en éliminant les constantes A, B, Γ,

$$\frac{z - \gamma - \dfrac{p\delta - n\gamma}{m^2 + n^2 + p^2}}{m} = \frac{y - \beta - \dfrac{m\gamma - p\alpha}{m^2 + n^2 + p^2}}{n} = \frac{x - \alpha - \dfrac{n\beta - m\delta}{m^2 + n^2 + p^2}}{p},$$

équations dans lesquelles les coordonnées soustraites des coordonnées générales x, y, z, sont précisément celles du sommet du triangle isoscèle normal au plan des deux axes relatifs de translation et de rotation passant par l'origine des axes coordonnés, élevé sur une base perpendiculaire à l'axe relatif de rotation, coupant par la moitié l'axe de la translation relative et d'une grandeur égale à la translation projetée sur sa propre direction, l'angle au sommet étant égal à l'amplitude de la rotation θ; ce qui s'accorde bien avec la construction donnée précédemment.

Ces équations peuvent encore s'écrire ainsi qu'il suit, en y introduisant la rotation et les inclinaisons de l'axe de rotation:

$$\frac{x - \alpha - \cot\frac{\theta}{2}(\delta\cos l - \gamma\cos h)}{\cos g} = \frac{y - \beta - \cot\frac{\theta}{2}(\gamma\cos g - \alpha\cos l)}{\cos h} = \frac{z - \gamma - \cot\frac{\theta}{2}(\alpha\cos h - \beta\cos g)}{\cos l}.$$

Équation générale de l'axe central.

Mais on peut représenter ces trois équations des projections de l'axe central par une seule équation à coefficients indéterminés, savoir,

$$\cos a\,\Delta x + \cos b\,\Delta y + \cos c\,\Delta z = t\cos(t, a, b, c).$$

dans laquelle

$$\cos(t, a, b, c) = \cos a\cos g + \cos b\cos h + \cos c\cos l.$$

a, b, c, désignant trois angles arbitrairement formés par une direction quelconque avec les axes coordonnés. Cette équation unique, à cause de l'indétermination de ces angles a, b, c, se résout nécessairement dans les trois autres $\Delta x = t \cos g$, $\Delta y = t \cos h$, $\Delta z = t \cos l$, et elle exprime la propriété la plus générale du déplacement des points situés sur l'axe central, qui est d'être, relativement à une direction quelconque, égal à la translation absolue du système sans rotation, estimée suivant cette même direction.

Examen du cas des variations infiniment petites.

17. Si l'on ne considère que les variations des coordonnées du système solide, provenant d'un déplacement infiniment petit où les constantes α, β, γ, θ soient des infiniment petits du même ordre que les variations mêmes, si le signe Δ se change dans le signe usité δ, et qu'on néglige dans les formules données ci-dessus les termes du second ordre, on aura pour expressions des variations,

$$\delta x = \alpha + py - nz, \quad \delta y = \beta + mz - px, \quad \delta z = \gamma + nx - my,$$
$$m = \theta \cos g, \qquad n = \theta \cos h, \qquad p = \theta \cos l,$$

et pour équations de l'axe central,

$$\frac{\theta x + \gamma \cos h - \beta \cos l}{\cos g} = \frac{\theta y + \alpha \cos l - \gamma \cos g}{\cos h} = \frac{\theta z + \beta \cos g - \alpha \cos h}{\cos l}.$$

18. Revenons aux formules générales

$$\begin{aligned}
\Delta x &= \mathrm{A} + p\mathrm{Y} - n\mathrm{Z} = \alpha + p\left(\mathrm{Y} - \tfrac{1}{2}\beta\right) - n\left(\mathrm{Z} - \tfrac{1}{2}\gamma\right), \\
\Delta y &= \mathrm{B} + m\mathrm{Z} - p\mathrm{X} = \beta + m\left(\mathrm{Z} - \tfrac{1}{2}\gamma\right) - p\left(\mathrm{X} - \tfrac{1}{2}\alpha\right), \\
\Delta z &= \Gamma + n\mathrm{X} - m\mathrm{Y} = \gamma + n\left(\mathrm{X} - \tfrac{1}{2}\alpha\right) - m\left(\mathrm{Y} - \tfrac{1}{2}\beta\right),
\end{aligned}$$

dans lesquelles

$$m = 2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta \cos g, \quad n = 2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta \cos h, \quad p = 2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \cos l,$$

on en tire

$$\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = \left\{\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\theta\left[\left(\mathrm{X} - \tfrac{1}{2}\alpha\right)^2 + \left(\mathrm{Y} - \tfrac{1}{2}\beta\right)^2 + \left(\mathrm{Z} - \tfrac{1}{2}\gamma\right)^2 - \left(\mathrm{X} - \tfrac{1}{2}\alpha\right)\cos g + \left(\mathrm{Y} - \tfrac{1}{2}\beta\right)\cos h + \left(\mathrm{Z} - \tfrac{1}{2}\gamma\right)\cos l\right]^2\right\}.$$

équation qui exprime que la corde décrite en rotation autour de l'axe relatif passant par l'origine est égale au double de la tangente de la demi-rotation multipliée par la distance de l'origine au milieu de cette corde, estimée perpendiculairement à l'axe de rotation, distance égale à celle des milieux des droites parcourues définitivement par le point considéré et par l'origine.

En partant de cette propriété, que la figure rend sensible, de l'égalité des projections de toutes les droites parcourues définitivement sur la direction de l'axe de rotation et de l'invariabilité de la distance d'un point quelconque à l'origine, on aurait immédiatement les trois équations suivantes, d'où l'on déduirait facilement les valeurs trouvées déjà pour les variations Δx, Δy, Δz, savoir :

$$(\Delta x-\alpha)^2+(\Delta y-\beta)^2+(\Delta z-\gamma)^2=\{\tang\tfrac{1}{2}\varphi\}^2\{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2+(x-\alpha)\cos g+(y-\beta)\cos h+(z-\gamma)\cos l\},$$
$$(x-\alpha)\cos g+(y-\beta)\cos h+(z-\gamma)\cos l=0,$$
$$(\Delta x-\alpha)(x-\alpha)+(\Delta y-\beta)(y-\beta)+(\Delta z-\gamma)(z-\gamma)=0.$$

Mais arrivons enfin à exprimer ces variations en fonctions des variables x, y, z, en éliminant les coordonnées x, y, z, au moyen de leurs valeurs respectives $x+\frac{1}{2}\Delta x$, $y+\frac{1}{2}\Delta y$, $z+\frac{1}{2}\Delta z$. On aura, par cette élimination,

$$\Delta x-\alpha=2\tang\tfrac{1}{2}\varphi\,(y\cos l-z\cos h)=\tang\tfrac{1}{2}\varphi\,(\Delta y-\beta)\cos l-(\Delta z-\gamma)\cos h),$$
$$\Delta y-\beta=2\tang\tfrac{1}{2}\varphi\,(z\cos g-x\cos l)=\tang\tfrac{1}{2}\varphi\,(\Delta z-\gamma)\cos g-(\Delta x-\alpha)\cos l),$$
$$\Delta z-\gamma=2\tang\tfrac{1}{2}\varphi\,(x\cos h-y\cos g)=\tang\tfrac{1}{2}\varphi\,(\Delta x-\alpha)\cos h-(\Delta y-\beta)\cos g).$$

d'où enfin ces formules définitives

$$\Delta x=\alpha+\sin\tfrac{1}{2}\varphi\,(y\cos l-z\cos h)+2\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi\{(\cos g)(x\cos g+y\cos h+z\cos l)-x\},$$
$$\Delta y=\beta+\sin\tfrac{1}{2}\varphi\,(z\cos g-x\cos l)+2\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi\{(\cos h)(x\cos g+y\cos h+z\cos l)-y\},$$
$$\Delta z=\gamma+\sin\tfrac{1}{2}\varphi\,(x\cos h-y\cos g)+2\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi\{(\cos l)(x\cos g+y\cos h+z\cos l)-z\}.$$

dont les premiers termes seuls sont à conserver lorsqu'on passe des variations finies aux variations infiniment petites.

Expressions des variations finies en fonctions rationnelles des six constantes arbitraires $\alpha, \beta, \gamma, m, n, p$.

Si l'on conserve dans ces formules les constantes primitives m, n, p, et qu'on tire directement les valeurs de $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, des équations

$$\begin{aligned}
\Delta x &= \alpha + p\left(y + \tfrac{1}{2}\Delta y - \tfrac{1}{2}\beta\right) - n\left(z + \tfrac{1}{2}\Delta z - \tfrac{1}{2}\gamma\right),\\
\Delta y &= \beta + m\left(z + \tfrac{1}{2}\Delta z - \tfrac{1}{2}\gamma\right) - p\left(x + \tfrac{1}{2}\Delta x - \tfrac{1}{2}\alpha\right),\\
\Delta z &= \gamma + n\left(x + \tfrac{1}{2}\Delta x - \tfrac{1}{2}\alpha\right) - m\left(y + \tfrac{1}{2}\Delta y - \tfrac{1}{2}\beta\right),
\end{aligned}$$

on aura les expressions suivantes en fonctions *rationnelles* des six constantes $\alpha, \beta, \gamma, m, n, p$,

$$\Delta x = \alpha + \frac{py - nz + \frac{m}{2}(mx - ny - pz - m^2 + n^2 + p^2)}{1 + \frac{m^2 + n^2 + p^2}{4}}\,\frac{x}{2}.$$

$$\Delta y = \beta + \frac{mz - px + \frac{n}{2}(mx - ny - pz - m^2 + n^2 + p^2)}{1 + \frac{m^2 + n^2 + p^2}{4}}\,\frac{y}{2}.$$

$$\Delta z = \gamma + \frac{nx - my + \frac{p}{2}(mx - ny - pz - m^2 + n^2 + p^2)}{1 + \frac{m^2 + n^2 + p^2}{4}}\,\frac{z}{2}.$$

Conséquence importante relative aux formules de la transformation des coordonnées rectangulaires.

En comparant ces expressions à celles que l'on obtiendrait par la considération de la transformation des coordonnées rectangulaires, ainsi que cela est indiqué au n° **26**, on obtient un mode de réduction des neuf coefficients qui entrent dans les formules de cette transformation à trois variables indépendantes m, n, p, entièrement dégagé de radicaux, ce qui, je crois, n'avait pas encore été donné. En désignant,

suivant l'usage, ces neuf coefficients par a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', et par $\cos(xx')$, $\cos(yy')$ etc., les cosinus des angles des axes anciens et nouveaux, on trouve facilement

$$a = \cos(xx') = \frac{1 + \frac{m^2 - n^2 - p^2}{4}}{1 + \frac{m^2 + n^2 + p^2}{4}}, \quad a' = \cos(yx') = \frac{\frac{mn}{2} - p}{1 + \frac{m^2 + n^2 + p^2}{4}},$$

$$b = \cos(xy') = \frac{\frac{mn}{2} - p}{1 + \frac{m^2 + n^2 + p^2}{4}}, \quad b' = \cos(yy') = \frac{1 + \frac{n^2 - m^2 - p^2}{4}}{1 + \frac{m^2 + n^2 + p^2}{4}},$$

$$c = \cos(xz) = \frac{\frac{mp}{2} - n}{1 + \frac{m^2 + n^2 + p^2}{4}}, \quad c' = \cos(yz) = \frac{\frac{np}{2} + m}{1 + \frac{m^2 + n^2 + p^2}{4}};$$

$$a'' = \cos(zx') = \frac{\frac{pm}{2} + n}{1 + \frac{m^2 + n^2 + p^2}{4}}, \quad b'' = \cos(zy') = \frac{\frac{np}{2} - m}{1 + \frac{m^2 + n^2 + p^2}{4}},$$

$$c'' = \cos(zz') = \frac{1 + \frac{p^2 - m^2 - n^2}{4}}{1 + \frac{m^2 + n^2 + p^2}{4}},$$

et réciproquement,

$$\frac{m^2}{4} = \frac{1 + a - b' - c''}{1 - a - b' + c''}, \quad \frac{n^2}{4} = \frac{1 + b - a' - c''}{1 - a' + b' - c''}, \quad \frac{p^2}{4} = \frac{1 + c - a' - b'}{1 - a' - b' + c''},$$

$$m = \frac{2(c' - b'')}{1 + a - b' - c''}, \quad n = \frac{2(a'' - c)}{1 - a' + b' - c''}, \quad p = \frac{2(b - a)}{1 - a' - b' + c''}.$$

En éliminant m, n, p, des valeurs des coefficients a', b, c', a'', b'', c, on obtiendrait les formules de Monge, en fonctions *irrationnelles*, des trois constantes a, b', c'' [*].

19. De la considération géométrique du déplacement d'un systeme solide nous avons d'abord déduit les propriétés caractéristiques ou lois générales de ce déplacement qui se réduit toujours à une rotation et une translation consécutives, ou même à un seul couple de rotations autour

[*] Lacroix, tome I, page 533.

de deux axes fixes parallèles ou non parallèles, le déplacement se réduisant dans le premier cas à une simple translation, si, de plus, les rotations sont égales et de sens contraire. De ces propriétés nous venons de conclure l'expression analytique des variations finies ou infiniment petites des coordonnées d'un système solide déplacé d'une manière quelconque.

De l'expression de ces variations nous allons déduire maintenant les lois de composition des rotations et des translations que nous avons d'abord exposées synthétiquement, puis enfin nous établirons directement, et suivant trois procédés analytiques distincts, ces mêmes formules de la variation des coordonnées d'un système solide, en les déduisant uniquement de l'invariabilité des distances des points de ce système.

Lois de la composition des translations et des rotations successives, analytiquement déduites des formules des variations des coordonnées du système déplacé.

Désignons par les signes Δ', Δ'', les variations successives des coordonnées du solide déplacé, par le signe Δ les variations composées résultant de la succession des déplacements, par x', y', z', x'', y'', z'', les coordonnées des milieux des droites parcourues successivement par le point (x, y, z), et toujours par x, y, z, celles du milieu de la droite définitivement parcourue par ce point, en telle sorte qu'on ait

$$\mathrm{x}' = x + \tfrac{1}{2}\Delta' x, \qquad \mathrm{y}' = y + \tfrac{1}{2}\Delta' y, \qquad \mathrm{z}' = z + \tfrac{1}{2}\Delta' z.$$

$$\mathrm{x}'' = x + \Delta' x + \tfrac{1}{2}\Delta'' x, \qquad \mathrm{y}'' = y + \Delta' y + \tfrac{1}{2}\Delta'' y, \qquad \mathrm{z}'' = z + \Delta' z + \tfrac{1}{2}\Delta'' z.$$

$$\mathrm{x} = x + \tfrac{1}{2}\Delta x, \qquad \mathrm{y} = y + \tfrac{1}{2}\Delta y, \qquad \mathrm{z} = z + \tfrac{1}{2}\Delta z.$$

$$\Delta x = \Delta' x + \Delta'' x, \qquad \Delta y = \Delta' y + \Delta'' y, \qquad \Delta z = \Delta' z + \Delta'' z.$$

Désignons de plus par t, t', θ, θ', g, h, l, g', h', l', les translations absolues, les rotations et les inclinaisons des axes de rotation de chacun des deux déplacements consécutifs que nous considérons, et par T, Θ, G, H, L, les éléments analogues du déplacement définitif ou composé.

Examinons séparément la composition des translations simples, et celle des rotations sans translation. Supposons d'abord que les déplacements se réduisent à des translations, on aura

$$\begin{aligned}
\Delta' x &= t\cos g, & \Delta'' x &= t'\cos g', & \Delta x &= T\cos G = t\cos g + t'\cos g',\\
\Delta' y &= t\cos h, & \Delta'' y &= t'\cos h', & \Delta y &= T\cos H = t\cos h + t'\cos h',\\
\Delta' z &= t\cos l, & \Delta'' z &= t'\cos l', & \Delta z &= T\cos L = t\cos l + t'\cos l'.
\end{aligned}$$

par où l'on voit que la translation résultante de deux translations successives n'est autre en étendue et en direction que le troisième côté du triangle formé successivement par le parcours d'un point du système en vertu de deux translations données, on généraliserait facilement ce mode de composition en passant du triangle au polygone des translations.

Supposons maintenant qu'il s'agisse de composer deux rotations sans translation autour de deux axes convergents à l'origine des coordonnées; on aura successivement

$$\begin{aligned}
\Delta' x &= 2\tang\tfrac{1}{2}\theta\,(y'\cos l - z'\cos h), & \Delta'' x &= 2\tang\tfrac{1}{2}\theta'\,(y\cos l - z\cos h),\\
\Delta' y &= 2\tang\tfrac{1}{2}\theta\,(z'\cos g - x'\cos l), & \Delta'' y &= 2\tang\tfrac{1}{2}\theta'\,(z\cos g - x\cos l),\\
\Delta' z &= 2\tang\tfrac{1}{2}\theta\,(x'\cos h - y'\cos g), & \Delta'' z &= 2\tang\tfrac{1}{2}\theta'\,(x\cos h' - y\cos g').
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta x &= \Delta' x + \Delta'' x = 2\tang\tfrac{1}{2}\Theta\,(y\cos L - z\cos H),\\
\Delta y &= \Delta' y + \Delta'' y = 2\tang\tfrac{1}{2}\Theta\,(z\cos G - x\cos L),\\
\Delta z &= \Delta' z + \Delta'' z = 2\tang\tfrac{1}{2}\Theta\,(x\cos H - y\cos G)
\end{aligned}$$

Il faut déterminer les éléments Θ, G, H, L, en fonction des éléments donnés θ, g, h, l, θ', g', h', l', pour chacune des rotations à composer.

Or il convient d'abord, au moyen des relations données ci-dessus, d'éliminer les variables x', y', z', x'', y'', z'', de ces relations; on conclut facilement, en effet,

$$\begin{aligned}
x' &= x - \tfrac{1}{2}\Delta x, & x'' &= x + \tfrac{1}{2}\Delta x,\\
y' &= y - \tfrac{1}{2}\Delta y, & y'' &= y + \tfrac{1}{2}\Delta y,\\
z' &= z - \tfrac{1}{2}\Delta z, & z'' &= z + \tfrac{1}{2}\Delta z.
\end{aligned}$$

et ensuite

$$\begin{aligned}
\Delta' x &= 2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta\,(y \cos l - z \cos h) + \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta\,(\cos h\,\Delta' z - \cos l\,\Delta' y),\\
\Delta' y &= 2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta'\,(x \cos l' - x \cos h') + \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta\,(\cos l'\,\Delta' x - \cos h'\,\Delta' z),\\
\Delta' z &= 2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta\,(z \cos g - x \cos l) + \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta\,(\cos l\,\Delta' x - \cos g\,\Delta' z),\\
\Delta' x &= 2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta'\,(z \cos g' - x \cos l') + \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta'\,(\cos g'\,\Delta' z - \cos l'\,\Delta' x),\\
\Delta' z &= 2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta\,(x \cos h - y \cos g) + \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta\,(\cos g\,\Delta' y - \cos h\,\Delta' x),\\
\Delta' z &= 2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta'\,(x \cos h' - y \cos g') + \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta'\,(\cos h'\,\Delta' x - \cos g'\,\Delta' y);
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit les valeurs suivantes pour les variations partielles $\Delta' x$, $\Delta' x$, $\Delta' y$, $\Delta' y$, $\Delta' z$, $\Delta' z$,

$$\Delta' x = \frac{2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta\,(y \cos l - z \cos h) - 2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta'\,[x \cos c - \cos g'\,(x \cos g - y \cos h - z \cos l)]}{1 - \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta' \cos c},$$

$$\Delta' x = \frac{2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta'\,(y \cos l' - z \cos h') - 2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta'\,[x \cos c - \cos g\,(x \cos g' - y \cos h' - z \cos l')]}{1 - \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta' \cos c},$$

et semblablement pour les autres, c représentant l'angle des deux axes de rotation [*]; de ces expressions on forme par l'addition les variations complètes Δx, Δy, Δz, et par la comparaison des termes avec leurs expressions en fonction des éléments cherchés Θ, G, H, L, on arrive aux relations suivantes :

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\Theta \cos G = \frac{\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta \cos g - \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta' \cos g' + \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta' (\cos h \cos l' - \cos l \cos h)}{1 - \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta' \cos c},$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\Theta \cos H = \frac{\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta \cos h - \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta \cos h' + \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta' (\cos l \cos g' - \cos g \cos l')}{1 - \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta' \cos c},$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\Theta \cos L = \frac{\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta \cos l - \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta' \cos l' + \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta' (\cos g \cos h' - \cos h \cos g')}{1 - \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta' \cos c}.$$

d'où l'on tire enfin, pour la valeur de la rotation résultante,

$$\cos \tfrac{1}{2}\Theta = \cos \tfrac{1}{2}\theta \cos \tfrac{1}{2}\theta' - \sin \tfrac{1}{2}\theta \sin \tfrac{1}{2}\theta' \cos c.$$

et pour les inclinaisons de l'axe résultant

$$\begin{aligned}
\sin \tfrac{1}{2}\Theta \cos G &= \sin \tfrac{1}{2}\theta \cos \tfrac{1}{2}\theta' \cos g + \sin \tfrac{1}{2}\theta' \cos \tfrac{1}{2}\theta \cos g' + \sin \tfrac{1}{2}\theta \sin \tfrac{1}{2}\theta' (\cos h \cos l' - \cos l \cos h'),\\
\sin \tfrac{1}{2}\Theta \cos H &= \sin \tfrac{1}{2}\theta \cos \tfrac{1}{2}\theta' \cos h + \sin \tfrac{1}{2}\theta' \cos \tfrac{1}{2}\theta \cos h' + \sin \tfrac{1}{2}\theta \sin \tfrac{1}{2}\theta' (\cos l \cos g' - \cos g \cos l'),\\
\sin \tfrac{1}{2}\Theta \cos L &= \sin \tfrac{1}{2}\theta \cos \tfrac{1}{2}\theta' \cos l + \sin \tfrac{1}{2}\theta' \cos \tfrac{1}{2}\theta \cos l' + \sin \tfrac{1}{2}\theta \sin \tfrac{1}{2}\theta' (\cos g \cos h' - \cos h \cos g').
\end{aligned}$$

---

[*] On a $\cos c = \cos g \cos g' + \cos h \cos h' + \cos l \cos l'$.

On remarque d'abord dans ces formules que l'ordre de succession des rotations θ, θ' est indifférent pour l'amplitude de la rotation résultante, mais qu'il ne l'est pas pour la direction de l'axe de cette rotation, car la transposition des éléments $\theta\,\theta'$, $g\,h\,l$, $g'\,h'\,l'$, qui n'altère pas la valeur de la rotation, altère celle des cosinus des angles de son axe en changeant le signe des termes du second ordre par rapport à ces rotations, dans l'expression des cosinus, à moins que ces termes ne disparaissent pour des valeurs infiniment petites de θ, θ'.

Ensuite, l'expression de $\cos\frac{1}{2}\Theta$ convient bien à l'angle d'un triangle sphérique dont l'arc opposé serait égal à v et les deux autres angles à $\frac{1}{2}\theta$, $\frac{1}{2}\theta'$. Pour préciser davantage la position de l'axe résultant par rapport aux axes composants, supposons, ce qui est toujours possible,

$$\cos l = \cos l' = 0,\quad \cos h = 0,\quad \cos g = 1,\quad \cos g' = \cos v,\quad \cos h' = \sin v,$$

on aura

$$\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2}\Theta\cos G &= \sin\tfrac{1}{2}\theta\cos\tfrac{1}{2}\theta' + \sin\tfrac{1}{2}\theta'\cos\tfrac{1}{2}\theta\cos v,\\
\sin\tfrac{1}{2}\Theta\cos H &= \sin\tfrac{1}{2}\theta'\cos\tfrac{1}{2}\theta\sin v,\\
\sin\tfrac{1}{2}\Theta\cos L &= \sin\tfrac{1}{2}\theta\sin\tfrac{1}{2}\theta'\sin v.
\end{aligned}$$

Dans le cas du changement de l'ordre des rotations, le signe de cos L devient négatif, et c'est la seule altération que ce changement produise dans ces formules, d'où l'on voit que le nouvel axe résultant de ce changement dans l'ordre des rotations est placé, relativement au plan des deux axes donnés, dans une position *symétrique* de celle du premier.

Si l'on désigne par H′ l'angle formé par l'axe résultant avec l'axe de la rotation θ', on aura

$$\cos H' = \cos H\cos h' + \cos G\cos g' = \frac{\sin\frac{1}{2}\theta'\cos\frac{1}{2}\theta + \sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta'\cos v}{\sin\frac{1}{2}\Theta};$$

on a d'ailleurs

$$\begin{aligned}
\sin^2\tfrac{1}{2}\Theta &= \sin^2\tfrac{1}{2}\theta\sin^2 v + \sin\tfrac{1}{2}\theta'\cos\tfrac{1}{2}\theta + \sin\tfrac{1}{2}\theta\cos\tfrac{1}{2}\theta'\cos v\\
&= \sin^2\tfrac{1}{2}\theta'\sin^2 v + \sin\tfrac{1}{2}\theta\cos\tfrac{1}{2}\theta + \sin\tfrac{1}{2}\theta'\cos\tfrac{1}{2}\theta'\cos v.
\end{aligned}$$

et par conséquent,

$$\sin^2 G = \frac{\sin^2 \frac{1}{2}\theta' \sin^2 v}{\sin^2 \frac{1}{2}\Theta}, \qquad \sin^2 H' = \frac{\sin^2 \frac{1}{2}\theta \sin^2 v}{\sin^2 \frac{1}{2}\Theta},$$

équations qui établissent la proportionnalité des sinus des demi-rotations à ceux des angles formés par l'axe résultant avec les axes composés inversement correspondants, et qui conduisent ainsi à la construction que nous avons indiquée d'abord pour la composition des rotations.

Les termes du second ordre relatifs aux rotations rendent très compliquées les formules que l'on obtiendrait en suivant une marche analogue pour la composition des rotations autour d'un nombre quelconque d'axes convergents; nous ne nous y arrêterons donc pas.

De la composition analytique des rotations autour d'axes non convergents.

20. Quant à la composition de rotations autour d'axes non convergents, et généralement à celle des déplacements quelconques successivement donnés d'un système solide par des variations telles que $\Delta' x$, $\Delta'' x$, $\Delta''' x$, etc., dont la forme analytique est connue, on aura généralement

$$\begin{aligned}
\Delta x &= \Delta' x + \Delta'' x + \Delta''' x + \ldots = A + 2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\Theta \,(y \cos L - z \cos H), \\
\Delta y &= \Delta' y + \Delta'' y + \Delta''' y + \ldots = B + 2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\Theta \,(z \cos G - x \cos L), \\
\Delta z &= \Delta' z + \Delta'' z + \Delta''' z + \ldots = \Gamma + 2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\Theta \,(x \cos H - y \cos G).
\end{aligned}$$

Les constantes A, B, Γ,... se trouvent déterminées en fonction de constantes analogues A′, B′, Γ′, A″, B″, Γ″,... propres à chacun des déplacements consécutifs à composer, et des autres éléments de ces déplacements. Mais il est évident que les éléments Θ, G, H, L, de la rotation définitive ne seront fonctions que des éléments *rotatifs* de ces déplacements, ainsi que nous l'avons vu d'abord, par des considérations géométriques. Prenons pour exemple de calcul la composition des rotations autour de deux axes fixes non convergents, l'un confondu avec l'axe des x et l'autre normal à l'axe des z et coupant cet axe à une distance de l'origine égale à u; désignons toujours par v l'angle de ces deux

axes de rotation, par θ, θ', les amplitudes des rotations respectives. On aura d'abord, pour l'amplitude de la rotation et la direction de l'axe résultant, les valeurs données ci-dessus, et soit pour compléter les variations des coordonnées, soit pour fixer la position de l'axe central, il n'y aura plus qu'à calculer les variations de l'origine des coordonnées α, β, γ. Or celles qui proviennent de la première rotation autour de l'axe des x sont nulles : il suffit donc de calculer celles qui proviennent de la rotation θ', pour laquelle on a généralement

$$\begin{aligned}
\Delta x &= \alpha + 2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta' \left| y' - \tfrac{1}{2}\beta \cos l' - z - \tfrac{1}{2}\gamma \cos h' \right|, \\
\Delta y &= \beta + 2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta' \left| z' - \tfrac{1}{2}\gamma \cos g' - x - \tfrac{1}{2}\alpha \cos l' \right|, \\
\Delta z &= \gamma + 2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta' \left| x - \tfrac{1}{2}\alpha \cos h' - y - \tfrac{1}{2}\beta \cos g' \right| :
\end{aligned}$$

ces variations doivent être nulles pour tous les points de l'axe de la rotation θ', pour lequel on a

$$\cos l' = 0, \quad \cos h' = \sin v, \quad \cos g' = \cos v, \quad y = x \operatorname{tang} v, \quad z = u.$$

Il en résulte pour α, β, γ, les valeurs suivantes, qu'on déduirait facilement par la construction même,

$$\alpha = u \sin v \sin \theta', \quad \beta = -u \sin v \sin \theta', \quad \gamma = 2u \sin^2 \tfrac{1}{2}\theta'.$$

d'où l'on tire pour la valeur T de la translation absolue résultant des deux rotations autour des deux axes fixes non convergents,

$$T = \alpha \cos G + \beta \cos H + \gamma \cos L = \frac{2u \sin v \sin \frac{1}{2}\theta \sin \frac{1}{2}\theta}{\sin \frac{1}{2}\Theta} = 2u \cos L,$$

conformément aux théorèmes du n° **13**.

Ainsi l'axe résultant et les deux axes divergents donnés approchent d'autant plus d'être parallèles à un même plan, que la distance qui sépare les deux derniers est plus grande par rapport à la translation absolue du déplacement composé.

Les équations de l'axe central s'obtiennent en substituant pour α, β, γ, Θ, G, H, L, leurs valeurs données ci-dessus dans les équations

générales

$$\frac{y-\alpha+\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}\Theta(\beta\cos L-\gamma\cos H)}{\cos G}=\frac{z-\beta+\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}\Theta(\gamma\cos G-\alpha\cos L)}{\cos H}=\frac{x-\gamma+\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}\Theta(\alpha\cos H-\beta\cos G)}{\cos L}.$$

Dans le cas des rotations infiniment petites ces formules se simplifient beaucoup, et il se trouve que l'axe central est parallèle au plan des deux axes composants et rencontre leur plus courte distance. On a effectivement dans cette hypothèse, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$\cos G=\frac{\theta+\theta'\cos v}{\Theta},\quad \cos H=\frac{\theta'\sin v}{\Theta},\quad \cos L=\frac{\theta\theta'\sin v}{2\Theta}.$$

$$\Theta=\theta^2+\theta'^2+2\theta\theta'\cos v,$$

$$\alpha=u\theta'\sin v,\quad \beta=-u\sin\theta'\cos v,\quad \gamma=0,\quad T=\frac{u\theta\theta\theta'\sin v}{\Theta}.$$

et pour équations de l'axe central,

$$y=\frac{u\theta'\sin v}{\theta+\theta'\cos v},\qquad z=\frac{u\theta'(\theta'+\theta\cos v)}{\Theta^2}.$$

Composition des rotations successives autour de trois axes rectangulaires.

21. Nous terminerons ce sujet en donnant les formules suivantes pour la composition de trois relations successives θ, θ', θ'', autour des trois axes coordonnés des x, y, z; les éléments de la rotation composée Θ, G, H, L, sont ainsi exprimés :

$$\cos\tfrac{1}{2}\Theta=\cos\tfrac{1}{2}\theta\cos\tfrac{1}{2}\theta'\cos\tfrac{1}{2}\theta''-\sin\tfrac{1}{2}\theta\sin\tfrac{1}{2}\theta'\sin\tfrac{1}{2}\theta.$$

$$\sin^2 G=\frac{1-\cos\theta'\cos\theta''}{2\sin^2\frac{1}{2}\Theta},\quad \sin^2 H=\frac{1-\cos\theta\cos\theta''+\sin\theta\sin\theta'\sin\theta''}{2\sin^2\frac{1}{2}\Theta},\quad \sin^2 L=\frac{1-\cos\theta\cos\theta'}{2\sin^2\frac{1}{2}\Theta}.$$

Ces formules ne deviennent symétriques, par rapport à chaque axe coordonné, que lorsque les rotations étant infiniment petites, le terme $\sin\theta\sin\theta'\sin\theta''$ s'évanouit dans $\sin^2 H$, hypothèse qui rend d'ailleurs

l'ordre de ces rotations indifférent et pour laquelle on trouve, suivant la loi de composition des rotations infiniment petites,

$$\Theta^2 = \theta^2 + \theta'^2 + \theta''^2, \quad \cos G = \frac{\theta}{(\Theta)}, \quad \cos H = \frac{\theta'}{(\Theta)}, \quad \cos L = \frac{\theta''}{(\Theta)}.$$

Le problème inverse de celui que nous venons de résoudre et qui aurait pour objet, étant donnée une rotation finie et son axe, de la décomposer en trois rotations autour des axes coordonnés, reviendrait à tirer des équations ci-dessus les valeurs de θ, θ', θ'', en fonction des éléments donnés Θ, G, H, L, opération inextricable pour des rotations finies et d'une entière simplicité pour les rotations infiniment petites.

De la composition des déplacements infiniment petits successifs d'un système solide.

22. Nous allons maintenant considérer directement et avec une étendue spéciale, les lois de la composition et de la décomposition des déplacements infiniment petits successifs, tirées de l'expression analytique des variations infiniment petites des coordonnées d'un système solide.

Ces variations sont généralement exprimées de la manière suivante

$$\delta x = \alpha + py - nz, \quad \delta y = \beta + mz - px, \quad \delta z = \gamma + nx - my,$$

en fonctions *linéaires* des éléments infiniment petits du déplacement, α, β, γ, m, n, p; il en résulte que les variations provenant de plusieurs déplacements successifs infiniment petits se composent par l'addition des variations qui seraient dues séparément à chacun de ces déplacements successifs, rapporté à la situation première du système. Les *éléments* du déplacement composé ou définitif se forment par la somme des éléments analogues des déplacements partiels.

C'est ainsi que la différentielle complète d'une fonction de plusieurs variables se forme par l'addition des différentielles partielles relatives à chacune de ces variables, différentielles partielles qu'il est indifférent de prendre sur la fonction primitive même, ou sur cette fonction augmentée successivement par les accroissements infiniment petits de cha-

cune de ses variables, puisqu'on néglige les infiniment petits du second ordre.

Si donc on désigne par α', β', γ', m', n', p', α'', β'', γ'', m'', n'', p'', α''', β''', γ''', m''', n''', p''', etc., les éléments des déplacements successifs que l'on doit composer, et pour chacun desquels, considéré séparément, on aura

$$\delta' x = \alpha' + p'y - n'z,\quad \delta' y = \beta' + m'z - p'x,\quad \delta' z = \gamma' + n'x - m'y,$$
$$\delta'' x = \alpha'' + p''y - n''z,\quad \delta'' y = \beta'' + m''z - p''x,\quad \delta'' z = \gamma'' + n''x - m''y,$$
etc.,

les éléments du déplacement définitif du système, représentés par A, B, C, M, N, P, seront respectivement les sommes des éléments partiels donnés; on aura

$$A = \alpha' + \alpha'' + \alpha''' = \Sigma\alpha,\quad B = \Sigma\beta,\quad C = \Sigma\gamma,\quad M = \Sigma m,\quad N = \Sigma n,\quad P = \Sigma p,$$

et pour expressions définitives des variations des coordonnées du système

$$\delta x = A + Py - Mz = A + \Theta(y\cos L - z\cos H),$$
$$\delta y = B + Mz - Px = B + \Theta(z\cos G - x\cos L),$$
$$\delta z = C + Nx - My = C + \Theta(x\cos H - y\cos G),$$

en introduisant la rotation et les inclinaisons de son axe; et *réciproquement*, on pourra considérer tout déplacement donné et infiniment petit d'un système solide, dont les éléments seraient A, B, C, M, N, P, comme le résultat de déplacements successifs dont les éléments α', β', γ', m', n', p', etc., ne sauraient être assujétis qu'à la condition d'être égaux, en somme, aux éléments respectivement donnés A, B, C, M, N, P, l'ordre de succession de ces déplacements étant d'ailleurs tout-à-fait arbitraire; et par conséquent il devient évident que la rotation θ, dont les *composantes* relatives aux axes coordonnés sont égales respectivement à m, n, p, résulte des rotations *successives* m, n, p, comme la translation t, parallèle à l'axe de rotation, peut aussi être considérée comme résultant de trois translations *successives* $t\cos g$, $t\cos h$, $t\cos l$, parallèles aux axes coordonnés.

23. Ces rotations *successives* m, n, p, sont désignées en *mécanique* sous le nom de *rotations élémentaires*, et considérées comme *simultanées* dans le passage des lois *géométriques* aux lois *mécaniques* du déplacement des corps, bien que la géométrie n'en puisse rendre compte qu'en les supposant *successives;* car il est évident que le système, en tournant autour de l'axe, dont la rotation est θ et les angles avec les axes coordonnés g, h, l, n'accomplit pas *en même temps* les trois rotations m, n, p, autour de ces axes coordonnés, ce qui impliquerait quatre axes de rotation au lieu d'un seul (*Mécanique analytique*, t. I, page 52). Nous touchons ici un point fondamental de la philosophie des mathématiques, celui qui sépare la géométrie de la mécanique, et dont ce Mémoire a pour objet de constater toute l'importance.

La rotation θ résulte de la composition successive des rotations $\theta \cos g$, $\theta \cos h$, $\theta \cos l$, parce que la variation due à cette rotation θ est pour chaque axe coordonné la somme des variations qui seraient dues séparément à chacune de ces rotations élémentaires. En effet, si le système ne tournait qu'autour de l'axe des x avec une rotation $\theta \cos g$, on aurait pour ce déplacement,

$$\delta x = 0, \quad \delta y = \theta z \cos g, \quad \delta z = -\theta y \cos g;$$

s'il ne tournait au contraire qu'autour de l'axe des y avec une rotation $\theta \cos h$, on aurait pour le second déplacement,

$$\delta x = \theta z \cos h, \quad \delta y = 0, \quad \delta z = \theta z \cos h;$$

et enfin la rotation $\theta \cos l$ autour de l'axe des z, considérée comme étant la seule, donnerait

$$\delta x = \theta y \cos l, \quad \delta y = -\theta x \cos l, \quad \delta z = 0.$$

La somme de ces variations composées relatives à chaque axe donnera donc pour le déplacement composé, effectué définitivement par la rotation θ autour de l'axe (g, h, l), les expressions suivantes :

$$\delta x = \theta y \cos l - z \cos h, \quad \delta y = \theta z \cos g - x \cos l, \quad \delta z = \theta x \cos h - y \cos g.$$

24. Revenons à la composition des déplacements ou des variations quelconques successivement donnés pour un même système. Les for-

mules des variations peuvent s'écrire ainsi, conformément au n° **15**,

$$\delta x = \alpha + \theta(y\cos l - z\cos h) = t\cos g + \theta u\cos G,$$
$$\delta y = \beta + \theta(z\cos g - x\cos l) = t\cos h + \theta u\cos H,$$
$$\delta z = \gamma + \theta(x\cos h - y\cos g) = t\cos l + \theta u\cos L,$$

dans lesquelles u désigne la distance du point x, y, z à l'axe *central* du déplacement, G, H, L, les angles formés avec les axes coordonnés par la direction de l'*arc* infiniment petit $u\theta$, décrit en *rotation* autour de cet axe central.

On aura généralement pour expression du déplacement relatif à une direction quelconque s, faisant avec les axes coordonnés les angles a, b, c,

$$\delta s = t\cos(t, s) + \theta u\cos(\theta u, s).$$

en désignant par $\cos(t, s)$, $\cos(\theta u, s)$, les cosinus des angles de cette direction avec l'axe central et avec l'arc de la rotation infiniment petite θ.

Mais deux droites étant données dans l'espace, on sait que la distance d'un point de l'une à l'autre est réciproque au sinus de l'angle formé par la première avec le plan qui contient la seconde et le point considéré, ou, ce qui revient au même, que le produit de ce sinus et de cette distance est constamment égal au produit de la plus courte distance de ces droites par le sinus de leur inclinaison. Si donc on appelle D la distance de l'axe central à la droite qui serait menée par le point du système que l'on considère dans la direction s, et par v l'angle de cette direction et de l'axe, on aura

$$u\cos(\theta u, s) = \mathrm{D}\sin v \quad \text{et} \quad \delta s = t\cos v + \mathrm{D}\theta\sin v.$$

$t\cos v$ est le *moment* de la translation du système relatif à la direction s; $\mathrm{D}\theta\sin v$ est celui de la rotation du système relatif à la même direction [*].

Si maintenant on considère les déplacements successifs du système autour d'axes centraux dont les éléments seraient $t, t', t'', \theta, \theta', \theta''$,

---

[*] *Ce moment est aussi* la mesure de toute translation qui serait effectuée par un point quelconque de l'axe central sur cet axe même, et d'une étendue égale au produit de la rotation θ par la distance de ce point à la droite s, cette translation étant estimée ou projetée *orthogonalement* à cette droite s, c'est-à-dire sur une droite menée par le point considéré normalement au plan qui contient ce point et cette droite.

$g, h, l, g', h', l', g'', h'', l''$, etc., et qu'on désigne par δS le déplacement composé et résultant d'un point du système relatif à cette même direction s et par T, Θ, G, H, L, les éléments de l'axe central résultant, on aura

$$\delta S = \Sigma t \cos v + \Sigma D \theta \sin v = T \cos V + \Theta \mathfrak{D} \sin V.$$

$\mathfrak{D}$ désignant la distance de l'axe résultant à la droite s, menée par le point (x, y, z).

Cette équation, à cause des indéterminées a, b, c, qu'elle renferme et parce qu'elle doit avoir lieu pour tous les points du système, équivaut aux six équations suivantes qui donnent la position de l'axe central du déplacement, la translation et la rotation résultantes,

$$\Sigma \alpha - T \cos G + \Theta Y \cos L - \Theta Z \cos H = 0,$$
$$\Sigma \beta - T \cos H + \Theta Z \cos G - \Theta X \cos L = 0,$$
$$\Sigma \gamma - T \cos L + \Theta X \cos H - \Theta Y \cos G = 0,$$
$$\Theta \cos G = \Sigma \theta \cos g, \quad \Theta \cos H = \Sigma \theta \cos h, \quad \Theta \cos L = \Sigma \theta \cos h,$$

desquelles on tire

$$T = \cos G \Sigma \alpha + \cos H \Sigma \beta + \cos L \Sigma \gamma,$$

X, Y, Z désignant les coordonnées d'un point quelconque de l'axe central résultant; car on a

$$\delta S = \cos a \Sigma \delta x + \cos b \Sigma \delta y + \cos c \Sigma \delta z,$$
$$\cos V = \cos a \cos G + \cos b \cos H + \cos c \cos L,$$
$$\mathfrak{D} \sin V = \cos a \{(y - Y) \cos L - (z - Z) \cos H\} + \cos b \{(z - Z) \cos G - (x - X) \cos L\}$$
$$+ \cos c \{(x - X) \cos H - (y - Y) \cos G\}.$$

On pourrait rigoureusement ne considérer que des rotations dans cette analyse, puisque les translations t, t', peuvent toujours être représentées par des couples de rotations, et poser simplement

$$\delta S = T \cos V + \Theta \mathfrak{D} \sin V = \Sigma \theta D \sin v.$$

Pour transformer une translation t suivant la direction g, h, l, en un couple de rotations, il faut résoudre les trois équations suivantes :

$$t\cos g = u_1\theta_1\cos G_1 + u_2\theta_2\cos G_2 = \theta_1[(y-Y)\cos l_1 - (z-Z)\cos h_1] + \theta_2[(y-Y')\cos l_2 - (z-Z')\cos h_2],$$

$$t\cos h = u_1\theta_1\cos H_1 + u_2\theta_2\cos H_2 = \theta_1[(z-Z)\cos g_1 - (x-X)\cos l_1] + \theta_2[(z-Z')\cos g_2 - (x-X')\cos l_2],$$

$$t\cos l = u_1\theta_1\cos L_1 + u_2\theta_2\cos L_2 = \theta_1[(x-X)\cos h_1 - (y-Y)\cos g_1] + \theta_2[(x-X')\cos h_2 - (y-Y')\cos g_2],$$

dans lesquelles X, Y, Z, X', Y', Z', etc., représentent les coordonnées des axes de rotations, et g_1, h_1, l_1, g_2, h_2, l_2, leurs inclinaisons. Ces équations doivent être satisfaites indépendamment des variables x, y, z, et donnent ainsi les six équations suivantes :

$$\theta_1\cos g_1 + \theta_2\cos g_2 = 0,\quad \theta_1\cos h_1 + \theta_2\cos h_2 = 0,\quad \theta_1\cos l_1 + \theta_2\cos l_2 = 0,$$

$$t\cos g = (Z\cos h_1 - Y\cos l_1)\theta_1 + (Z'\cos h_2 - Y'\cos l_2)\theta_2,$$

$$t\cos h = (X\cos l_1 - Z\cos g_1)\theta_1 + (X'\cos l_2 - Z'\cos g_2)\theta_2,$$

$$t\cos l = (Y\cos g_1 - X\cos h_1)\theta_1 + (Y'\cos g_2 - X'\cos h_2)\theta_2.$$

d'où l'on tire

$$\theta_2 = -\theta_1,\quad \cos g_1 = \cos g_2,\quad \cos h_1 = \cos h_2,\quad \cos l_1 = \cos l_2,$$

$$t\cos g = \theta_2[(Z - Z')\cos l_1 - (Y - Y')\cos l_2] \text{ etc.},$$

équations qui conviennent exclusivement à deux axes de rotation parallèles dans un plan normal à t, la distance de ces deux axes étant égale au quotient $\frac{t}{\theta^2}$. Revenons à l'équation

$$\delta S = T\cos V + \Theta\mathfrak{D}\sin V = \Sigma\theta D\sin\nu,$$

il en résulte que, *relativement à une direction quelconque s*, la composition des rotations θ, θ', θ'', autour d'axes fixes, se résout en une rotation Θ, et en une translation ou *couple* de rotations dont le *moment* T cos V est égal à l'excédant de la somme des *moments* de ces rotations partielles, sur le moment résultant de la rotation composée, ces moments estimés relativement à un même point.

Pour un point quelconque comparé à l'origine des coordonnées, on aura

$$\delta S - \delta S_0 = \Sigma \theta D \sin v - \Sigma \theta D_0 \sin v_0 = \Theta \sin V (\mathfrak{D} - \mathfrak{D}_0).$$

Ainsi donc, la différence des *moments composés* d'un système solide assujéti à subir successivement des déplacements infiniment petits par rapport à deux points de ce système, est égale à la somme des différences des *moments* résultant pour ces deux points de chacune des rotations successives du système, tous ces moments étant estimés relativement à une même direction.

On sait que ces *moments* ne désignent rien autre que l'*effet* du déplacement du système sur le point auquel ils sont rapportés; la translation étant commune à tous les points ne peut, ni dans les déplacements partiels, ni dans le déplacement composé, altérer leur situation relative. Il était donc évident *à priori* que tout *déplacement relatif*, partiel ou composé, d'un point quelconque du système par rapport à un autre point de ce système, ne pouvait dépendre que des *rotations partielles* ou *composées* de ce système.

Conditions d'équilibre de plusieurs déplacements successifs infiniment petits.

24. Nous sommes conduits à rechercher à quelles conditions devraient satisfaire les éléments des déplacements successifs indiqués pour un système solide, pour que ce système passant successivement par les diverses situations infiniment voisines, correspondant à ces éléments, revînt à sa position primitive, ce qui constituerait un état définitif d'*équilibre* ou de neutralisation pour ces déplacements successifs. Or il est évident que toutes les conditions dont il s'agit sont comprises dans une seule équation décomposable en six autres, à cause des indéterminées qu'elle renferme, savoir :

$$\delta S = 0,$$

puisque cette équation exprime que chaque point du système est revenu à sa position primitive. Les six équations renfermées dans l'équation gé-

nérale $\delta S = 0$, sont

$$\begin{aligned} \delta x_0 &= \Sigma \alpha = 0, \\ \delta y_0 &= \Sigma \beta = 0, \\ \delta z_0 &= \Sigma \gamma = 0, \\ \Sigma \theta \cos g = 0, \quad \Sigma \theta \cos h &= 0, \quad \Sigma \theta \cos l = 0, \end{aligned}$$

en désignant par δx_0, δy_0, δz_0, les variations complètes des coordonnées de l'origine; les trois premières expriment l'*immobilité* de l'origine des coordonnées, et les trois autres qu'aucune rotation n'a lieu définitivement dans le système déplacé : double condition qui exclut la possibilité d'un déplacement définitif quelconque. Cette double condition ressort immédiatement de la relation,

$$\delta S = T \cos V + \Theta \mathfrak{D} \sin V = 0,$$

relation qui ne peut être satisfaite pour un point quelconque qu'autant qu'on ait

$$T = 0, \quad \Theta = 0.$$

Or $\Theta = 0$ implique forcément les trois équations suivantes,

$$\Sigma \theta \cos g = 0, \quad \Sigma \theta \cos h = 0, \quad \Sigma \theta \cos l = 0.$$

et l'équation fondamentale (n° **15**), appliquée à l'origine,

$$\delta x_0^2 + \delta y_0^2 + \delta z_0^2 = t^2 + \theta^2 u^2,$$

lorsque la rotation est nulle avec la translation, donne les trois autres

$$\delta x_0 = 0, \quad \delta y_0 = 0, \quad \delta z_0 = 0.$$

Ainsi donc, les conditions d'*équilibre* d'une suite de déplacements successifs infiniment petits d'un même solide sont au nombre de six, dont trois expriment que le déplacement du système n'admet aucune translation et les trois autres excluent toute rotation.

Ces six équations d'équilibre sont analytiquement comprises dans une seule équation qui exprime de la manière la plus simple la loi *générale* de cet équilibre, savoir,

$$\Sigma \theta D \sin v = 0,$$

qui exprime que le *moment* résultant pour un point quelconque du système de l'addition de tous les *moments* produits en ce point par les rotations et les translations ou *couples* de *rotations* successivement imprimées ou subies par le système, soit nul par rapport à une direction quelconque. Mais l'équilibre de ces déplacements infiniment petits successifs, toutes conditions restant égales, continuera d'avoir lieu, quelque rapide que puisse être supposée la succession de ces déplacements : en passant aux limites, on arrive à l'identité des lois de l'équilibre des causes *successives* de déplacements infiniment petits avec celle de l'équilibre des causes *simultanées* de déplacements infiniment petits.

Ainsi donc l'équation

$$\Sigma \theta D \sin V = 0,$$

exprime la condition générale de l'*immobilité* d'un système invariable, sollicité par des causes quelconques agissant *simultanément* à décrire autour d'axes fixes donnés les rotations infiniment petites θ, θ', etc.

Analogie de ces lois de composition et d'équilibre avec celles de la composition et de l'équilibre des forces *appliquées à un système invariable.*

26. L'analogie de cette loi générale avec celle de l'équilibre des forces appliquées à un système invariable est frappante. Les forces appliquées suivant les axes des rotations et supposées proportionnelles à ces rotations, le *moment* d'une force de ce système est identiquement proportionnel à celui de la rotation correspondante, chaque translation est remplacée par un couple de forces appliquées suivant les axes du couple de rotation équivalent à la translation ; mais l'analogie s'étend aux lois de la composition comme à celles de l'équilibre et peut s'énoncer ainsi : Un système de déplacements successifs étant donné à composer en un déplacement définitif, et en même temps un système de forces proportionnelles aux rotations successives données pour chaque déplacement et appliquées suivant les mêmes axes que ces rotations, les translations des déplacements successifs, si on ne les suppose pas implicitement comprises dans les rotations au moyen de leur représentation par des couples de rotations, étant alors représentées dans le système de force considérés par des couples de forces dont les moments seraient

égaux à ceux de ces translations, relativement aux trois axes coordonnés, le système de déplacements successifs aboutira à un déplacement définitif composé d'une rotation et d'une translation absolue relatives a l'axe central de rotation; de même que le systeme de forces se résoudra par la composition successive de ses éléments en une seule force et à un seul couple de forces si ué dans un plan normal à la force résultante. Cette force résultante sera appliquée à l'axe central du déplacement définitif, lequel sera en même temps l'*axe central* du systeme statique; elle sera proportionnelle à la rotation résultante, et le moment du couple normal à cette force sera proportionnel à la translation absolue du système qui s'opère parallèlement à l'axe central. Lorsque les axes des rotations à composer sont tous parallèles et passent par des points déterminés, l'axe central résultant leur est aussi parallele et passe par un certain point qui correspond au centre des forces parallèles, toujours le même, quelle que soit la direction des axes de rotation, et qui n'est autre que le centre de gravité des points déterminés sur les axes de rotation composants lorsque toutes les rotations sont égales [*].

En effet, les équations de l'axe central résultant de la composition des axes fixes de rotation, se réduisent dans ce cas à

$$\text{Y} \cos l - \text{Z} \cos h + \frac{\Sigma\alpha}{\Sigma\theta} = 0, \qquad \text{X} \cos h - \text{Y} \cos g + \frac{\Sigma\gamma}{\Sigma\theta} = 0,$$

et l'on a

$$\text{T} = 0, \quad \Theta = \Sigma\theta = \Sigma\alpha = \Sigma\theta\ \text{Z} \cos h - \text{Y} \cos l\ , \text{ etc.},$$

X, Y, Z, désignant les coordonnées de l'axe de la rotation θ, l'axe résultant passe donc par le point dont les coordonnées sont

$$x = \frac{\Sigma\theta\text{X}}{\Sigma\theta}, \qquad y = \frac{\Sigma\theta\text{Y}}{\Sigma\theta}, \qquad z = \frac{\Sigma\theta\text{Z}}{\Sigma\theta}.$$

---

[*] Et comme toute succession de rotations infiniment petites en nombre quelconque effectuées par un solide autour d'axes fixes différents se réduit d'une infinité de manières à deux rotations conjuguées, de même tout système de forces appliquées à un solide peut être représenté d'une infinité de manières par deux forces conjuguées, dont le produit multiplié par la distance qui les sépare et par le sinus de leur direction est constant.

De la détermination des variations des coordonnées d'un système solide dues à un déplacement quelconque de ce système, analytiquement déduites des conditions de l'invariabilité de ce système.

27. La considération du déplacement des axes coordonnés supposés liés invariablement au système déplacé, conduit immédiatement à l'expression algébrique des variations des coordonnées de ce système, et il ne s'agit plus que de réduire au moindre nombre les constantes arbitraires qui se présentent dans le calcul, ainsi qu'on va le voir.

En effet, si l'on désigne par a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', les cosinus des angles que forment avec leurs directions primitives les axes coordonnés déplacés avec le système, les coordonnées $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$, d'un point du système après son déplacement, rapportées à la situation première des axes coordonnés, s'exprimeront en fonction des coordonnées de ce même point déplacé, rapportées aux axes déplacés et qui seront les mêmes que celles du point considéré dans la première position, rapportées aux premiers axes suivant les formules connues pour la transformation des coordonnées rectangulaires; on aura donc les trois équations suivantes :

$$\begin{aligned} x + \Delta x &= \alpha + a x + b y + c z, \\ y + \Delta y &= \beta + a' x + b' y + c' z, \\ z + \Delta z &= \gamma + a'' x + b'' y + c'' z, \end{aligned}$$

au moyen desquelles Δx, Δy, Δz, se trouvent généralement exprimées, quel que soit le déplacement du solide, en fonction linéaire des coordonnées x, y, z, comprenant douze coefficients arbitraires qui réellement se réduisent à six constantes, car les trois premières α, β, γ, expriment la variation des coordonnées de l'origine, et les trois autres, a, b', c'', au moyen desquelles on élimine les six autres cosinus par les formules de Monge, définissent le changement de *direction* dans l'espace des axes coordonnés primitifs.

Mais la réduction de ces douze constantes à six peut s'opérer plus simplement encore, sans l'emploi des formules de Monge, compliquées de radicaux, et par une voie qui, relativement aux variables x, y, z,

conduit aux expressions analytiques les moins compliquées pour Δx, Δy, Δz. En effet, introduisons dans les équations ci-dessus les coordonnées X, Y, Z, du milieu de la droite qui joint les deux situations correspondantes du point x, y, z, en sorte qu'on ait

$$x = \mathrm{X} - \tfrac{1}{2}\Delta x, \quad y = \mathrm{Y} - \tfrac{1}{2}\Delta y, \quad z = \mathrm{Z} - \tfrac{1}{2}\Delta z;$$

puis pour réunir ces trois équations en une seule, multiplions-les successivement par trois facteurs indéterminés μ, ν, π, et additionnons-les, nous aurons à considérer l'équation unique

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\Delta x(a\mu + a'\nu + a''\pi + \mu) + \tfrac{1}{2}\Delta y(b\mu + b'\nu + b''\pi + \nu) + \tfrac{1}{2}\Delta z(c\mu + c'\nu + c''\pi + \pi)\\ &= \alpha\mu + \beta\nu + \gamma\pi + (a\mu + a'\nu + a''\pi - \mu)\mathrm{X} + (b\mu + b'\nu + b''\pi - \nu)\mathrm{Y} + (c\mu + c'\nu + c''\pi - \pi)\mathrm{Z},\end{aligned}$$

Pour déterminer Δx, il faut, dans cette équation, donner à μ, ν, π, des valeurs qui annullent les coefficients de Δy, Δz, c'est-à-dire poser

$$b\mu + b'\nu + b''\pi + \nu = 0, \quad c\mu + c'\nu + c''\pi + \pi = 0,$$

d'où l'on tire

$$\mu = (1 + b')(1 + c'') - c'b'', \quad \nu = a'' - b(1 + c''), \quad \pi = bc' - c(1 + b').$$

Or entre les neuf cosinus $a, a', a'', b, b', b'', c, c', c''$, il existe, comme on le sait, les relations suivantes :

$$\begin{aligned}a &= b'c'' - c'b'', & a' &= cb'' - bc'', & a'' &= bc' - cb',\\ b &= c'a' - a'c', & b' &= ac'' - ca'', & b'' &= ca' - ac',\\ c &= a'b'' - b'a'', & c' &= ba'' - ab'', & c'' &= ab' - ba',\end{aligned}$$

lesquelles se déduisent de ces six autres :

$$\begin{aligned}&a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, \quad b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, \quad c^2 + c'^2 + c''^2 = 0,\\ &ab + a'b' + a''b = 0, \quad ac + a'c' + a''c'' = 0, \quad bc + b'c' + b''c'' = 0,\end{aligned}$$

qui expriment que les axes primitifs et les axes nouveaux sont rectangulaires. L'ambiguité des signes qui se présente dans la déduction dont il s'agit, est résolue par cette autre condition tout-à-fait nécessaire, dans la considération du déplacement d'un système solide, savoir : que le

système des nouveaux axes coordonnés provenant lui-même du déplacement du système des premiers axes, reste toujours avec le premier dans des conditions de superposition possible pour chaque axe respectif et son correspondant.

Cela posé, il est clair qu'au moyen des relations ci-dessus on a

$$\mu = 1 + a + b' + c'', \quad \nu = a' - b, \quad \pi = a'' - c,$$

d'où l'on tire

$$a'\mu + a'\nu + a''\pi = 1 + a + b' + c'' = \mu,$$

ce qui donne

$$\Delta x - \alpha = \frac{2\left[\left(\gamma - \frac{1}{2}\beta\right)(b - a') - \left(\alpha - \frac{1}{2}\gamma\right)(a' - c)\right]}{1 + a + b' + c''},$$

on aura semblablement,

$$\Delta y - \beta = \frac{2\left[\left(\alpha - \frac{1}{2}\gamma\right)(c' - b'') - \left(\gamma - \frac{1}{2}\alpha\right)(b - a')\right]}{1 + a + b' + c''},$$

$$\Delta z - \gamma = \frac{2\left[\left(\gamma - \frac{1}{2}\alpha\right)(a'' - c) - \left(\gamma - \frac{1}{2}\beta\right)(c' - b'')\right]}{1 + a + b' + c''},$$

formules identiques à celles du n° **15**, en posant

$$m = \frac{2(c' - b'')}{1 + a + b' + c''}, \quad n = \frac{2(a'' - c)}{1 + a + b' + c''}, \quad p = \frac{2(b - a')}{1 + a + b' + c''}.$$

28. Dans le cas des déplacements infiniment petits on a directement, en négligeant les déplacements angulaires du second ordre

$$a = 1, \quad b' = 1, \quad c'' = 1,$$

ce qui donne

$$\delta x = \alpha + by + cz, \quad \delta y = \beta + a'x + c'z, \quad \delta z = \gamma + a''x + b''y;$$

et comme à cause de l'invariabilité de la distance d'un point quelconque à l'origine entraînée dans le déplacement du système, on a

$$x(\delta x - \alpha) + y(\delta y - \beta) + z(\delta z - \gamma) = 0.$$

quelles que soient x, y, z, il existera nécessairement entre les cosinus infiniment petits du premier ordre b, c, a', c', a'', b'', les relations suivantes

$$b + a' = 0, \qquad c + a'' = 0, \qquad c' + b'' = 0,$$

on aura donc finalement

$$\delta x = \alpha + py - nz, \quad \delta y = \beta + mz - px, \quad \delta z = \gamma + nx - my.$$

en posant

$$m = c' = -b'', \quad n = a'' = -c, \quad p = b = -a'.$$

29. Mais il est intéressant de parvenir à ces mêmes formules des variations finies ou infiniment petites des coordonnées d'un système solide par une voie purement algébrique, indépendante de toute considération géométrique, en partant de l'expression algorithmique des conditions du problème, c'est-à-dire de l'invariabilité des distances des points de ce solide.

Soient donc

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x, \qquad y_0,\ y_1,\ y_2,\ y, \qquad z_0,\ z_1,\ z_2,\ z,$$

les coordonnées de quatre points invariablement liés entre eux et faisant partie du système que l'on considère, les trois premiers spécialement choisis pour y rapporter tous les autres ; les distances de ces quatre points devant rester constantes, quelles que soient les variations de leurs coordonnées, par suite d'un déplacement quelconque du système, cette condition exprimée algorithmiquement donnera entre les variations de ces douze coordonnées, les six équations suivantes :

$$(x_1 + \Delta x_1 - x_0 - \Delta x_0)^2 + (y_1 + \Delta y_1 - y_0 - \Delta y_0)^2 + (z_1 + \Delta z_1 - z_0 - \Delta z_0)^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2,$$
$$(x_2 + \Delta x_2 - x_0 - \Delta x_0)^2 + (y_2 + \Delta y_2 - y_0 - \Delta y_0)^2 + (z_2 + \Delta z_2 - z_0 - \Delta z_0)^2 = (x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 + (z_2 - z_0)^2,$$
$$(x_2 + \Delta x_2 - x_1 - \Delta x_1)^2 + (y_2 + \Delta y_2 - y_1 - \Delta y_1)^2 + (z_2 + \Delta z_2 - z_1 - \Delta z_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2,$$
$$(x + \Delta x - x_0 - \Delta x_0)^2 + (y + \Delta y - y_0 - \Delta y_0)^2 + (z + \Delta z - z_0 + \Delta z_0)^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2,$$
$$(x + \Delta x - x_1 - \Delta x_1)^2 + (y + \Delta y - y_1 - \Delta y_1)^2 + (z + \Delta z - z_1 - \Delta z_1)^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2,$$
$$(x + \Delta x - x_2 - \Delta x_2)^2 + (y + \Delta y - y_2 - \Delta y_2)^2 + (z + \Delta z - z_2 - \Delta z_2)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2.$$

Ces six équations serviront à déterminer Δx, Δy, Δz, en fonction des variations des coordonnées des trois premiers points qui devront se réduire à six constantes par suite des trois équations qui les lient entre elles.

Il s'agit de résoudre effectivement ces six équations, qui, bien que du second degré par rapport aux variations Δx, Δy, Δz, deviennent linéaires lorsqu'au lieu des variables x, y, z, on introduit celles-ci :

$$X = x + \tfrac{1}{2}\Delta x, \quad Y = y + \tfrac{1}{2}\Delta y, \quad Z = z + \tfrac{1}{2}\Delta z,$$

et de même pour les autres points : le système des six équations ci-dessus peut dès lors s'écrire ainsi :

$$\begin{aligned}
&(X - X_0)(\Delta x - \Delta x_0) + (Y - Y_0)(\Delta y - \Delta y_0) + (Z - Z_0)(\Delta z - \Delta z_0) = 0,\\
&(X - X_0)(\Delta x_1 - \Delta x_0) + (Y - Y_0)(\Delta y_1 - \Delta y_0) + (Z - Z_0)(\Delta z_1 - \Delta z_0)\\
&\quad + (\Delta x - \Delta x_0)(X_1 - X_0) + (\Delta y - \Delta y_0)(Y_1 - Y_0) + (\Delta z - \Delta z_0)(Z_1 - Z_0) = 0,\\
&(X - X_0)(\Delta x_2 - \Delta x_0) + (Y - Y_0)(\Delta y_2 - \Delta y_0) + (Z - Z_0)(\Delta z_2 - \Delta z_0)\\
&\quad + (\Delta x - \Delta x_0)(X_2 - X_0) + (\Delta y - \Delta y_0)(Y_2 - Y_0) + (\Delta z - \Delta z_0)(Z_2 - Z_0) = 0,\\
&(X_1 - X_0)(\Delta x_1 - \Delta x_0) + (Y_1 - Y_0)(\Delta y_1 - \Delta y_0) + (Z_1 - Z_0)(\Delta z_1 - \Delta z_0) = 0,\\
&(X_2 - X_0)(\Delta x_2 - \Delta x_0) + (Y_2 - Y_0)(\Delta y_2 - \Delta y_0) + (Z_2 - Z_0)(\Delta z_2 - \Delta z_0) = 0,\\
&(X_1 - X_0)(\Delta x_2 - \Delta x_0) + (Y_1 - Y_0)(\Delta y_2 - \Delta y_0) + (Z_1 - Z_0)(\Delta z_2 - \Delta z_0)\\
&\quad + (\Delta x_1 - \Delta x_0)(X_2 - X_0) + (\Delta y_1 - \Delta y_0)(Y_2 - Y_0) + (\Delta z_1 - \Delta z_0)(Z_2 - Z_0) = 0.
\end{aligned}$$

En multipliant ces six équations successivement par les facteurs indéterminés μ^2, $\mu\nu$, $\mu\pi$, ν^2, π^2, $\nu\pi$, et en les ajoutant, on forme l'équation complexe suivante, qui comprend le système des six premières :

$$\left.\begin{aligned}
&\{\mu(X - X_0) + \nu(X_1 - X_0) + \pi(X_2 - X_0)\}\{\mu(\Delta x - \Delta x_0) + \nu(\Delta x_1 - \Delta x_0) + \pi(\Delta x_2 - \Delta x_0)\}\\
&+ \{\mu(Y - Y_0) + \nu(Y_1 - Y_0) + \pi(Y_2 - Y_0)\}\{\mu(\Delta y - \Delta y_0) + \nu(\Delta y_1 - \Delta y_0) + \pi(\Delta y_2 - \Delta y_0)\}\\
&+ \{\mu(Z - Z_0) + \nu(Z_1 - Z_0) + \pi(Z_2 - Z_0)\}\{\mu(\Delta z - \Delta z_0) + \nu(\Delta z_1 - \Delta z_0) + \pi(\Delta z_2 - \Delta z_0)\}
\end{aligned}\right\} = 0$$

En choisissant μ, ν, π, convenablement, on réduit successivement cette équation à ne contenir que Δx, Δy, Δz, et on en déduit les valeurs de ces variations de la manière la plus simple. En effet, posons

$$\mu(X - X_0) + \nu(X_1 - X_0) + \pi(X_2 - X_0) = 0,$$

$$\mu(Z - Z_0) + \nu(Z_1 - Z_0) + \pi(Z_2 - Z_0) = 0,$$

l'équation générale se réduit à

$$[\mu(\mathrm{X}-\mathrm{X}_0)+\nu(\mathrm{X}_1-\mathrm{X}_0)+\pi(\mathrm{X}_2-\mathrm{X}_0)][\mu(\Delta x-\Delta x_0)+\nu(\Delta x_1-\Delta x_0)+\pi(\Delta_2 x-\Delta x_0)]=0.$$

Or le premier facteur de ce produit ne peut être nul sans que le second le soit également, ainsi que nous le démontrerons ci-après; on aura donc simultanément

$$\begin{aligned}
\mu(\Delta x-\Delta x_0) &+ \nu(\Delta x_1-\Delta x_0) + \pi(\Delta x_2-\Delta x_0) = 0,\\
\mu(\mathrm{Y}-\mathrm{Y}_0) &+ \nu(\mathrm{Y}_1-\mathrm{Y}_0) + \pi(\mathrm{Y}_2-\mathrm{Y}_0) = 0,\\
\mu(\mathrm{Z}-\mathrm{Z}_0) &+ \nu(\mathrm{Z}_1-\mathrm{Z}_0) + \pi(\mathrm{Z}_2-\mathrm{Z}_0) = 0,
\end{aligned}$$

équations qui se transforment évidemment en celles-ci :

$$\begin{aligned}
\Delta x_1-\Delta x_0 &= p(\mathrm{Y}_1-\mathrm{Y}_0)-n(\mathrm{Z}_1-\mathrm{Z}_0),\\
\Delta x_2-\Delta x_0 &= p(\mathrm{Y}_2-\mathrm{Y}_0)-n(\mathrm{Z}_2-\mathrm{Z}_0),\\
\Delta x-\Delta x_0 &= p(\mathrm{X}_1-\mathrm{X}_0)-n(\mathrm{Z}-\mathrm{Z}_0),
\end{aligned}$$

n et p étant deux constantes liées aux variations des trois premiers points par les deux premières de ces trois équations.

La même analyse donnerait

$$\begin{aligned}
\Delta y-\Delta y_0 &= m'(\mathrm{Z}-\mathrm{Z}_0)-p'(\mathrm{X}-\mathrm{X}_0),\\
\Delta z-\Delta z_0 &= n'(\mathrm{X}-\mathrm{X}_0)-m'(\mathrm{Y}-\mathrm{Y}_0);
\end{aligned}$$

et comme on a

$$(\mathrm{X}-\mathrm{X}_0)(\Delta x-\Delta x_0)+(\mathrm{Y}-\mathrm{Y}_0)(\Delta y-\Delta y_0)+(\mathrm{Z}-\mathrm{Z}_0)(\Delta z-\Delta z_0)=0.$$

il s'ensuit que $m=m'$, $n'=n$, $p'=p$, et qu'on a enfin les formules générales suivantes

$$\begin{aligned}
\Delta x &= \mathrm{A}+p\mathrm{Y}-n\mathrm{Z},\\
\Delta y &= \mathrm{B}+m\mathrm{Z}-p\mathrm{X},\\
\Delta z &= \Gamma+n\mathrm{X}-m\mathrm{Y},
\end{aligned}$$

où les six constantes A, B, Γ, m, n, p, sont fonctions des variations

$$\Delta x_0,\ \Delta x_1,\ \Delta x_2,\quad \Delta y_0,\ \Delta y_1,\ \Delta y_2,\quad \Delta z_0,\ \Delta z_1,\ \Delta z_2.$$

30. Mais il reste à prouver ce que nous avons avancé, que le

facteur $\mu(X - X_0) + \nu(X_1 - X_0) + \pi(X_2 - X_0)$ ne peut être nul dans la question qui nous occupe, sans que le second facteur

$$\mu(\Delta x - \Delta x_0) + \nu(\Delta x_1 - \Delta x_0) + \pi(\Delta x_2 - \Delta x_0)$$

ne le soit également. En effet, les trois équations simultanées

$$\begin{aligned}
\mu(X - X_0) + \nu(X_1 - X_0) + \pi(X_2 - X_0) &= 0,\\
\mu(Y - Y_0) + \nu(Y_1 - Y_0) + \pi(Y_2 - Y_0) &= 0,\\
\mu(Z - Z_0) + \nu(Z_1 - Z_0) + \pi(Z_2 - Z_0) &= 0,
\end{aligned}$$

donneraient par l'élimination des facteurs μ, ν, π, une équation finale entre les coordonnées X_0, X_1, X_2, X, Y_0, Y_1, Y_2, Y, Z_0, Z_1, Z_2, Z, exprimant que les milieux des droites parcourues par les quatre points que nous considérons sont dans un même plan; mais cette condition singulière ne peut être remplie qu'autant que ces quatre points eux-mêmes sont dans un même plan, ou qu'autant que les pyramides formées par ces quatre points, dans leurs premières et leurs secondes positions, seraient symétriques au lieu d'être identiques ou superposables. Cette seconde hypothèse n'est pas admissible dans le problème qu'il s'agit de résoudre; mais la première doit être examinée. Si donc les quatre points donnés sont dans un même plan, nous disons qu'on aura à la fois

$$\mu(X - X_0) + \nu(X_1 - X_0) + \pi(X_2 - X_0) = 0,\ \mu(\Delta x - \Delta x_0) + \nu(\Delta x_1 - \Delta x_0) + \pi(\Delta x_2 - \Delta x_0) = 0.$$

et semblablement pour les variables Y, Z, et les variations Δy, Δz.

En effet, si les quatre points considérés sont dans un même plan, ainsi que leurs correspondants, on aura simultanément, en distinguant par un accent les coordonnées de ces derniers,

$$\begin{aligned}
&g(x - x_0) + h(x_1 - x_0) + l(x_2 - x_0) = 0,\ g'(x' - x'_0) + h'(x'_1 - x'_0) + l'(x'_2 - x'_0) = 0,\\
&g(y - y_0) + h(y_1 - y_0) + l(y_2 - y_0) = 0,\ g'(y' - y'_0) + h'(y'_1 - y'_0) + l'(y'_2 - y'_0) = 0,\\
&g(z - z_0) + h(z_1 - z_0) + l(z_2 - z_0) = 0,\ g'(z' - z'_0) + h'(z'_1 - z'_0) + l'(z'_2 - z'_0) = 0.
\end{aligned}$$

g, h, l, g', h', l', étant des coefficients à éliminer. Comme on a par l'invariabilité des distances

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = (x' - x'_0)^2 + (y' - y'_0)^2 + (z' - z'_0)^2,$$

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) + (z - z_0)(z_1 - z_0) = (x' - x'_0)(x'_1 - x'_0) + (y' - y'_0)(y'_1 - y'_0) + (z' - z'_0)(z'_1 - z'_0), \text{ etc.},$$

et que les rapports $\frac{h}{g}$, $\frac{h'}{g'}$, $\frac{l}{g}$, $\frac{l'}{g'}$, sont fonctions identiques de ces mêmes quantités, il s'ensuit qu'ils sont égaux et qu'on peut supposer $g' = g$, $h' = h$, $l' = l$, d'où l'on conclura, en introduisant les coordonnées des milieux $\mathrm{x} = \frac{x + x'}{2}$, etc., et les différences Δx, Δy, etc., qu'on a aussi

$$\begin{aligned}
g(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0) + h(\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_0) + l(\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_0) &= 0,\\
g(\mathrm{y} - \mathrm{y}_0) + h(\mathrm{y}_1 - \mathrm{y}_0) + l(\mathrm{y}_2 - \mathrm{y}_0) &= 0,\\
g(\mathrm{z} - \mathrm{z}_0) + h(\mathrm{z}_1 - \mathrm{z}_0) + l(\mathrm{z}_2 - \mathrm{z}_0) &= 0,\\
g(\Delta x - \Delta x_0) + h(\Delta x_1 - \Delta x_0) + l(\Delta x_2 - \Delta x_0) &= 0,\\
g(\Delta y - \Delta y_0) + h(\Delta y_1 - \Delta y_0) + l(\Delta y_2 - \Delta y_0) &= 0,\\
g(\Delta z - \Delta z_0) + h(\Delta z_1 - \Delta z_0) + l(\Delta z_2 - \Delta z_0) &= 0.
\end{aligned}$$

Les trois premières équations, comparées aux trois données en μ, ν, π, montrent la proportionnalité des coefficients g, h, l, à ces derniers, et enfin conduisent à l'équation

$$\mu(\Delta x - \Delta x_0) + \nu(\Delta x_1 - \Delta x_0) + \pi(\Delta x_2 - \Delta x_0) = 0, \text{ etc.};$$

ce qu'il fallait établir.

31. Les deux méthodes analytiques que nous venons d'exposer pour déterminer les formules des variations des coordonnées d'un système solide, sont déduites de procédés purement algébriques. L'algorithme infinitésimal fournit encore une démonstration plus simple de ces formules, se rapprochant de celle que Lagrange a donnée dans sa *Mécanique*, et comprenant dans la même analyse l'expression des variations finies et celle des infiniment petites. Voici cette démonstration.

Si l'on désigne par d les différences infiniment petites des coordonnées d'un point du système à celles du point infiniment voisin dans le système non déplacé, puis par le signe Δ ou δ, selon qu'on considère un déplacement fini ou infiniment petit de ce système, les variations de ces coordonnées dues à ce déplacement même; il s'agira de déterminer généralement les variations Δx, Δy, Δz, au moyen de l'équation suivante, qui renferme l'expression algorithmique la plus simple de l'invariabilité des distances mutuelles de tous les points du système

$$\Sigma\,(dx^2 + dy^2 + dz^2) = 0$$

Or en posant

$$\mathrm{x} = x + \tfrac{1}{2}\Delta x, \quad \mathrm{y} = y + \tfrac{1}{2}\Delta y, \quad \mathrm{z} = z + \tfrac{1}{2}\Delta z,$$

cette équation, au moyen de la règle de l'inversion de signes d, Δ, devient

$$d\mathrm{x}\, d\Delta x + d\mathrm{y}\, d\Delta y + d\mathrm{z}\, d\Delta z = 0,$$

à laquelle il faut satisfaire de la manière la plus générale. Dans ce but, considérons Δx, Δy, Δz, comme fonctions des variables indépendantes x, y, z; l'équation ci-dessus fournira d'abord l'intégrale suivante, en supposant constantes $d\mathrm{x}$, $d\mathrm{y}$, $d\mathrm{z}$,

$$\frac{d\mathrm{x}\,\Delta x + d\mathrm{y}\,\Delta y + d\mathrm{z}\,\Delta z}{\sqrt{d\mathrm{x}^2 + d\mathrm{y}^2 + d\mathrm{z}^2}} = \textit{constante},$$

traduction algorithmique de la propriété du quadrilatère, dont deux côtés opposés sont égaux, laquelle consiste en ce que ces côtés et les deux autres se projettent *également* sur la ligne qui joint les milieux de ces derniers. Mais l'équation

$$d\mathrm{x}\, d\Delta x + d\mathrm{y}\, d\Delta y + d\mathrm{z}\, d\Delta z = 0,$$

lorsqu'on y substitue les différentielles partielles aux différentielles complètes, devient

$$d\mathrm{x}^2 \frac{d\Delta x}{d\mathrm{x}} + d\mathrm{y}^2 \frac{d\Delta y}{d\mathrm{y}} + d\mathrm{z}^2 \frac{d\Delta z}{d\mathrm{z}} + d\mathrm{x}\, d\mathrm{y} \left(\frac{d\Delta x}{d\mathrm{y}} + \frac{d\Delta y}{d\mathrm{x}}\right)$$
$$+ d\mathrm{x}\, d\mathrm{z} \left(\frac{d\Delta x}{d\mathrm{z}} + \frac{d\Delta z}{d\mathrm{x}}\right) + d\mathrm{y}\, d\mathrm{z} \left(\frac{d\Delta y}{d\mathrm{z}} + \frac{d\Delta z}{d\mathrm{y}}\right) = 0,$$

et à cause de l'indépendance des différentielles $d\mathrm{x}$, $d\mathrm{y}$, $d\mathrm{z}$, donne ces six autres :

$$\frac{d\Delta x}{d\mathrm{x}} = 0, \quad \frac{d\Delta y}{d\mathrm{y}} = 0, \quad \frac{d\Delta z}{d\mathrm{z}} = 0, \quad \frac{d\Delta x}{d\mathrm{y}} + \frac{d\Delta y}{d\mathrm{x}} = 0,$$
$$\frac{d\Delta x}{d\mathrm{z}} + \frac{d\Delta z}{d\mathrm{x}} = 0, \quad \frac{d\Delta y}{d\mathrm{x}} + \frac{d\Delta z}{d\mathrm{y}} = 0.$$

Le système de ces six équations s'intègre aisément. Les trois premières montrent que les variations Δx, Δy, Δz, sont respectivement formulées

indépendamment des variables respectives X, Y, Z. Il en est par conséquent ainsi de leurs dérivées, d'où il est facile de conclure que ces six dérivées sont des constantes égales deux à deux et de signes contraires, ce qui produit enfin les expressions auxquelles nous sommes déjà arrivés,

$$\Delta x = A + pY - nZ, \quad \Delta y = B + mZ - pX, \quad \Delta z = \Gamma + nX - mY.$$

Nous ne reviendrons pas sur les transformations que subissent ces formules lorsqu'on y rétablit les variables x, y, z; il nous suffit d'avoir montré comment la méthode des *variations* s'applique à la recherche de ces formules et donne dans une même forme algorithmique les variations finies et infiniment petites des coordonnées d'un système solide, avec cette seule différence que les coordonnées des points déplacés, sont remplacées dans le cas des variations finies, par celles des milieux des espaces parcourus en ligne droite par ces points.

32. Il nous reste maintenant, pour terminer ce travail, à déduire rapidement de l'expression de ces variations les lois géométriques du déplacement des corps solides que nous avons d'abord exposées synthétiquement, et prises pour point de départ de notre première analyse.

Les formules

$$\Delta x = A + pY - nZ, \quad \Delta y = B + mZ - pX, \quad \Delta z = \Gamma + nX - mY,$$

donnent immédiatement la relation fondamentale suivante :

$$m\Delta x + n\Delta y + p\Delta z = Am + Bn + \Gamma p,$$

d'où l'on voit que les *droites* réellement parcourues par tous les points du système, en passant d'une situation à l'autre, sont toutes également projetées sur une même direction (m, n, p). En désignant les angles de cette direction par g, h, l, et par t cette projection commune, on aura pour tous les points du système déplacé,

$$\cos g\ \Delta x + \cos h\ \Delta y + \cos l\ \Delta z = t,$$

et pour deux points différents,

$$\cos g\,(\Delta x - \Delta x') + \cos h\,(\Delta y - \Delta y') + \cos l\,(\Delta z - \Delta z') = 0$$

$\Delta x - \Delta x'$, $\Delta y - \Delta y'$, $\Delta z - \Delta z'$, mesurent les projections sur les axes respectifs coordonnés de la corde de l'arc qui serait décrit par le premier point autour d'un axe de rotation mené par le second point x', y', z', parallèlement à la direction m, n, p : ces deux points sont transportés ensuite à leur situation définitive, en décrivant deux droites égales et parallèles à celle qui joint le point x', y', z' à son correspondant. Si l'on désigne par θ l'angle de cette rotation, par u la distance de cette corde à cet axe de rotation, on aura évidemment

$$\begin{aligned}4u^2\tang^2\tfrac{1}{2}\theta &= (\Delta x - \Delta x')^2 + (\Delta y - \Delta y')^2 + (\Delta z - \Delta z')^2 \\ &= (m^2+n^2+p^2)\{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2-[(x-x')\cos g+(y-y')\cos h+(z-z')\cos g]^2\},\end{aligned}$$

$$u^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 - [(x-x')\cos g + (y-y')\cos h + (z-z')\cos l]^2;$$

on a donc, quels que soient les deux points considérés,

$$4\tang^2\tfrac{1}{2}\theta = m^2 + n^2 + p^2.$$

Ainsi le déplacement donné d'un solide, d'une situation à une autre, peut toujours résulter de deux déplacements consécutifs en rotation et en translation, ainsi que cela a été expliqué au commencement de ce travail.

Soit de plus φ l'amplitude du déplacement angulaire d'une droite de ce solide, φ l'angle qu'elle forme avec la direction des axes de rotation x, y, z, x', y', z', les coordonnées de deux points de cette droite, on aura

$$\cos\varphi = \frac{(x-x')\cos g + (y-y')\cos h + (z-z')\cos l}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}.$$

et, à cause de l'invariabilité des distances mutuelles des points de ce solide,

$$\Delta\cos\varphi = \frac{(\Delta x-\Delta x')\cos g + (\Delta y-\Delta y')\cos h + (\Delta z-\Delta z')\cos l}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} = 0.$$

L'angle φ reste le même avant et après le déplacement ; quant à l'angle ι, on a

$$\cos\iota = \frac{(x+x')(x-x+\Delta x-\Delta x')+(y-y')(y-y'+\Delta y-\Delta y')+(z-z')(z-z'+\Delta z-\Delta z')}{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2};$$

d'où enfin cette relation remarquable

$$\sin \tfrac{1}{2}\nu = \sin \varphi \sin \tfrac{1}{2}\theta,$$

qui exprime le théorème énoncé au n° **5**.

Les droites parallèles à la direction des axes de rotation sont donc transportées parallèlement à elles-mêmes. Entre toutes ces droites il y en a une qui ne fait que glisser sur elle-même et pour laquelle les variations Δx, Δy, Δz, doivent évidemment être proportionnelles aux cosinus des angles g, h, l. Les équations de cette droite seront donc

$$\frac{\Delta x}{\cos g} = \frac{\Delta y}{\cos h} = \frac{\Delta z}{\cos l} = t;$$

et comme on a

$$\mathrm{X} = x + \tfrac{1}{2}\Delta x, \quad \mathrm{Y} = y + \tfrac{1}{2}\Delta y, \quad \mathrm{Z} = z + \tfrac{1}{2}\Delta z,$$

on aura, comme nous les avons déjà données au n° **16**, pour équations de l'axe *central* du déplacement :

$$\begin{aligned} py - nz + \mathrm{A} &= t \cos g, \\ mz - px + \mathrm{B} &= t \cos h, \\ nx - my + \Gamma &= t \cos l, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Conclusion. — *Loi générale de la Statique.*

33. La Géométrie considère les déplacements finis ou infiniment petits des corps solides, occasionnés par l'action *successive* de causes ou de *forces* capables de les produire.

La Mécanique considère les déplacements consécutifs des corps solides, et plus généralement ensuite des systèmes quelconques de points occasionnés par l'action simultanée et prolongée de causes ou de *forces* capables de les produire.

La Statique est cette première partie de la Mécanique où l'on ne considère que la possibilité des déplacements infiniment petits ou *virtuels* de ces systèmes, qui résulteraient de l'action simultanée et non continue de ces mêmes causes.

La Géométrie enseigne que le déplacement d'un corps solide se réduit à tourner autour d'un ou de deux axes fixes.

Il en résulte que si les forces qui agissent simultanément sur un système solide ne peuvent lui imprimer aucune rotation autour d'un axe fixe quelconque, ces forces se font équilibre ou se neutralisent, et le corps reste immobile.

Ces forces, considérées séparément, ne peuvent agir que de deux manières, ou parce qu'elles tendent à faire tourner ce corps solide autour d'un axe fixe, ou parce qu'elles tendent à déplacer un certain point de ce système, ou plus expressivement à faire varier les coordonnées de ce point. C'est la manière la plus générale de considérer et d'examiner, en Mécanique, l'action des forces.

Toutefois la loi de l'équilibre est identique dans ces deux modes de considération, ainsi qu'on va le voir.

Si des forces ou causes quelconques de déplacement tendent *successivement* ou *simultanément*, en passant aux limites, c'est-à-dire en passant de la Géométrie à la Mécanique, à imprimer à un solide des rotations *élémentaires* ou virtuelles θ, θ', θ'', ..., autour d'axes fixes déterminés, la loi de l'équilibre de ces forces consiste en ce que la somme des moments de ces rotations soit nulle par rapport à un *axe quelconque*;

L'équation

$$\Sigma \theta D \sin v = 0,$$

qui est la traduction algorithmique de cette loi, impliquant, à cause de l'indétermination de cet axe quelconque, six équations spéciales qui se réduisent à trois quand ce système solide se réduit à un point.

Examinons maintenant ce qui arrive quand les forces qui agissent simultanément sur le solide tendent séparément à faire varier les coordonnées de divers points de ce système. Tout déplacement se rapportant *virtuellement* à un axe fixe de rotation, il suffira pour chaque point de considérer la variation qui peut résulter de l'action des forces qui agissent en ce point, sur la coordonnée de ce point *orthogonale* à ce même axe fixe, dont la résistance s'oppose à toute variation de ses autres coordonnées rectangulaires.

Or il est évident que le déplacement infiniment petit d'un point

peut être considéré comme effectué *successivement* par rapport à chacune des coordonnées rectangulaires de ce point, la variation de chacune de ces coordonnées étant d'ailleurs égale à la projection du déplacement total sur la direction de cette coordonnée. Il en résulte que dans tout système où il se trouve un axe fixe, les forces qui agissent sur un point de ce système ne peuvent réellement faire varier que la coordonnée de ce point orthogonale à cet axe fixe.

D'un autre côté, à cause de l'invariabilité du système, il est évident que deux forces *égales*, dans leur action sur un même point, se font équilibre,

1°. Si elles tendent à faire varier également ses coordonnées, mais en sens contraire;

2°. Si elles sont *appliquées*, mais en sens contraire, aux extrémités d'une droite invariable;

3°. Si elles tendent à faire tourner en sens contraire une circonférence dont le centre est fixe, dans le plan de laquelle elles sont appliquées tangentiellement;

4°. Si, plus généralement, elles tendent à faire tourner en sens contraire un cylindre droit dont l'axe est fixe, à la surface duquel elles sont tangentes orthogonalement à son axe.

Il résulte de ces propositions que si l'on considère toutes les forces qui tendent à déplacer les divers points d'un système solide, où il se trouve un axe fixe, suivant des directions données, et à leur imprimer des translations *virtuelles* données, il y aura équilibre entre toutes ces forces si, en les supposant appliquées toutes à des points équidistants de l'axe fixe, ce qui est toujours possible, la somme des *moments* des translations virtuelles qui mesure l'effet de ces forces est nulle par rapport à cet axe.

En passant d'un axe fixe déterminé à un axe quelconque, il s'ensuivra nécessairement que l'équation générale

$$\Sigma \theta D \sin \nu = 0$$

est la traduction algorithmique de l'équilibre d'un système de forces capables de produire des translations virtuelles ou infiniment petites proportionnelles aux rotations θ, θ', θ'', ..., ces forces étant appli-

quées sur les axes de ces rotations, *positivement* ou *négativement*, selon le signe de ces rotations.

Ainsi s'explique l'analogie si remarquable des lois de l'équilibre et conséquemment de celles de la composition des rotations infiniment petites, avec les lois de l'équilibre et de la composition des forces considérées dans la Statique.

Si l'on désigne généralement ces forces par les grandeurs finies P, P′, . . ., proportionnelles aux translations virtuelles qu'elles tendent à imprimer, l'équation de leur équilibre sera

$$\Sigma PD \sin v = 0;$$

le terme général PD sin v exprime le *moment* statique de la force P, relatif à l'axe fixe, et est égal au produit de la distance du point d'application de cette force à l'axe fixe, multipliée par la composante de cette force orthogonale à ce même axe.

On comprend nettement par cette signification du produit PD sin v, ce qu'il faut entendre en Statique par les *moments* qui tendent à faire tourner dans un sens ou dans un autre, ces *moments*, à un dénominateur commun près, n'étant autre chose que les composantes orthogonales des forces données, par rapport à l'axe de rotation, appliquées à une même distance de cet axe.

Les conditions de l'équilibre des forces appliquées à un système solide, que la considération secondaire, bien qu'admirablement ingénieuse, des *couples*, réduit en termes finis à deux conditions, sont donc comprises dans une seule loi, également exprimée en termes finis, qui consiste en ce que la somme des *moments* ou des forces du système soit nulle par rapport à un axe quelconque.

Cette loi est générale et s'applique, ainsi que celle du principe des vitesses virtuelles, qui n'en est que la transformation *infinitésimale*, à l'équilibre de tout système invariable ou non, pourvu que les conditions de la liaison des points de ce système puissent être remplacées par l'introduction de forces qui permettent de regarder ces points comme entièrement libres, forces que l'analyse détermine et élimine ensuite des équations qui donnent l'équilibre de chaque point.

Au moyen de cette introduction, la loi d'équilibre d'un point en-

gendre immédiatement celle d'un système solide; nous ne nous y arrêterons pas: nous remarquerons seulement que, dans ce cas particulier, les forces introduites étant deux à deux égales et de signes contraires, la somme des moments de toutes les forces appliquées à tous les points, qui doit être nulle pour l'équilibre, ne contient que ceux des forces données, et exprime ainsi, sous une forme identique, la loi de l'équilibre d'un point ou de plusieurs points entièrement libres, et celle d'un système invariable.

De l'équation des vitesses virtuelles.

Si la force P tend à faire varier la coordonnée p, le produit $P\delta p$ sera égal à $PD\theta \sin v$, $D\theta \sin v$ exprimant le *moment* de la rotation virtuelle θ, dans l'hypothèse d'un déplacement infiniment petit quelconque du système, qui produirait dans les coordonnées de ce système des variations caractérisées par le signe δ.

En effet, ce déplacement infiniment petit se réduisant forcément à une ou à deux rotations successives, doit *virtuellement* n'être considéré que dans sa première ou son unique rotation, et dès-lors l'arc infiniment petit décrit par le point d'application de la force P, projeté sur la direction de cette force, se trouve égal à la variation même de la coordonnée p, suivant laquelle agit cette force, ce qui donne

$$\delta p = \theta D \sin v, \quad P\delta p = \theta PD \sin v.$$

L'équation générale de l'équilibre de ces forces,

$$\Sigma PD \sin v = 0,$$

se transforme donc en celle-ci

$$\Sigma P\delta p = 0,$$

qui exprime que, *des forces étant en équilibre dans un système solide, si, par une cause quelconque, ce système vient à être dérangé infiniment peu de sa situation actuelle, la somme des forces multipliées par les espaces infiniment petits parcourus par les points de ce système*

dans la direction de ces forces respectives devra être nulle, et réciproquement, ce qui est l'énoncé du principe des vitesses virtuelles.

Cette équation bien supérieure, algorithmiquement parlant, à la première, n'a pas au fond plus de généralité : mais elle exprime le plus simplement possible la loi de l'équilibre de tous les systèmes dans lesquels les conditions de liaison sont susceptibles d'être traduites par des équations linéaires entre les variations des coordonnées des divers points du système.

En effet, si ces conditions sont exprimées par des équations telles que

$$\delta L = 0, \quad \delta L' = 0, \quad \delta L'' = 0,$$

ou plus généralement par une seule équation telle que

$$\lambda \delta L + \lambda' \delta L' + \lambda \delta L \ldots = 0,$$

dans laquelle λ, λ', λ'', sont des multiplicateurs arbitraires, et qu'on désigne par X, Y, Z, les coefficients des variations δx, δy, δz, dans cette équation; par r une grandeur linéaire dont la direction serait (X, Y, Z); par R une force appliquée au point (x, y, z), dans la direction de cette droite qu'elle tendrait à faire varier, égale à $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$, on aura

$$\delta r = \frac{X\delta x + Y\delta y + Z\delta z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$

et semblablement pour $\delta r'$, $\delta r''$,..., etc., l'équation ci-dessus prendra la forme

$$R\delta r + R'\delta r' + R\delta r \ldots = 0$$

et les deux équations

$$\Sigma P\delta p = 0, \quad \Sigma P\delta p + R\delta r + R'\delta r' + R\delta r \ldots = 0,$$

auront la même généralité, les variations étant *limitées* dans la première par les équations de conditions, et complétement *indépendantes* dans la seconde. Or, dans ce dernier cas, l'équation

$$\Sigma P\delta p + R\delta r + R'\delta r' + R\delta r \ldots = 0,$$

exprime la condition d'équilibre de tous les points du système, dégagés

de toute liaison, mais sollicités par les forces primitivement données P, P′, P″,..., et par d'autres forces R, R′, R″, qui ont *statiquement* remplacé les conditions de liaison supposées.

L'élimination de ces forces R, R′, R″, dans les équations particulières comprises dans l'équation précédente, fournira les équations définitives de l'équilibre des premières forces, telles qu'elles résultent de la liaison du système. Et réciproquement, si ces équations ont lieu, il y aura équilibre, car les forces R, R′, R″, se trouvent en même temps déterminées, et l'équation

$$\Sigma P\delta p + R\delta r + R'\delta r' + R''\delta r'' \ldots = 0,$$

à variations indépendantes, établit l'immobilité de tous les points du système, par suite de l'action des forces données et de celles qui, *statiquement*, équivalent à la liaison donnée entre les divers points du système.

Quand le système que l'on considère est continu, les équations de condition renferment des intégrales définies qui représentent en quelque sorte un nombre infini de conditions linéaires entre les variations des coordonnées du système; les multiplicateurs arbitraires passent sous le signe de ces intégrales, dont il reste à obtenir les variations par un mode entierement analytique et indépendant de toute considération statique. On y arrive aisément par la formule générale suivante

$$\delta S^n U dx_1 dx_2 dx_3 \ldots dx_n = S^n dx_1 dx_2 \ldots dx_n \left[\delta U - U \frac{d\delta x_1}{dx_1} + \frac{d\delta x_2}{dx_2} \ldots + \frac{d\delta x_n}{dx_n}\right],$$

U étant une fonction quelconque des variables indépendantes x_1, x_2, x_3,..., x_n, et le signe S^n désignant une intégrale définie multiple de l'ordre n.

5 decembre 1840.

MÉMOIRE

SUR LES TRANSCENDANTES ELLIPTIQUES

DE PREMIÈRE ET DE SECONDE ESPÈCE,

CONSIDÉRÉES COMME FONCTIONS DE LEUR MODULE;

PAR J. LIOUVILLE.

(Présenté à l'Académie des Sciences, le 6 janvier 1840.)

1. En désignant par E, F, les fonctions elliptiques de première et de seconde espèce qui répondent à l'amplitude α et au module x, on a, d'après les définitions de Legendre,

$$E = \int_0^\alpha d\alpha \sqrt{1 - x^2 \sin^2 \alpha}, \qquad F = \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \alpha}}.$$

Quand on donne au module x une valeur déterminée, E et F deviennent des fonctions de l'amplitude α seulement; et j'ai fait voir que ces fonctions sont des transcendantes d'espèce supérieure qui ne peuvent pas s'exprimer en termes finis à l'aide des signes algébriques, exponentiels et logarithmiques [*]. Le seul cas où $x = 0$ fait exception, puisque l'on a alors $E = \alpha$, $F = \alpha$.

Maintenant, au contraire, attribuons à l'amplitude α une valeur déterminée différente de zéro, en laissant quelconque le module x. Dans cette hypothèse, E, F seront des fonctions de x, et je me propose de prouver que ces quantités ne sont pas non plus des fonctions finies explicites de x. On peut même ajouter qu'elles ne s'exprimeraient pas davantage en termes finis si l'on joignait aux signes algébriques, expo-

[*] *Journal de l'École Polytechnique*, 23me cahier.

nentiels et logarithmiques, le signe $\int$, indiquant une intégrale indéfinie relative à la variable x, c'est-à-dire une intégrale dont la limite supérieure est x et dont la limite inférieure est une constante déterminée ou arbitraire. Ce nouveau théorème est par rapport au module x, ce que l'ancien est par rapport à l'amplitude α; il était, si je ne me trompe, plus difficile à démontrer rigoureusement. Je n'y suis parvenu d'abord qu'en m'appuyant sur la forme particulière des séries auxquelles donnent naissance les fonctions algébriques d'une variable lorsqu'on les développe suivant les puissances ascendantes ou descendantes de cette variable. Mais en continuant mon travail j'ai réussi enfin à m'affranchir de toute considération relative aux suites infinies. C'est ce que l'on verra dans les numéros suivants.

2. Rappelons d'abord que la fonction F satisfait à une équation différentielle du second ordre dans laquelle x est la variable indépendante. En effet, si l'on différentie la valeur de E, on a

$$\frac{dE}{dx} = -\int_0^\alpha \frac{x \sin^2 \alpha \, d\alpha}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \alpha}},$$

et par conséquent,

$$(1) \qquad x \frac{dE}{dx} = E - F.$$

D'un autre côté, en différentiant la valeur de F, on obtient

$$\frac{dF}{dx} = \int_0^\alpha \frac{x \sin^2 \alpha \, d\alpha}{(1 - x^2 \sin^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}},$$

c'est-à-dire

$$x \frac{dF}{dx} + F = \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{(1 - x^2 \sin^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}}.$$

Or il est aisé de vérifier que

$$\int_0^\alpha \frac{d\alpha}{(1 - x^2 \sin^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}} = \frac{E}{1 - x^2} - \frac{x^2}{1 - x^2} \cdot \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \alpha}}.$$

On a donc

$$(2) \qquad x \frac{dF}{dx} + F = \frac{E}{1 - x^2} - \frac{x^2}{1 - x^2} \cdot \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \alpha}}.$$

L'équation (2) fournit la valeur de E, et par suite celle de $\frac{dE}{dx}$; en portant ces valeurs dans l'équation (1), on trouve finalement

$$(3)\qquad (x - x^3)\frac{d^2F}{dx^2} + (1 - 3x^2)\frac{dF}{dx} - xF = -\frac{x \sin\alpha \cos\alpha}{(1 - x^2 \sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}.$$

Telle est l'équation différentielle du second ordre à laquelle F satisfait. Nous aurons prouvé que pour aucune valeur de α, différente de zéro, F n'est une fonction explicite finie de x, si nous faisons voir que, sauf l'intégrale insignifiante $z = 0$ dont on doit toujours faire abstraction, l'équation

$$(4)\qquad (x - x^3)\frac{d^2z}{dx^2} + (1 - 3x^2)\frac{dz}{dx} - xz = -\frac{x \sin\alpha \cos\alpha}{(1 - x^2 \sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}.$$

à laquelle satisfait évidemment l'intégrale $z = F$, n'est jamais vérifiée par une valeur de z exprimable en fonction finie explicite de x.

3. Le second membre de l'équation (4) disparaît lorsque l'amplitude α est un multiple de $\frac{\pi}{2}$. Examinons avec étendue ce cas particulier, auquel il sera facile de ramener ensuite le cas général, et discutons en conséquence l'équation

$$(x - x^3)\frac{d^2z}{dx^2} + (1 - 3x^2)\frac{dz}{dx} - xz = 0,$$

ou plutôt l'équation plus simple

$$(5)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(1 + x^2)^2}{4(x - x^3)^2}\,y,$$

que l'on en déduit en posant

$$z = \frac{y}{\sqrt{x - x^3}}.$$

Cette équation (5) est un cas particulier de l'équation

$$(6)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = Py.$$

où P est une fonction quelconque de x, et dont nous allons d'abord nous occuper d'une manière générale.

4. Désignons par μ un nombre entier positif, et par $y_1, y_2, \ldots, y_m$, des intégrales de l'équation (6) en nombre quelconque. Il est aisé de voir, et j'ai prouvé ailleurs [*] que si l'on pose

$$u = y_1^\mu + y_2^\mu + \ldots + y_m^\mu,$$

u dépendra d'une certaine équation différentielle linéaire de l'ordre $(\mu + 1)$, que l'on obtiendrait en considérant les $(\mu + 1)$ équations que voici

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= u', \\ \frac{du'}{dx} &= u\mathrm{P}u + u'', \\ \frac{du''}{dx} &= 2(\mu - 1)\mathrm{P}u' + u''', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{du^{(i)}}{dx} &= i(\mu - i + 1)\mathrm{P}u^{(i-1)} + u^{(i+1)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{du^{(\mu)}}{dx} &= \mu\mathrm{P}u^{(\mu-1)}, \end{aligned}\right.$$

puis éliminant les μ quantités auxiliaires $u', u'', \ldots, u^{(\mu)}$.

Soient Y_1, Y_2, deux intégrales de l'équation (6), distinctes entre elles, et g une constante arbitraire; $\mathrm{Y}_1 + g\mathrm{Y}_2$ sera une intégrale de l'équation (6), de sorte que l'équation linéaire de l'ordre $(\mu + 1)$ dont u dépend sera satisfaite si l'on pose

$$u = (\mathrm{Y}_1 + g\mathrm{Y}_2)^\mu,$$

ou

$$u = \mathrm{Y}_1^\mu + \frac{\mu}{1} g\mathrm{Y}_1^{\mu-1}\mathrm{Y}_2 + \ldots + g^\mu \mathrm{Y}_2^\mu.$$

---

[*] Tome IV de ce Journal, page 429.

Or g étant une constante arbitraire, cette intégrale de l'équation linéaire en u entraîne les intégrales suivantes :

$$u = Y_1^\mu, \quad u = Y_1^{\mu-1} Y_2, \ldots, \quad u = Y_2^\mu.$$

Donc, en désignant par A, $A_1, \ldots, A_\mu$, des constantes arbitraires, on pourra encore poser

$$u = AY_1^\mu + A_1 Y_1^{\mu-1} Y_2 + \ldots + A_\mu Y_2^\mu.$$

Enfin si l'on observe que toute intégrale $y_1, y_2, \ldots, y_\mu$, de l'équation (6), peut s'exprimer par $aY_1 + bY_2$, a et b étant des constantes convenables, et que par suite le produit $y_1 y_2 \ldots y_\mu$, se réduit à la forme

$$AY_1^\mu + A_1 Y_1^{\mu-1} Y_2 + \ldots + A_\mu Y_2^\mu :$$

on en conclura que l'équation en u sera également satisfaite par $u = y_1 y_2 \ldots y_\mu$.

5. En appliquant les équations (7) au cas où P est un simple monome de la forme $\frac{a}{x^2}$, on est conduit à démontrer un théorème d'algèbre qui nous sera utile par la suite. Supposons la constante $4a + 1$ différente de zéro, afin que les racines β, γ, de l'équation $\theta(\theta - 1) = a$ soient inégales. L'intégrale de l'équation (6) est alors

$$y = Bx^\beta + Cx^\gamma.$$

On satisfera donc à l'équation linéaire dont u dépend en prenant

$$u = Ax^{\mu\beta} + A_1 x^{(\mu-1)\beta+\gamma} + \ldots + A_\mu x^{\mu\gamma}.$$

Il suit de là que si, après avoir posé $P = \frac{a}{x^2}$, on cherche à satisfaire aux équations (7) en prenant $u = x^r$, l'équation de condition dont l'exposant r dépendra, devra avoir les racines

$$r = \mu\beta, \quad r = (\mu - 1)\beta + \gamma, \ldots, \quad r = \mu\gamma.$$

Or quand on fait $u = x^r$ dans les équations (7), on trouve pour

u', u'',..., $u^{(i)}$,..., $u^{(\mu)}$, des valeurs monomes de la forme

$$u' = h_1 x^{r-1}, \quad u'' = h_2 x^{r-2}, \ldots, \quad u^{(i)} = h_i x^{r-i}, \ldots,$$

les coefficients h_1, h_2,..., h_i,..., étant liés entre eux par cette série d'égalités

$$\begin{aligned}
h_1 &= r, \\
h_2 &= (r-1)h_1 - a\mu, \\
h_3 &= (r-2)h_2 - a.2(\mu-1)h_1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
h_{i+1} &= (r-i)h_i - a.i(\mu-i+1)h_{i-1}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
h_{\mu+1} &= (r-\mu)h_\mu - a.\mu h_{\mu-1}.
\end{aligned}$$

On a ajouté, pour la symétrie, le coefficient $h_{\mu+1}$, et c'est en posant $h_{\mu+1} = 0$, que l'on doit déterminer r. Cette équation $h_{\mu+1} = 0$ est évidemment de degré $\mu + 1$, et elle doit avoir les $(\mu + 1)$ racines $r = \mu\beta$, $r = (\mu - 1)\beta + \gamma$,..., $r = \mu\gamma$. Par suite le polynome $h_{\mu+1}$ est décomposable dans le produit des facteurs

$$[r - \mu\beta][r - (\mu - 1)\beta - \gamma] \ldots\ldots [r - \mu\gamma].$$

Cette décomposition ayant lieu en général, il est aisé de voir qu'elle subsistera même pour la valeur particulière de a qui rend égaux entre eux les facteurs simples écrits ci-dessus. En prenant donc $a = -\frac{1}{4}$, ce qui donne $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, il viendra

$$h_{\mu+1} = \left(r - \frac{\mu}{2}\right)^{\mu+1};$$

ainsi $h_{\mu+1}$ ne pourra s'évanouir que pour $r = \frac{\mu}{2}$. De là ce théorème, qui pourrait se démontrer par d'autres moyens : *les racines r de l'équation qu'on obtient en posant $h_{\mu+1} = 0$, après avoir déterminé $h_{\mu+1}$*

à l'aide des formules

$$(8)\quad \begin{cases} h_1 = r, \\ h_2 = (r-1)\,h_1 + \frac{\mu}{4}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ h_{i+1} = (r-i)\,h_i + \frac{i(\mu-i-1)}{4}\,h_{i-1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ h_{\mu+1} = (r-\mu)\,h_\mu + \frac{\mu}{4}\,h_{\mu-1}, \end{cases}$$

sont toutes égales entre elles et à $\frac{\mu}{2}$.

6. Revenons maintenant à l'équation (5), laquelle répond au cas de

$$P = -\frac{(1+x^2)^2}{4(x-x^3)^2},$$

et prouvons que cette équation (5) n'a pas d'intégrale algébrique. Par une méthode identique avec celle du n° **5** de mon Mémoire *sur l'intégration d'une classe d'équations différentielles du second ordre en quantités finies* [*], on démontrera d'abord que si l'équation (5) avait une intégrale algébrique, le système des équations (7), où l'on doit prendre désormais

$$P = -\frac{(1+x^2)^2}{4(x-x^3)^2},$$

devrait, pour des valeurs convenables de α, être vérifiée par une valeur de u rationnelle et différente de zéro. Prouvons qu'une telle valeur de u est impossible.

Si la valeur de u était une fraction rationnelle, son dénominateur réduit à sa plus simple expression, ne pourrait contenir aucun facteur $(x-p)$, différent des facteurs x, $x-1$, $x+1$, qui se trouvent déjà dans le dénominateur de P. En effet, si $x-p$ se trouvait dans le de-

[*] Voyez tome IV de ce Journal, page 431.

nominateur de u avec l'exposant ρ, la théorie connue de la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples et la considération attentive des équations (7) nous montrent que ce même facteur entrerait dans les dénominateurs de u', u'',..., $u^{(\mu-1)}$, $u^{(\mu)}$, $\frac{du^{(\mu)}}{dx}$, avec les exposants respectifs $\rho+1$, $\rho+2$,..., $\rho+\mu-1$, $\rho+\mu$, $\rho+\mu+1$; or cela est absurde puisqu'on a $\frac{du^{(\mu)}}{dx} = \mu P u^{(\mu-1)}$.

Je dis, de plus, que le dénominateur de u ne peut pas contenir les facteurs x, $x-1$, $x+1$. La démonstration est la même pour ces trois facteurs, et il nous suffira de considérer le premier d'entre eux.

Décomposons en fractions simples les fractions rationnelles qui représentent par hypothèse les valeurs de u, u', etc., et désignons par

$$\frac{B}{x^r} \quad \text{ou} \quad Bx^r,$$

le terme de u où x entre en dénominateur avec le plus grand exposant possible. Il y aura dans P un terme semblable, et ce terme sera

$$-\frac{1}{4x^2} \quad \text{ou} \quad -\frac{1}{4}x^{-2}.$$

L'équation $\frac{du}{dx} = u'$, nous montre que u' en contiendra aussi un, savoir :

$$-\frac{rB}{x^{r+1}} \quad \text{ou} \quad rBx^{r-1}.$$

Nous le représenterons par $B_1 x^{r-1}$, et nous aurons

$$B_1 = rB.$$

L'équation

$$\frac{du'}{dx} = \mu P u + u''$$

nous montre de même que la fraction simple provenant de la décomposition de u'', où x se trouve en dénominateur avec le plus grand expo-

sant possible, est

$$B_2 x^{r-2},$$

B_2 étant lié à B et B_1 par la formule

$$B_2 = (r-1)B_1 + \frac{\mu B}{4}.$$

En général, le plus grand exposant de x dans le dénominateur de $u^{(i)}$ ne peut pas surpasser $\rho + i$ ou $i - r$, et l'on peut toujours supposer qu'il existe une fraction simple correspondante, savoir,

$$\frac{B_i}{x^{\rho-i}} \quad \text{ou} \quad B_i x^{r-i};$$

seulement nous ne pouvons pas affirmer *à priori* que B_i aura une valeur différente de zéro. Ajoutons que l'équation

$$\frac{du^{(i)}}{dx} = i(\mu - i + 1)Pu^{(i-1)} + u^{(i+1)}$$

entraînera dans tous les cas celle-ci :

$$B_{i+1} = (r-i)B_i + \frac{i(\mu - i + 1)}{4} B_{i-1}.$$

La formule que je viens d'écrire s'étendra même au cas où $i = \mu$, si l'on a soin de remplacer la dernière équation du système (7) par ces deux autres

$$\frac{du^{(\mu)}}{dx} = \mu P u^{(\mu-1)} + u^{(\mu+1)}, \quad u^{(\mu+1)} = 0,$$

dont la seconde exige que $B_{\mu+1} = 0$. Maintenant si l'on divise par B toutes les équations trouvées entre B, $B_1, \ldots, B_{\mu+1}$, et si l'on fait en général

$$\frac{B_i}{B} = h_i,$$

on devra avoir, d'après ce qui précède,

$$\begin{aligned}
h_1 &= r,\\
h_2 &= (r-1)\,h_1 + \frac{\mu}{4},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
h_{i+1} &= (r-i)\,h_i + \frac{i(\mu-i+1)}{4}\,h_{i-1},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
h_{\mu+1} &= (r-\mu)\,h_\mu + \frac{\mu}{4}\,h_{\mu-1},
\end{aligned}$$

puis

$$h_{\mu+1} = 0.$$

Or cela est impossible, la valeur de r étant négative, car les formules que nous trouvons sont précisément celles du système (8), et nous avons vu, n° 5, que les racines de l'équation $h_{\mu+1} = 0$ sont toutes positives et égales à $\frac{\mu}{2}$.

7. La même démonstration s'appliquant aux facteurs $x-1$, $x+1$ [*], il en résulte que u ne peut être rationnelle sans se réduire à un polynome entier. Mais cette réduction n'a pas lieu nécessairement pour les autres inconnues $u^{(\mu)}$, $u^{(\mu-1)}$, etc., qui entrent dans le système des équations (7). Cela étant, désignons par X un polynome tel, qu'en multipliant par X ou par sa dérivée une quelconque des quantités $u^{(i)}$, $Pu^{(i)}$, le produit obtenu soit toujours entier. Les équations (7) multipliées par X peuvent se mettre sous la forme

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d.Xu}{dx} - u\,\frac{dX}{dx} = Xu',\\
&\frac{d.Xu'}{dx} - u'\,\frac{dX}{dx} = \mu PXu + Xu'',\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{d.Xu^{(i)}}{dx} - u^{(i)}\,\frac{dX}{dx} = i(\mu-i+1)\,PXu^{(i-1)} + Xu^{(i+1)},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{d.Xu^{(\mu)}}{dx} - u^{(\mu)}\,\frac{dX}{dx} = \mu PXu^{(\mu-1)}.
\end{aligned}\right.$$

[*] Il faut, bien entendu, considérer alors d'une manière spéciale les fractions simples ayant pour dénominateurs les puissances les plus élevées de $x-1$ ou de $x+1$.

Désignons par ax^r le premier terme du polynome u ordonné suivant les puissances descendantes de x; désignons de même par Ax^m le premier terme de X, en sorte que l'on ait

$$Xu = Aax^{m+r} + \text{etc.}$$

La première des équations (9) nous fournira

$$Xu' = Arx^{m+r-1} + \text{etc.},$$

c'est-à-dire

$$Xu' = Aah_1x^{m+r-1} + \text{etc.},$$

en posant $h_1 = r$. L'équation

$$\frac{d.Xu'}{dx} - u'\frac{dX}{dx} = \mu PXu + Xu$$

nous fournira ensuite

$$Xu'' = \frac{d.Xu'}{dx} - u'\frac{dX}{dx} - \mu PXu.$$

Or le produit μPXu doit se réduire à une fonction entière, et (d'après la composition de P, X et u) il est aisé de voir que le premier terme de cette fonction entière sera

$$-\frac{\mu}{4}.Aax^{m+r-2};$$

on aura donc

$$Xu'' = Aa\left[(r-1)h_1 + \frac{\mu}{4}\right]x^{m+r-2} + \text{etc.},$$

ou

$$Xu'' = Aah_2x^{m+r-2} + \text{etc.},$$

en posant

$$h_2 = (r-1)h_1 + \frac{\mu}{4}.$$

En continuant ainsi on s'assurera que le degré du polynome $Xu^{(i)}$ ne peut pas surpasser $m + r - i$, et que par suite on a le droit de poser

$$Xu^{(i)} = Aah_ix^{m+r-i} + \text{etc.},$$

h_i...

h_i se réduisant à zéro si le terme en x^{m+r-i} manque dans $Xu^{(i)}$. En vertu de l'équation

$$\frac{d.Xu^{(i)}}{dx} - u^{(i)}\frac{dX}{dx} = i(\mu - i + 1)PXu^{(i-1)} + Xu^{(i+1)},$$

on trouvera d'ailleurs

$$h_{i+1} = (r - i)h_i + \frac{i(\mu - i + 1)}{4}h_{i-1},$$

relation qui s'étendra même à la valeur $i = \mu$ si l'on remplace la dernière des équations (9) par ces deux autres

$$\frac{d.Xu^{(\mu)}}{dx} - u^{(\mu)}\frac{dX}{dx} = \mu PXu^{(\mu-1)} + Xu^{(\mu+1)}, \quad Xu^{(\mu-1)} = 0,$$

dont la seconde exige que $h_{\mu+1} = 0$. L'exposant r se trouve ainsi déterminé, et nous voyons qu'il est égal à $\frac{\mu}{2}$, puisque les relations établies entre h_1, h_2, etc., coïncident avec celles du système (8).

8. Le premier terme du polynome u, ordonné suivant les puissances descendantes de x, a donc pour exposant $\frac{\mu}{2}$. Mais si l'on recommence les calculs précédents en ordonnant ce même polynome u et tous les autres polynomes $Xu^{(i)}$, $u^{(i)}\frac{dX}{dx}$, suivant les puissances ascendantes de x, on trouvera précisément les mêmes équations pour déterminer le degré du premier terme de u, et l'on conclura de nouveau que ce degré $= \frac{\mu}{2}$. Cela tient à la forme particulière de la fraction

$$P = -\frac{(1 + x^2)^2}{4(x - x^3)^2}.$$

Cette forme est en effet telle que si U et PU sont des polynomes entiers, le premier terme de PU s'obtiendra toujours en divisant par $-4x^2$ le premier terme de U, soit qu'on ait ordonné par rapport aux puissances descendantes de x, soit qu'on ait ordonné par rapport aux puissances ascendantes. Il suit de là que le terme de u du degré le plus

élevé et le terme de u du degré le moins élevé ont les mêmes exposants $\frac{\mu}{2}$.

Par conséquent u ne peut être qu'un monome de la forme $ax^{\frac{\mu}{2}}$. Examinons si cette valeur de u s'accorde avec les équations (7). De la première de ces équations on tire

$$u' = \frac{\mu}{2} . ax^{\frac{\mu}{2} - 1};$$

la seconde donne ensuite

$$u'' = \frac{\mu(1 - x^2)^2}{4(x - x^3)^2} . ax^{\frac{\mu}{2}} + \frac{a\mu(\mu - 2)}{4} x^{\frac{\mu}{2} - 2};$$

le facteur $x - 1$ se trouve ici en dénominateur avec l'exposant 2, et la fraction simple qui le contient ainsi à la seconde puissance est

$$\frac{a\mu}{4(x - 1)^2}:$$

en posant

$$h_2 = \frac{\mu}{4},$$

on peut la représenter par

$$\frac{ah_2}{(x - 1)^2}.$$

En se servant des équations successives (7), on verra de même aisément que le facteur $x - 1$ entre tout au plus à la puissance i dans le dénominateur de $u^{(i)}$, et que par conséquent on a le droit d'y supposer représentée par

$$\frac{ah_i}{(x - 1)^i}$$

la fraction simple pour laquelle l'exposant de $x - 1$ est le plus grand possible. De plus on trouve $h_3 = -2h_2$, puis, pour $i > 2$,

$$h_{i+1} = -ih_i + \frac{(\mu - i + 1)}{4} h_{i-1},$$

relation que l'on peut étendre même au cas de $i = \mu$, en remplaçant,

comme au n° **6**, la dernière des équations (7) par les deux autres

$$\frac{du^{(\mu)}}{dx} = \mu \mathrm{P} u^{(\mu-1)} + u^{(\mu+1)}, \quad u^{(\mu+1)} = 0,$$

dont la seconde exige que $h_{\mu+1} = 0$. Mais les équations

$$h_2 = \frac{\mu}{4}, \ldots, \; h_{i+1} = -ih_i + \frac{i(\mu - i + 1)}{4} h_{i-1}, \ldots, \; h_{\mu+1} = 0,$$

que nous venons de former, sont incompatibles, puisqu'elles se déduisent du système (8) en donnant à r la valeur o qui ne peut annuler $h_{\mu+1}$, comme on l'a vu n° **5**. Donc la valeur de u ne peut pas être exprimée par un monome; donc cette valeur de u n'est pas rationnelle; donc aussi les intégrales $y_1, y_2, \ldots$, de l'équation (5) ne s'expriment jamais algébriquement. Notre analyse prouve en même temps que les produits formés d'un nombre μ quelconque de ces intégrales ne se réduisent jamais à une fonction algébrique et rationnelle de x : on a vu en effet (n° 4) que ces produits satisfont à la même équation que u.

9. Cherchons à présent s'il y a une intégrale de l'équation (5) qui puisse s'exprimer en joignant aux signes algébriques les signes exponentiels et logarithmiques. Or, quelle que soit la fonction *algébrique* P, j'ai prouvé dans un autre Mémoire [*] que pour que l'équation

$$(6) \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = \mathrm{P} y,$$

dont l'équation (5) n'est qu'un cas particulier, ait une intégrale du genre de celle dont nous venons de parler, il faut que l'équation

$$\frac{dt}{dx} + t^2 = \mathrm{P}$$

puisse être vérifiée par une valeur algébrique de t. J'ajouterai ici, que ce théorème subsisterait encore lors même que pour obtenir la valeur

---

[*] Voyez les n^{os} **9**, **10** et **11** de mon *Mémoire sur l'intégration d'une classe d'équations différentielles du second ordre en quantités finies explicites*, tome IV de ce Journal, page 435. A la vérité dans ce Mémoire j'ai eu surtout en vue le cas où P est un simple polynome entier; mais cela n'empêche pas l'analyse dont j'ai fait usage de s'étendre à une fonction algébrique quelconque.

de y on serait obligé de joindre le signe $\int$ d'intégration indéfinie aux signes algébriques, exponentiels et logarithmiques; cela tient à ce que les fonctions qui naissent de l'emploi du signe $\int$ jouissent, dans ce genre de recherches, de propriétés toutes semblables à celles des logarithmes [*]. Ce théorème fondamental étant admis, je dis que toutes les fois qu'il est impossible d'obtenir une fonction rationnelle de x en multipliant entre elles des intégrales de l'équation (6) (ce qui arrive en effet, comme on l'a vu tout-à-l'heure, pour la valeur particulière de P qui répond à l'équation (5)), l'équation algébrique irréductible dont t dépend ne peut être que du premier degré. En effet, si cette équation était d'un degré $i > 1$, ses racines $t_1, t_2, \ldots, t_i$ donneraient naissance à une suite de fonctions

$$y_1 = e^{\int t_1 dx}, \quad y_2 = e^{\int t_2 dx}, \ldots, y_i = e^{\int t_i dx},$$

qui toutes seraient des intégrales particulières de l'équation (6). Cela est démontré dans le n° **12** du Mémoire cité en tête de ce numéro, et l'on y fait voir de plus que le produit de deux quelconques des fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_i$, est de la forme

$$y_m y_n = \frac{C}{t_m - t_n},$$

[*] C'est ce que j'ai déjà remarqué à la fin du Mémoire dont il est question dans la Note précédente. Au reste, dès qu'on admet le signe $\int$ d'intégration relative à x dans les fonctions dont on s'occupe, on peut renoncer aux signes logarithmiques que le signe $\int$ remplace immédiatement, puisque l'on a

$$\log f(x) = \int_a^x \frac{f'(x)\,dx}{f(x)} + \log f(a).$$

Les nouvelles fonctions finies explicites auxquelles donnera lieu le signe $\int$ combiné un nombre limité de fois avec les signes algébriques et les signes exponentiels se partageront en espèces, comme les anciennes, d'après le nombre des signes transcendants qui portent les uns sur les autres. Enfin, pour bien comprendre quelle est, dans ce genre de recherches, l'analogie des fonctions intégrales avec les fonctions logarithmiques, il suffit d'observer que si l'on a $\theta = \int v\,dx$, la différentielle de la fonction $\varphi(x, \mu - \theta)$, où μ est une constante, se déduira de celle de $\varphi(x, \theta)$, savoir $\varphi'x(x, \theta) + \varphi'\theta(x, \theta)v$, en y remplaçant simplement θ par $\mu + \theta$, ce qui est précisément (voyez la note au bas de la page 527, tome III de ce Journal) la propriété fondamentale qui nous sert en général pour traiter les fonctions logarithmiques.

C étant une constante différente de zéro. Multipliant entre elles les $\frac{i(i-1)}{2}$ équations qui se déduisent de celle que nous venons d'écrire, puis élevant au carré le résultat final, on aura donc

$$(y_1 y_2 \ldots y_i)^2 = \frac{B}{(t_2-t_1)^2 (t_3-t_1)^2 \ldots (t_{i-1}-t_i)^2},$$

B étant une nouvelle constante différente de zéro, et

$$(t_2 - t_1)^2 (t_3 - t_1)^2 \ldots (t_{i-1} - t_i)^2$$

étant au signe près le dernier terme de l'équation aux carrés des différences des racines $t_1, t_2, \ldots, t_i$. Ce dernier terme étant nécessairement rationnel, il faudrait que $(y_1 y_2 \ldots y_i)^2$ le fût aussi; or cela est absurde, car $(y_1 y_2 \ldots y_i)^2$ est le produit de $2i$ intégrales de l'équation (6), et, par hypothèse, un tel produit ne peut pas s'exprimer en fonction rationnelle de x.

10. Pour compléter notre démonstration et prouver que l'équation (5) n'a aucune intégrale de la forme $y =$ *une fonction finie explicite de* x, il nous reste encore à montrer que l'équation

$$(10) \qquad \frac{dt}{dx} + t^2 = -\frac{(1+x^2)^2}{4(x-x^3)^2}$$

ne peut pas être vérifiée par une valeur rationnelle de t.

Cette valeur rationnelle, si elle existait, se composerait d'une partie entière exprimée par un polynome d'un certain degré m et d'une partie fractionnaire. Or si la partie entière de t est de degré m, celles de t^2, $\frac{dt}{dx}$ et $\frac{dt}{dx} + t^2$ seront respectivement de degré $2m$, $m-1$, $2m$, ce qu'on ne peut admettre, puisque le second membre de l'équation (10) est une fraction proprement dite. Cette conclusion subsiste même dans le cas où $m = 0$, comme il est aisé de s'en assurer. Il suit de là que la partie entière de t est identiquement nulle ou que t est une fraction proprement dite. Décomposons cette fraction rationnelle en fractions simples, et il y aura au moins une de ces fractions qui sera de la

forme

$$\frac{A}{x^n},$$

A ne se réduisant pas à zéro. En effet, si t ne contenait pas le facteur x en dénominateur, $\frac{dt}{dx}$ ne le contiendrait pas non plus, ce qui est absurde, puisque x entre en diviseur dans le second membre. Cela posé, parmi les fractions de la forme

$$\frac{A}{t^n}$$

qui peuvent résulter de la décomposition de t, je considère spécialement celle pour laquelle l'exposant n est le plus grand possible, puis je mets la valeur de t sous la forme

$$t = \frac{A}{x^n} + \Psi,$$

Ψ étant une nouvelle fraction dans le dénominateur de laquelle x ne peut pas entrer plus de $n - 1$ fois. On en tirera

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{nA}{x^{n+1}} + \Psi',$$

$$t^2 = \frac{A^2}{x^{2n}} + \Psi'',$$

Ψ' et Ψ'' étant des fractions dont les dénominateurs ne peuvent contenir x à des puissances plus grandes que n et $2n - 1$. L'équation (10) nous donne

$$\frac{A^2}{x^{2n}} - \frac{nA}{x^{n+1}} + \Psi' + \Psi'' = -\frac{1 - x^2}{4(x - x^3)^2};$$

si n est > 1, on arrive donc à une absurdité, car on obtient pour valeur de $\frac{A^2}{x^{2n}}$ une fraction dans laquelle x n'entre en dénominateur qu'avec un exposant $< 2n$; si $n = 1$, cette absurdité disparaît et

l'on a

$$\frac{A^2 - A}{x^2} + \Psi' + \Psi'' = -\frac{(1+x^2)^2}{4(x-x^3)^2},$$

c'est-à-dire

$$\frac{A^2 - A}{x^2} = -\Psi' - \Psi'' - \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{4(x-1)^2} - \frac{1}{4(x+1)^2} + \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)},$$

d'où résulte nécessairement

$$A^2 - A = -\frac{1}{4} \quad \text{ou} \quad A = \frac{1}{2}.$$

Ainsi la fraction $\frac{1}{2x}$ est la seule fraction de la forme

$$\frac{A}{x^n}$$

qui puisse résulter de la décomposition de t. On verra de la même manière que

$$\frac{1}{2(x-1)}, \quad \frac{1}{2(x+1)},$$

sont aussi les seules fractions de la forme

$$\frac{A}{(x-1)^n}, \quad \frac{A}{(x+1)^n},$$

auxquelles on puisse être conduit. Mais il peut en outre exister dans la valeur de t décomposée des fractions de la forme

$$\frac{A}{(x-p)^n},$$

p étant une constante qui ne se réduit ni à zéro, ni à l'unité prise positivement ou négativement. En suivant la même marche que ci-dessus on trouvera que pour ces fractions $n = 1$ et $A = 1$. La valeur de t doit donc être de la forme

$$t = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{x-p} + \ldots + \frac{1}{x-q}.$$

Mais il suivrait de là que l'équation (5) serait satisfaite en posant

$$y = e^{\int t\,dx} = (x - p)\ldots(x - q)\sqrt{x - x^2},$$

c'est-à-dire

$$y = \textit{une fonction algébrique de } x,$$

ce qui est absurde. Donc t n'a pas de valeur rationnelle. Donc aussi y n'est pas une fonction finie explicite de x; ce qu'il fallait démontrer.

11. Ayant ainsi traité complétement le cas où l'équation (4) n'a pas de second membre, je vais maintenant y ramener le cas général. Et d'abord je vais prouver que si l'équation (4) a une intégrale exprimable en fonction finie explicite de x, l'intégrale dont il s'agit sera purement algébrique. Car si l'on nie cela, soit m l'indice de la fonction finie explicite vérifiant l'équation (4), et réduisons à son *minimum* le nombre des transcendantes monomes de $m^{ième}$ espèce contenues dans cette fonction. Je dis qu'aucune d'elles ne sera de la forme e^v. Dans l'hypothèse contraire posons en effet $e^v = \theta$ et

$$z = \varphi(x, \theta),$$

la fonction φ étant algébrique par rapport à θ et par rapport aux autres transcendantes de $m^{ième}$ espèce. En différentiant on aura

$$\frac{dz}{dx} = \varphi_1(x, \theta) + \varphi_0(x, \theta)\,\theta\,\frac{dv}{dx} = f(x, \theta),$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = f_1(x, \theta) + f_0(x, \theta)\,\theta\,\frac{dv}{dx} = F(x, \theta),$$

et $f(x, \theta)$, $F(x, \theta)$ seront des fonctions du même genre que $\varphi(x, \theta)$, c'est-à-dire des fonctions algébriques par rapport à θ et par rapport aux autres transcendantes de $m^{ième}$ espèce. Pour que l'équation (4) soit satisfaite, il faudra donc que l'on ait

$$(x - x^2)F(x, \theta) - (1 - 3x^2)f(x, \theta) - x\varphi(x, \theta) = -\frac{x \sin\alpha \cos\alpha}{(1 - x^2 \sin^2\alpha)^2},$$

équation dans laquelle on aura le droit de remplacer θ par $u\theta$, u étant

une constante quelconque [*]. Ainsi, quel que soit μ, il viendra

$$(x-x^3)\,F(x,\mu\theta)-(1-3x^2)\,f(x,\mu\theta)-x\varphi(x,\mu\theta)=-\frac{x\sin\alpha\cos\alpha}{(1-x^2\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}.$$

Mais c'est là précisément le résultat qu'on aurait obtenu en posant

$$z=\varphi(x,\mu\theta),$$

puisque la différentiation aurait donné

$$\frac{dz}{dx}=\varphi'_x(x,\mu\theta)+\varphi'_{\mu\theta}(x,\mu\theta)\,\mu\theta\,\frac{d\theta}{dx}=f(x,\mu\theta),$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=f'_x(x,\mu\theta)+f'_{\mu\theta}(x,\mu\theta)\,\mu\theta\,\frac{d\theta}{dx}=F(x,\mu\theta).$$

Donc on satisfera à l'équation (4) en posant $z=\varphi(x,\mu\theta)$, d'où il suit que l'équation qui s'en déduit en supprimant le second membre aura cette intégrale

$$\varphi(x,\mu\theta)-\varphi(x,\theta);$$

or cela est absurde, puisque aucune des intégrales de l'équation dont il s'agit ne peut être une fonction finie explicite de x.

On arrivera à une absurdité du même genre si l'on suppose que z puisse contenir un logarithme de $m^{ième}$ espèce tel que $\theta=\log v$; seulement, dans les calculs qui précèdent, on devra remplacer θ par $\mu+\theta$ et non plus par $\mu\theta$. Je ferai observer que les mêmes raisonnements s'appliqueraient aux fonctions produites par l'emploi du signe d'intégration indéfinie $\int$. Ces fonctions ne peuvent être admises dans la valeur de z sans conduire à une absurdité. Les transcendantes étant ainsi exclues de la valeur de z, il reste à examiner si cette valeur peut être algébrique; dès qu'il sera prouvé qu'elle ne peut pas l'être, on aura le droit de conclure qu'elle n'est exprimable explicitement par aucune formule renfermant un nombre limité de fois les signes algébriques, exponentiels et logarithmiques, et le signe $\int$ d'intégration indéfinie.

---

[*] Voyez tome II de ce Journal, page 76.

12. Désignons par λ une fonction algébrique irrationnelle quelconque, et par L, M, ..., N, des fonctions rationnelles de x, puis considérons l'équation linéaire

$$(11) \qquad L\frac{d^m z}{dx^m} + M\frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}} + \ldots + Nz = T,$$

où le second membre est supposé fonction rationnelle de x et de λ. Si l'équation (11) est satisfaite en prenant pour z une fonction algébrique de x, elle le sera aussi en prenant pour z une certaine fonction rationnelle de x et de λ.

En effet, la valeur de z algébrique en x qui satisfait par hypothèse à l'équation (11), peut être regardée comme une fonction algébrique de x et de λ déterminée par une équation irréductible de la forme

$$(12) \qquad z^\mu + Kz^{\mu-1} + \text{etc.} = 0,$$

dont les coefficients K, etc., sont rationnels en x et λ. Les dérivées successives de z s'obtiendront aisément en différentiant l'équation (12), et elles seront toutes fonctions rationnelles de x, λ et z: en les substituant dans le premier membre de l'équation (11) et désignant par f une fonction rationnelle, on aura donc

$$(13) \qquad f(x, \lambda, z) = T.$$

Mais l'équation (12) étant irréductible, si une de ses racines z_1 satisfait à l'équation (13), les autres $z_2, \ldots, z_\mu$, devront y satisfaire aussi. En d'autres termes l'équation (11) ne peut avoir l'intégrale $z = z_1$ sans avoir en même temps les intégrales $z = z_2, \ldots, z = z_\mu$, et par suite l'intégrale

$$z = \frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_\mu}{\mu} = -\frac{K}{\mu},$$

c'est-à-dire

$$z = \textit{fonction rationnelle} \text{ de } x \text{ et } \lambda,$$

ce qu'il fallait démontrer.

En appliquant ce théorème à l'équation

$$(4)\qquad (x - x^3)\frac{d^2z}{dx^2} + (1 - 3x^2)\frac{dz}{dx} - xz = -\frac{x \sin\alpha \cos\alpha}{(1 - x^2 \sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}},$$

on voit que l'existence d'une intégrale algébrique entraîne celle d'une intégrale de la forme

$$z = u + v\sqrt{1 - x^2 \sin^2\alpha},$$

u et v étant des fonctions rationnelles de x; d'ailleurs si une telle intégrale existe, il faudra qu'après la substitution de z dans l'équation (4) la partie rationnelle soit nulle, indépendamment de la partie irrationnelle, ce qui donnera

$$(x - x^3)\frac{d^2u}{dx^2} + (1 - 3x^2)\frac{du}{dx} - xu = 0,$$

et par suite $u = 0$, puisque $u = 0$ est la seule intégrale algébrique que puisse posséder l'équation en u, équation qui n'est autre que l'équation (4) privée du second membre. La valeur de z sera donc simplement

$$z = v\sqrt{1 - x^2 \sin^2\alpha}.$$

13. La fonction rationnelle v peut être regardée en général comme composée d'une partie entière et d'une partie fractionnaire contenant un certain nombre de fractions de la forme

$$\frac{a}{(x - p)^i}.$$

Désignant par n le degré de la partie entière, ne mettant d'ailleurs en évidence qu'une des fractions simples, et supposant que la fraction simple ainsi indiquée explicitement soit parmi les fractions qui ont $x - p$ en diviseur celle pour laquelle l'exposant i est le plus grand, nous écrirons

$$z = \left[A_n x^n + \ldots + \frac{a}{(x - p)^i} + \ldots\right]\sqrt{1 - x^2 \sin^2\alpha}.$$

Or, si nous différencions cette expression deux fois de suite pour en tirer $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, puis si nous portons ces valeurs dans l'équation (4), il faudra qu'après avoir tout multiplié par $(1 - x^2 \sin^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}$, les deux membres de cette équation (4) soient égaux entre eux. Il faudra donc :

1°. Que la partie entière du premier membre se réduise à

$$- x \sin \alpha \cos \alpha;$$

or, en formant (ce qui est très facile) le premier terme de cette partie entière, on le trouve égal à

$$- A (n + 2)^2 \sin^4 \alpha \, x^{n+5};$$

il faut donc que A soit zéro et v purement fractionnaire;

2°. Que la partie fractionnaire se réduise d'elle-même à zéro, d'où il est aisé de conclure d'abord que les seules valeurs possibles de p sont

$$p = 0, \quad p = \pm 1, \quad p = \pm \frac{1}{\sin \alpha};$$

en effet (on le voit de suite) pour toute autre valeur de p il y aurait une fraction de la forme

$$\frac{ag}{(x - p)^{n+2}},$$

dans laquelle g serait essentiellement différent de zéro, et qui ne pourrait être détruite par aucune autre. Et quand on donne à p une des cinq valeurs écrites ci-dessus, un calcul un peu plus long, mais fort simple encore, suffit pour constater de même que la fraction contenant en dénominateur la plus haute puissance de $x - p$, ne peut pas disparaître. Dès lors il est prouvé qu'en attribuant à z une valeur de la forme indiquée tout-à-l'heure, on ne peut jamais satisfaire à l'équation (4). Cette équation (4) n'a donc aucune intégrale algébrique; par suite elle n'a aucune intégrale exprimable à l'aide d'un nombre limité de signes algébriques, exponentiels et logarithmiques, auxquels on peut même joindre le signe $\int$ d'intégration indéfinie. Donc enfin un

nombre limité des signes dont il s'agit ne peut pas non plus fournir en fonction du module les valeurs des fonctions elliptiques de première espèce. L'équation

$$F = E - x\frac{dE}{dx}$$

montre ensuite que le même théorème a lieu pour les fonctions elliptiques de seconde espèce; car si E pouvait s'exprimer en quantités finies, cette équation conduirait à une valeur finie de F, ce qui est absurde.

NOUVELLE SOLUTION

DU

PROBLÈME DE L'ATTRACTION D'UN ELLIPSOIDE HÉTÉROGÈNE SUR UN POINT EXTÉRIEUR [*];

PAR M. CHASLES.

1. J'ai donné une première solution de ce problème dans un Mémoire qui paraîtra dans le *Recueil des Savants étrangers* [**]. Dans ce Mémoire, j'ai eu pour objet principal de continuer la méthode synthétique de Maclaurin, et de généraliser, par cette méthode, les beaux résultats auxquels elle avait conduit le géomètre anglais. Cette généralisation qui, après avoir résisté long-temps aux efforts de l'analyse, maniée par D'Alembert et Lagrange [***], a été obtenue enfin par Legendre [****] et Laplace [*****], de deux manières très différentes,

[*] Cette solution est extraite des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, T. VI, p. 902, séance du 25 juin 1838. J'y ai fait quelques changements de rédaction, et j'ai ajouté, sous forme de Notes, quelques développements destinés à la rendre tout-à-fait élémentaire et indépendante de tous autres ouvrages.

[**] Voir le *Rapport* de M. Poinsot, *Comptes rendus*, etc. T. VI, p. 808, séance du 11 juin 1838.

[***] Voir *Opuscules mathématiques* de D'Alembert, T. VI et VII. — *Mémoires de l'Académie de Berlin*, années 1773, 1774, 1775 et 1795.

[****] *Recueil des Savants étrangers*, T. X, et *Mémoires de l'Académie des Sciences*, année 1788.

[*****] *Mémoires de l'Académie des Sciences*, année 1783, et *Mécanique céleste*, T. II, livre 3.

avait paru à d'illustres analystes, peu accessible à la synthèse [*]. La marche que j'ai suivie consiste à comparer de molécule à molécule les attractions des deux ellipsoïdes considérés dans le théorème de Maclaurin; ce qui montre, en quelque sorte, l'origine et la cause première de ce singulier et célèbre théorème. Cette solution est simple en elle-même; mais elle nécessite la connaissance de plusieurs propriétés nouvelles des surfaces de second degré; et la démonstration de celles-ci entraîne dans des considérations géométriques qui ne sont pas sans quelque difficulté, et qui peuvent faire regarder cette solution comme peu susceptible d'un usage pratique, du moins jusqu'à ce que les méthodes géométriques, fort négligées depuis un siècle, aient repris faveur. Dans la solution actuelle, j'évite ces considérations, en comparant, tout d'abord, de couche à couche, les attractions des deux ellipsoïdes de Maclaurin. De cette manière, une seule propriété de ces surfaces me suffit, et cette proposition n'est pas inconnue : c'est précisément celle sur laquelle repose le beau théorème de M. Ivory, sur l'attraction des ellipsoïdes.

Cette solution est *synthétique*, comme la première; elle conduit, sans calculs, à une expression géométrique de l'attraction qu'une couche ellipsoïdale infiniment mince comprise entre deux surfaces semblables, exerce sur un point extérieur quelconque

Pour passer à l'attraction de l'ellipsoïde, on le considère comme

---

[*] M. Legendre, à la suite de sa solution pour le cas d'un point extérieur, s'exprime ainsi : « Ce problème est vraisemblablement un de ceux auxquels la méthode synthé- » tique *ne serait pas applicable*.. » (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, année 1788, page 486.

M. Poisson, après avoir exprimé l'opinion que l'analyse seule peut résoudre les problèmes un peu difficiles, et que la synthèse y est impuissante, dit que, néanmoins, le livre des *Principes mathématiques de la Philosophie naturelle* fait exception à cette règle, et ajoute ce qui suit :

« On peut encore citer les beaux théorèmes de Maclaurin sur l'attraction d'un ellip- » soïde; mais s'il est vrai que, dans cette question, la synthèse ait d'abord devancé » l'analyse, celle-ci a bientôt repris sa supériorité entre les mains de Lagrange, et la » question n'a été résolue complétement que par des transformations analytiques, que » l'on n'a pas tout de suite imaginées, et *auxquelles la synthèse n'aurait pu suppléer*. » (*Note sur le mouvement de rotation d'un corps solide*, lue à l'Académie des Sciences, le 26 mai 1834.

composé de couches infiniment minces, comprises chacune entre deux surfaces semblables; et il suffit de placer l'expression trouvée pour l'attraction de l'une de ces couches, sous le signe d'intégration. Toutefois, il faut donner d'abord à cette formule une forme analytique convenable, en exprimant les différentes quantités qui y entrent en fonction d'une seule variable.

Le choix de cette variable est tel, qu'on peut supposer que, chaque couche étant homogène, la densité de l'ellipsoïde varie d'une couche à une autre, suivant une fonction quelconque d'un diamètre de la surface externe de la couche. On obtient ainsi l'expression de l'attraction exercée par un ellipsoïde hétérogène sur un point extérieur : ce qui comprend, comme on sait, le cas d'un point intérieur, et conséquemment la solution complète du problème.

2. La proposition de géométrie sur laquelle nous nous appuierons s'énonce ainsi :

Quand deux ellipsoïdes ont leurs sections principales décrites des mêmes foyers, si, sur le premier, on prend arbitrairement deux points S, m, *et, sur le second, les deux points* CORRESPONDANTS S′, m′, *les deux droites* Sm′, S′m, *seront égales* [*].

On sait que M. Ivory a appelé points *correspondants* deux points situés sur les deux ellipsoïdes, de manière que leurs coordonnées, dans le sens de chaque axe principal, soient entre elles comme les demi-diamètres des deux ellipsoïdes, dirigés suivant cet axe.

3. Concevons deux surfaces ellipsoïdales A, B, semblables entre elles, semblablement placées et concentriques; soient a, b, c, les trois demi-diamètres principaux de la première, et na, nb, nc, ceux de la seconde : les équations des deux surfaces seront

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = n^2.$$

Supposons qu'à chaque point m de l'espace, dont les coordonnées

[*] Voir la démonstration de ce théorème dans la Note I, à la suite de ce Mémoire.

sont x, y, z, *corresponde* un point m' dont les coordonnées x', y', z', aient avec celles du point m les relations

$$\frac{x}{x'} = \frac{a}{a'}, \quad \frac{y}{y'} = \frac{b}{b'}, \quad \frac{z}{z'} = \frac{c}{c'},$$

a', b', c', étant trois coefficients arbitraires.

Aux deux surfaces proposées correspondront deux autres surfaces A′, B′, qui seront deux ellipsoïdes semblables entre eux et semblablement placés : le rapport de leurs diamètres homologues sera n.

Ces deux surfaces jouissent de cette propriété, que : *une partie quelconque du volume compris entre elles est à la partie correspondante du volume compris entre les deux premières, dans le rapport constant* $\frac{a'b'c'}{abc}$; car les relations entre les coordonnées de deux points *correspondants* donnent

$$dx'dy'dz' = \frac{a'b'c'}{abc}\, dx\,dy\,dz.$$

4. Prenons les coefficients indéterminés a', b', c', tels qu'ils aient avec les trois premiers a, b, c, les deux relations

$$a^2 - b^2 = a'^2 - b'^2,$$
$$a^2 - c^2 = a'^2 - c'^2;$$

les deux surfaces A, A′, auront leurs sections principales décrites des mêmes foyers; et il en sera de même des deux autres B, B′.

Supposons que les deux premières surfaces A, B, soient infiniment rapprochées l'une de l'autre, ce qui aura lieu si n diffère infiniment peu de l'unité; elles envelopperont une couche infiniment mince C, dont A sera la surface externe et B la surface interne. Les deux autres surfaces A′, B′, envelopperont pareillement une couche infiniment mince C′, dont A′ sera la paroi externe et B′ la paroi interne.

5. Remarquons que *les épaisseurs des deux couches, suivant un même axe principal, sont entre elles comme les demi-diamètres des surfaces externes dirigés suivant cet axe;* car a, a', étant ces deux demi-diamètres, ceux des deux surfaces internes seront na, na'; les

épaisseurs des deux couches sont donc

$$da = a - na, \quad da' = a' - na',$$

et leur rapport est

$$\frac{da}{da'} = \frac{a}{a'};$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

6. Soient S, S′, deux points fixes *correspondants* entre eux sur les deux surfaces externes A, A′; soient deux autres points *correspondants* m, m', sur ces mêmes surfaces, et soient dv, dv', les éléments de volume des deux couches en ces points m, m'; on aura, comme nous l'avons démontré ci-dessus,

$$\frac{dv}{dv'} = \frac{abc}{a'b'c'}.$$

Or on a

$$mS' = m'S \quad \text{n}^{\text{o}}\ \mathbf{2}\ ;$$

donc

$$\frac{dv}{mS'} : \frac{dv'}{m'S} = \frac{abc}{a'b'c'};$$

et, étendant les expressions $\frac{dv}{mS'}$, $\frac{dv'}{m'S}$, à toutes les molécules des deux couches, on a

$$\sum \frac{dv}{mS'} : \sum \frac{dv'}{m'S} = \frac{abc}{a'b'c'} = \textit{le rapport des volumes des deux couches} \text{ [*]}$$

Cette équation exprime une propriété géométrique des deux couches, qui va nous suffire, *seule*, pour résoudre toute la question de l'attraction des ellipsoïdes [**].

[*] Car $\frac{abc}{a'b'c'}$ exprime le rapport constant des volumes de deux molecules *correspondantes* quelconques (3), c'est donc aussi le rapport des volumes des deux couches elles-mêmes.

[**] Nous avons supposé que chacune des couches était comprise entre deux surfaces

7. On sait que les coefficients différentiels de la fonction $\sum \frac{dv}{mS'}$, pris par rapport aux coordonnées x, y, z, du point m, sont les composantes de l'attraction que la couche C exerce sur le point S′ [*]. Or si nous supposons que, des deux couches C, C′, la première soit

---

semblables et semblablement placées, parce que ce sont ces couches que nous allons considérer dans la suite; mais il est aisé de voir que le théorème a lieu pour deux couches infiniment minces dont les surfaces internes seraient de forme quelconque, pourvu qu'elles se correspondissent et que les deux surfaces externes fussent toujours deux ellipsoïdes décrits des mêmes foyers.

[*] En effet, l'attraction que la molécule dv, située en m, exerce sur le point S′, a pour expression $\frac{dv}{\overline{mS'}^2}$, et sa composante parallèle à l'axe des x est

$$\frac{dv}{\overline{mS'}^2} \cos(S'm, x).$$

Supposons que le point S′ soit déplacé de la quantité dx dans la direction de l'abscisse x; soit S la nouvelle position de ce point, et Sp la perpendiculaire abaissée de S sur mS′, on aura dans le triangle rectangle SpS′,

$$S'p = S'S \cos pS'S = - S'S \cos mS'S.$$

Or S′p est égal à la différence des deux rayons mS, mS′; c'est donc la différentielle de mS′. Mais S′S est égal à dx; on a donc

$$d.mS' = - dx.\cos(S'm, x) \; ; \quad \text{d'où} \quad \cos(S'm, x) = - \frac{d.mS'}{dx}.$$

La composante de l'attraction exercée par la molécule dv sur le point S′ devient donc

$$- \frac{dv}{\overline{mS'}^2} \cdot \frac{d.mS'}{dx}, \quad \text{ou} \quad dv.\frac{d\frac{1}{mS'}}{dx} :$$

l'enveloppante, le point S′ sera situé dans l'intérieur de sa paroi interne; conséquemment, d'après le théorème de Newton [*], ce point n'éprouvera aucune action de la part de cette couche. Les coefficients différentiels de la somme $\sum \frac{dv}{mS'}$, seront donc nuls; c'est-à-dire que cette somme est constante pour toutes les positions du point S′ dans l'intérieur de la paroi interne de la couche C [**]. Donc, d'après l'équation ci-dessus, la somme $\sum \frac{dv'}{m'S}$ a aussi une valeur constante pour toutes les positions correspondantes du point S, c'est-à-dire pour tous les points de la surface A. D'où résulte ce théorème :

Quand on a une couche infiniment mince, comprise entre deux surfaces ellipsoïdales concentriques, semblables et semblablement placées, la somme des molécules de cette couche, divisées par leurs distances respectives à un point pris en dehors de la surface externe, est constante pour toutes les positions de ce point sur un ellipsoïde ayant ses sections principales décrites des mêmes foyers que celles de la surface externe de la couche.

La valeur de cette somme a pour expression

$$\sum \frac{dv'}{m'S} = \frac{a'b'c'}{abc} \cdot \sum \frac{dv}{mS'}.$$

---

dv est indépendante de la coordonnée du point S′ sur laquelle porte la différentiation, on peut donc écrire

$$d.\frac{dv}{mS'}$$
$$dx$$

La composante de l'attraction totale du corps est donc

$$\sum \left(\frac{d.\frac{dv}{mS'}}{dx} \right), \quad \text{ou} \quad \frac{d \sum \frac{dv}{mS'}}{dx}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

[*] Voir la Note II, à la suite du Mémoire.
[**] Voir la Note III, *ibid.*

8. Concevons une autre couche C″ analogue à la couche C′, c'est-à-dire qui soit comprise entre deux surfaces A″, B″, semblables entre elles et ayant respectivement leurs sections principales décrites des mêmes foyers que celles des deux surfaces A, B; que cette couche soit aussi, comme C′, enveloppée par la première C. Soient a'', b'', c'', les demi-diamètres principaux de sa surface externe A″; et S″, m'', les points de cette surface qui *correspondent* aux points S et m de la surface A.

On aura

$$\sum \frac{dv''}{m''S} = \frac{a''b''c''}{abc} \sum \frac{dv}{mS''}.$$

Or nous avons dit que la fonction $\sum \frac{dv}{mS'}$ est constante pour toutes les positions du point S′ dans l'intérieur de la paroi interne de la couche C; le point S″ est une de ces positions : on a donc

$$\sum \frac{dv}{mS'} = \sum \frac{dv}{mS''}.$$

Les deux équations ci-dessus donnent donc

$$\frac{\sum \frac{dv'}{m'S}}{\sum \frac{dv''}{m''S}} = \frac{a'b'c'}{a''b''c''};$$

ce qui exprime ce théorème :

Quand on a deux couches ellipsoïdales infiniment minces, comprises chacune entre deux surfaces semblables et semblablement placées, et dont les surfaces externes ont leurs sections principales décrites des mêmes foyers, ainsi que leurs surfaces internes, si l'on fait la somme des molécules de chaque couche, divisées par leurs distances respectives à un même point extérieur aux deux couches, ces deux sommes seront entre elles comme les volumes des deux couches.

9. Ce théorème et le précédent expriment de simples propriétés géométriques des couches ellipsoïdales que nous avons considérées. Mais ils sont susceptibles d'autres expressions qui vont devenir des propriétés relatives aux attractions exercées par ces couches sur un même

point extérieur. Le premier fera connaître la direction de ces attractions, et le second le rapport de leurs intensités; d'où l'on conclura aisément la valeur absolue de ces attractions, et, par suite, la solution complète du problème de l'attraction d'un ellipsoïde.

10. Nous avons vu (**7**) que la somme $\sum \frac{dv'}{m'S}$ a une valeur constante pour toutes les positions du point S sur la surface A; cela prouve, comme on sait, que cette surface est normale à la direction de l'attraction que la couche C′ exerce sur le point S [*]. Le théorème du n° **7** exprime donc que :

L'attraction qu'une couche infiniment mince comprise entre deux ellipsoïdes semblables, concentriques et semblablement placés, exerce sur un point extérieur, est dirigée suivant la normale à l'ellipsoïde mené par ce point, de manière que ses sections principales aient les mêmes foyers que celles de la surface externe de la couche [**];

---

[*] La raison de cette proposition est bien simple. Nous avons vu (art. **7**, note 1re) que si l'on passe du point S à un point infiniment voisin s, l'expression $\frac{d.\sum \frac{dv'}{m'S}}{Ss}$ est la composante de l'attraction de la couche C′ sur le point S, estimée dans la direction de l'élément Ss. Or si cet élément est situé sur la surface A, on a

$$\sum \frac{dv'}{m'S} = \textit{constante}; \quad \text{d'où} \quad d.\sum \frac{dv'}{m'S} = 0;$$

par conséquent la composante de l'attraction suivant l'élément Ss est nulle. Cela a lieu pour toutes les directions de cet élément sur la surface A; il s'ensuit donc que l'attraction est dirigée suivant la normale à cette surface.

[**] M. Poisson a obtenu une autre expression de la direction de l'attraction de la couche, qu'il a trouvée coïncidante avec *l'axe du cône circonscrit à la couche, ayant son sommet au point attiré*. (Voir *Mémoires de l'Académie des Sciences*, T. XIII.) M. Steiner a donné de ce théorème une démonstration géométrique très simple, qui repose sur le théorème de Newton, c'est-à-dire sur la propriété dont jouit la couche, de n'exercer aucune action sur un point quelconque de l'espace compris dans sa paroi interne. Voir *Journal de Mathématiques* de M. Crelle, T. XII, page 112, année 1834.

Depuis j'ai démontré ce même théorème directement, c'est-à-dire sans faire usage de celui de Newton. Ma démonstration repose sur une proposition de Géométrie, démon-

Ou, en d'autres termes,

Les surfaces de niveau *relatives à l'attraction de la couche sont des ellipsoïdes ayant leurs sections principales décrites des mêmes foyers que celles de la surface externe de la couche.*

Il suit de là que cette surface externe est elle-même une *surface de niveau;* c'est-à-dire que *l'attraction que la couche exerce sur un point quelconque de sa surface externe est dirigée suivant la normale à cette surface.*

11. L'équation du n° **8** donne

$$\frac{d.\sum\frac{dv'}{m'S}}{dx} : \frac{d.\sum\frac{dv''}{m''S}}{dx} = \frac{a'b'c'}{a''b''c''}.$$

L'axe des x peut avoir ici une direction quelconque. Or les deux coefficients différentiels expriment, comme nous l'avons dit ci-dessus, les composantes, parallèles à cet axe, des attractions exercées par les deux couches C′ et C″ sur le point S; cette équation exprime donc le théorème suivant :

Quand deux couches ellipsoïdales infiniment minces, comprises chacune entre deux surfaces semblables, sont telles que leurs surfaces externes aient les mêmes foyers, ainsi que leurs surfaces internes, ces couches exercent sur un même point extérieur des attractions dont les composantes, suivant une même direction quelconque, sont entre elles comme les volumes des deux couches.

D'où il suit que :

Les attractions effectives des deux couches sur un même point extérieur ont la même direction et sont entre elles comme les masses des deux couches.

---

trée dans mon *Aperçu historique,* page 792. (Voir *Journal de l'École Polytechnique,* xxve cahier, page 269.)

Mais le théorème actuel a l'avantage de faire connaître les *surfaces de niveau* relatives à l'attraction de la couche, surfaces qu'on n'avait pas encore introduites dans la théorie de l'attraction, et dont la considération peut y être très utile. J'ai montré que ce théorème a aussi une application immédiate dans la théorie de l'électricité et dans celle de la chaleur, théories qui ont une grande analogie avec celle de l'attraction. (Voir *Journal de l'École Polytechnique,* xxve cahier.)

12. De ce théorème on passe, sans difficulté, au cas de deux couches d'épaisseur finie, ce qui comprend le cas de deux ellipsoïdes, et ce qui donne le théorème de Maclaurin dans toute sa généralité [*].

13. Il nous reste à déterminer l'attraction d'une couche sur un point extérieur. Nous connaissons, par le théorème du n° **10**, la direction de cette attraction : le calcul de son intensité se ramène, par le théorème précédent, au cas d'une autre couche dont la surface externe passerait par le point attiré.

Pour ce cas nous pourrions invoquer un théorème général de Laplace, qui consiste en ce que : *quand une couche infiniment mince, de forme quelconque, n'exerce aucune action sur les points situés dans l'intérieur de sa paroi interne, l'attraction de la couche sur un point* S *de*

---

[*] Soient A, A′, deux ellipsoïdes dont les sections principales ont les mêmes foyers; considérons-les comme composés de couches infiniment minces, comprises chacune entre deux surfaces semblables. Soient a, b, c, et a', b', c', les demi-diamètres principaux de ces deux surfaces; les demi-diamètres de la surface externe d'une couche du premier ellipsoïde seront na, nb, nc, et ceux de la surface externe d'une couche du second ellipsoïde na', nb', nc'. Il est évident que si l'on suppose à la variable n la même valeur par rapport aux deux couches, celles-ci auront leurs sections principales décrites des mêmes foyers; leurs attractions sur un même point extérieur auront donc la même direction et seront entre elles dans le rapport constant $\frac{abc}{a'b'c'}$. Conséquemment les composantes de ces attractions, suivant un même axe, seront entre elles dans ce même rapport. Donc la somme des composantes des attractions d'un certain nombre de couches consécutives du premier ellipsoïde, sera à la somme des composantes des attractions des couches correspondantes du second ellipsoïde, dans ce même rapport; d'où l'on conclut que les attractions totales des volumes formés par les couches considérées dans les deux ellipsoïdes, ont la même direction et sont entre elles dans le rapport $\frac{abc}{a'b'c'}$. Or ces volumes ont pour parois internes des ellipsoïdes semblables aux deux proposés, et dont les demi-diamètres principaux ont leurs valeurs égales à na, nb, nc, et na', nb', nc'. Les épaisseurs de ces deux couches, suivant l'axe a, sont $a(1-n)$ et $a'(1-n)$, et elles ont pour rapport $\frac{a}{a'}$. Les volumes des deux couches sont entre eux dans le rapport $\frac{abc}{a'b'c'}$, puisque les volumes des couches élémentaires correspondantes sont eux mêmes dans ce rapport. On conclut donc ce théorème :

Quand on a deux couches d'épaisseur finie, comprises chacune entre deux

sa surface externe est dirigée suivant la normale SA *en ce point, et a pour expression* $4\pi\rho\varepsilon$, ρ *étant la densité de la couche, et* ε *son épaisseur au point attiré* [*].

Mais le calcul direct de l'attraction d'une couche ellipsoïdale est tellement simple, que nous n'avons pas besoin de recourir à ce théorème général.

Concevons que le point S, situé sur la surface externe de la couche, soit le sommet d'un cône, et que ce cône intercepte sur une sphère décrite de son sommet comme centre, avec un rayon égal à l'unité, un élément superficiel σ ayant des dimensions infiniment petites par rapport à ε. Pour une sphère de rayon r la surface interceptée sera $r^2\sigma$: par suite la portion de couche comprise dans le cône en question peut être décomposée en une infinité d'éléments $r^2\sigma dr$, qui donnent lieu à des forces $\rho\sigma dr$ dont on obtiendra la somme ou la résultante en intégrant dr entre des limites convenables. Soient m, n, n', les points où l'une des arêtes du cône rencontre les deux parois externe et interne de la couche. L'intégration effectuée depuis le point S jusqu'au point n, et depuis le point n' jusqu'au point m, donnera

$$\rho\sigma\,(\mathrm{S}n + mn'),$$

c'est-à-dire

$$2\rho.\mathrm{S}n.\sigma,$$

puisque dans l'ellipsoïde $mn' = \mathrm{S}n$.

Concevons la normale à la couche au point S; soit A le point où

---

soïdes semblables, si les ellipsoïdes qui forment les surfaces externes des deux couches ont les mêmes foyers, et si les épaisseurs des deux couches, suivant un même axe principal, sont entre elles dans le rapport des deux demi-diamètres des surfaces externes dirigés suivant cet axe (auquel cas les surfaces internes ont les mêmes foyers), les attractions que ces deux couches exerceront sur un même point extérieur auront la même direction et seront entre elles comme les masses des deux couches.

Le théorème de Maclaurin est un cas particulier de cette proposition générale.

Réciproquement, on peut conclure de ce théorème, par le seul principe de la composition des forces, qu'il s'applique à deux couches telles que nous venons de les définir. (Voir le *Rapport* de M. Poinsot dans les *Comptes rendus de l'Académie*, T. VI, p. 810.)

[*] Voir le *Mémoire sur la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs*, par M. Poisson; *Mémoires de l'Institut*, année 1811, Ire partie, pages 5 et 31.

elle rencontre la surface interne : à cause de la petitesse de SA, on aura

$$SA = Sn.\cos nSA.$$

L'expression de l'attraction devient dès lors

$$2.\rho\frac{SA.\sigma}{\cos nSA};$$

et la composante de cette attraction, suivant la normale, est

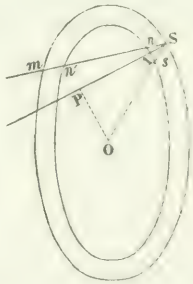
$$2\rho.SA.\sigma.$$

Pour avoir la composante de l'attraction totale de la couche, laquelle sera l'attraction effective, d'après le théorème du n° **10**, il faut prendre l'intégrale de cette expression par rapport à σ, étendue à la demi-sphère; cette intégrale est 2π. On a donc

$$4\pi\rho.SA$$

pour l'attraction totale exercée par la couche sur le point S; SA est l'épaisseur de la couche, ce qui s'accorde avec le théorème général de Laplace.

A cette épaisseur SA nous substituerons une autre expression plus commode.



Du centre O de la couche abaissons la perpendiculaire OP sur la normale SA; on aura, par la comparaison des deux triangles rectangles

SPO, SAs,

$$\frac{SA}{PS} = \frac{Ss}{SO};$$

mais les deux surfaces de la couche étant semblables et semblablement placées, le rapport $\frac{Ss}{SO}$ est constant, quel que soit le demi-diamètre OS; on a donc, en appelant a_1, b_1, c_1, les demi-diamètres principaux de la surface externe,

$$\frac{SA}{SP} = \frac{da_1}{a_1}.$$

L'expression de l'attraction de cette couche prend donc cette forme

$$4\pi\rho.\frac{da_1}{a_1}\,SP.$$

14. Supposons qu'on ait une seconde couche infiniment mince, comprise, comme la première, entre deux surfaces semblables et semblablement placées, et ayant, respectivement, les mêmes foyers que les deux surfaces externe et interne de la première couche, comme dans le théorème du n° **7**, et supposons cette seconde couche intérieure à la première, pour que le point S soit en dehors. L'attraction exercée par cette seconde couche sur le point S aura la même direction que l'attraction exercée par la première; et ces attractions seront entre elles comme les deux produits abc, $a_1b_1c_1$; a, b, c, étant les trois demi-diamètres principaux de la nouvelle couche. L'attraction exercée par cette couche est donc

$$4\pi\rho\,\frac{da_1}{a_1}\,\frac{abc}{a_1b_1c_1}.SP.$$

Mais on a, comme nous l'avons dit (n° **5**), $\frac{da_1}{a_1} = \frac{da}{a}$; il vient donc

$$4\pi\rho\,\frac{da}{a}.\frac{abc}{a_1b_1c_1}.SP.$$

Telle est l'expression de l'attraction qu'une couche ellipsoïdale infiniment mince, comprise entre deux surfaces semblables, concentriques et semblablement placées, exerce sur un point extérieur : a, b, c, sont les demi-diamètres principaux de la surface externe de la couche,

et a_1, b_1, c_1, les demi-diamètres principaux d'un ellipsoïde auxiliaire mené par le point attiré et ayant les mêmes foyers que la surface externe de la couche.

15. Maintenant, pour calculer l'attraction d'un ellipsoïde, nous le considérerons comme composé de couches infiniment minces, comprises chacune entre deux surfaces semblables. Nous prendrons les composantes, suivant trois axes fixes, de l'attraction exercée sur le point S par l'une de ces couches; et les intégrales des expressions de ces composantes seront les composantes de l'attraction totale de l'ellipsoïde.

Prenons pour les trois axes fixes les axes principaux de l'ellipsoïde proposé, lesquels seront aussi les axes principaux de chacune des couches élémentaires. Soient x, y, z, les coordonnées du point attiré S, rapportées à ces trois axes. L'attraction exercée sur ce point par une couche dont a, b, c, sont les trois demi-diamètres de la surface externe, est l'expression ci-dessus. Cette attraction est dirigée suivant la normale en S à l'ellipsoïde auxiliaire dont a_1, b_1, c_1, sont les demi-diamètres. Pour avoir ses composantes parallèles aux trois axes coordonnés, il suffit donc de connaître les angles que cette normale fait avec ces axes. Or, le plan tangent à l'ellipsoïde auxiliaire, au point S, rencontre l'axe des x à une distance du centre qui est égale à $\frac{a_1^2}{x}$. La perpendiculaire abaissée du centre sur ce plan tangent est égale à la ligne SP; on a donc, en appelant e l'angle que cette perpendiculaire fait avec l'axe des x,

$$\mathrm{SP} = \frac{a_1^2}{x}\cos e; \quad \text{d'où} \quad \cos e = \frac{\mathrm{SP}.x}{a_1^2}.$$

Par conséquent la composante de l'attraction de la couche sur le point S, parallèle à l'axe des x, est

$$4\pi\rho.\frac{da}{a}.\frac{abc}{a_1b_1c_1}\frac{\overline{\mathrm{SP}}^2}{a_1^2}.x;$$

et la composante de l'attraction de l'ellipsoïde sera l'intégrale de cette expression, prise depuis $a = 0$ jusqu'à $a =$ le demi-axe majeur de l'ellipsoïde.

Or il faut observer qu'il n'y a que a de variable indépendante dans

cette expression; car les autres quantités b, c, a_1, b_1, c_1 et SP, dépendent de la valeur de a; il faut donc exprimer toutes ces variables en fonction d'une seule.

Soient A, B, C, les trois demi-diamètres principaux de l'ellipsoïde proposé; la surface externe de la couche qu'on considère étant semblable à cet ellipsoïde, on a

$$b = a\frac{B}{A}, \quad c = a\frac{C}{A}.$$

L'ellipsoïde auxiliaire passe par le point S dont les coordonnées sont x, y, z; on a donc l'équation de condition

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} + \frac{z^2}{c_1^2} = 1.$$

Or cet ellipsoïde a ses sections principales décrites des mêmes foyers que celles de la surface externe de la couche; on a donc les deux relations

$$b_1^2 - a_1^2 = b^2 - a^2, \quad c_1^2 - a_1^2 = c^2 - a^2,$$

ou

$$b_1^2 = a_1^2 + a^2\left(\frac{B^2}{A^2} - 1\right), \quad c_1^2 = a_1^2 + a^2\left(\frac{C^2}{A^2} - 1\right);$$

et la condition ci-dessus devient

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_1^2 + a^2\left(\frac{B^2}{A^2} - 1\right)} + \frac{z^2}{a_1^2 + a^2\left(\frac{C^2}{A^2} - 1\right)} = 1.$$

Cette équation établit la relation qui a lieu en a_1 et a.

Enfin la ligne SP est égale à la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent en S à l'ellipsoïde auxiliaire; on a donc, comme on sait,

$$\frac{1}{\overline{SP}^2} = \frac{x^2}{a_1^4} + \frac{y^2}{b_1^4} + \frac{z^2}{c_1^4},$$

ou

$$\frac{1}{\overline{SP}^2} = \frac{x^2}{a_1^4} + \frac{y^2}{\left[a_1^2 + a^2\left(\frac{B^2}{A^2} - 1\right)\right]^2} + \frac{z^2}{\left[a_1^2 + a^2\left(\frac{C^2}{A^2} - 1\right)\right]^2}.$$

Ainsi nous connaissons les six relations qui ont lieu entre les sept variables a, b, c, a_1, b_1, c_1, SP.

Pour exprimer toutes ces variables en fonction d'une seule, nous prendrons pour celle-ci le rapport $\frac{a}{a_1}$: faisons donc $\frac{a}{a_1} = u$; la relation ci-dessus, entre a_1 et a, devient, par l'élimination de $a_1 = \frac{a}{u}$,

$$u^2 x^2 + \frac{y^2}{\frac{1}{u^2} - \frac{B^2}{A^2} - 1} + \frac{z^2}{\frac{1}{u^2} - \frac{C^2}{A^2} - 1} = a^2.$$

Différentiant par rapport à u et à a, et mettant $\frac{1}{\overline{SP}^2}$ à la place de l'expression qui lui est égale, on a

$$\frac{a^3}{u^3} \frac{1}{\overline{SP}^2} du = da; \quad \text{d'où} \quad \frac{\overline{SP}^2}{a^2} \cdot \frac{da}{a} = \frac{du}{u}.$$

D'après cela, l'expression de la composante de l'attraction de la couche élémentaire devient

$$4\pi\rho x \frac{bc}{b_1 c_1} du.$$

ou, en mettant à la place de b, c, b_1, c_1, leurs valeurs données ci-dessus,

$$4\pi\rho x BC \frac{u^2 du}{\sqrt{A^2 - u^2 B^2 - A^2}\sqrt{A^2 - u^2 C^2 - A^2}}.$$

C'est cette expression qu'il faut intégrer pour avoir la composante de l'attraction de l'ellipsoïde. Les limites de l'intégrale doivent répondre aux valeurs $u = 0$, $u = A$; or on a $u = \frac{a}{a_1}$: elles seront donc $u = 0$ et $u = \frac{A}{A_1}$, A_1 étant le demi-axe majeur de l'ellipsoïde décrit des mêmes foyers que l'ellipsoïde attirant et mené par le point attiré. Ce demi-axe A_1 sera déterminé par l'équation

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_1^2 - B_1^2 - A^2} + \frac{z^2}{A_1^2 - C_1^2 - A^2} = 1$$

Ainsi la composante, parallèle à l'axe des x, de l'attraction de l'ellipsoïde, supposé homogène, est

$$4\pi\rho x \mathrm{BC} \int_0^{\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{A}_1}} \frac{u^2 du}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + u^2(\mathrm{B}^2 - \mathrm{A}^2)}\sqrt{\mathrm{A}^2 + u^2(\mathrm{C}^2 - \mathrm{A}^2)}}.$$

La valeur de A_1, d'où dépend la limite de l'intégrale, sera la plus grande racine de l'équation ci-dessus, parce que les deux autres racines seront les demi-axes majeurs des deux hyperboloïdes, à une et à deux nappes, qui passent par le point attiré et qui sont décrits des mêmes foyers que l'ellipsoïde mené par ce point, lesquels demi-axes sont évidemment plus petits que celui de l'ellipsoïde [*].

On aura des expressions semblables à la précédente pour les composantes de l'attraction de l'ellipsoïde, parallèles aux axes des y et des z : je les omets ici pour abréger.

16. Je passe au cas de l'ellipsoïde hétérogène, en supposant que chacune de ses couches élémentaires soit de même densité dans toute son étendue, et que cette densité soit une fonction du demi-axe majeur de la couche divisé par le demi-axe majeur de l'ellipsoïde; de sorte qu'on aura

$$\rho = \mathrm{F}\left(\frac{a}{\mathrm{A}}\right).$$

Or l'équation ci-dessus, d'où dépend la valeur particulière de u correspondante à la couche, donne l'expression suivante du rapport $\frac{a}{\mathrm{A}}$ en fonction de u,

$$\frac{a^2}{\mathrm{A}^2} = u^2\left[\frac{x^2}{\mathrm{A}^2} + \frac{y^2}{\mathrm{A}^2 + u^2(\mathrm{B}^2 - \mathrm{A}^2)} + \frac{z^2}{\mathrm{A}^2 + u^2(\mathrm{C}^2 + \mathrm{A}^2)}\right];$$

---

[*] Car le plan diamétral qui contient l'axe majeur et l'axe imaginaire de l'hyperboloïde à une nappe, coupe l'ellipsoïde suivant une ellipse et les deux hyperboloïdes suivant deux hyperboles qui ont les mêmes foyers que l'ellipse; conséquemment les axes réels de ces deux courbes sont plus petits que celui de l'ellipse : or ces trois axes sont précisément ceux des trois surfaces; donc, etc.

on aura donc

$$\rho = F\left\{u\left[\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2 + u^2(B^2 - A^2)} + \frac{z^2}{A^2 + u^2(C^2 - A^2)}\right]^{-}\right\};$$

et la composante de l'attraction de l'ellipsoïde, parallèle à l'axe des x, sera

$$4\pi BC.x \int_0^{\frac{A}{A_1}} \frac{F\left\{u\left[\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2 + u^2(B^2 - A^2)} + \frac{z^2}{A^2 + u^2(C^2 - A^2)}\right]^{-}\right\} u^2 du}{\sqrt{A^2 + u^2(B^2 - A^2)}\sqrt{A^2 + u^2(C^2 - A^2)}}.$$

Si l'on suppose la densité de chaque couche en raison inverse du rapport $\frac{a}{A}$, hypothèse que plusieurs géomètres ont faite au sujet de la masse de la Terre, cette intégrale s'obtiendra en termes finis. Il en sera de même pour diverses autres suppositions sur la forme de la fonction F.

17. On voit que l'intégrale ne contenant le coefficient A_1 que dans la limite supérieure, et non dans la partie à intégrer, on aura immédiatement la formule relative à l'attraction d'une couche d'une épaisseur finie, comprise entre deux ellipsoïdes semblables et semblablement placés. Cette formule sera

$$4\pi BC.x \int_{\frac{a}{A}}^{\frac{A}{A}} \frac{F\left\{u\left[\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2 + u^2(B^2 - A^2)} + \frac{z^2}{A^2 + u^2(C^2 - A^2)}\right]^{-}\right\} u^2 du}{\sqrt{A^2 + u^2(B^2 - A^2)}\sqrt{A^2 + u^2(C^2 - A^2)}}.$$

A_1 et a_1 sont les demi-axes majeurs des deux ellipsoïdes menés par le point attiré, dont le premier a les mêmes foyers que la surface externe de la couche, et dont le deuxième a les mêmes foyers que sa surface interne, celle-ci ayant son demi-axe majeur égal à a.

Pour donner à cette formule la forme sous laquelle on présente ordinairement l'attraction d'un ellipsoïde homogène, où le coefficient A_1 entre dans l'expression à intégrer, on fera $u = \frac{A}{A_1} v$, et il

viendra

$$4 \cdot \frac{ABC}{A_1} x \int_{\frac{a}{a_1}\frac{A_1}{A}}^{1} \frac{F\left\{v\left[\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_1^2 + v^2(B^2 - A^2)} + \frac{z^2}{A_1^2 + v^2(C^2 - A^2)}\right]^{\frac{1}{2}}\right\} v^2 dv}{\sqrt{A_1^2 + v^2(B^2 - A^2)}\sqrt{A_1^2 + v^2(C^2 - A^2)}}.$$

Dans mon premier Mémoire je suis entré dans d'autres détails qu'il est inutile de reproduire ici, la question de l'attraction d'un ellipsoïde hétérogène sur un point extérieur se trouvant résolue complétement.

NOTES.

NOTE PREMIERE.

Soient les équations des deux ellipsoïdes

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} + \frac{z'^2}{c'^2} = 1$$

Soient x, y, z, et ξ, η, ζ, les coordonnées des deux points m et S, situés sur le premier ellipsoïde, et x', y', z', et ξ', η', ζ', celles des deux points *correspondants* m et S′ du second ellipsoïde, on aura

$$\frac{x}{x'} = \frac{a}{a'}, \quad \frac{y}{y'} = \frac{b}{b'}, \quad \frac{z}{z'} = \frac{c}{c'},$$

$$\frac{\xi}{\xi'} = \frac{a}{a'}, \quad \frac{\eta}{\eta'} = \frac{b}{b'}, \quad \frac{\zeta}{\zeta'} = \frac{c}{c'}.$$

Il faut prouver que $Sm' = S'm$.

Or on a

$$\overline{Sm'}^2 = (\xi - x')^2 + (\eta - y')^2 + (\zeta - z')^2,$$

$$\overline{S'm}^2 = (\xi' - x)^2 + (\eta' - y)^2 + (\zeta' - z)^2;$$

ou

$$\overline{Sm'}^2 = \left(\xi - x\frac{a'}{a}\right)^2 + \left(\eta - y\frac{b'}{b}\right)^2 + \left(\zeta - z\frac{c'}{c}\right)^2,$$

$$\overline{S'm}^2 = \left(\xi\frac{a'}{a} - x\right)^2 + \left(\eta\frac{b'}{b} - y\right)^2 + \left(\zeta\frac{c'}{c} - z\right)^2;$$

d'où

$$\overline{Sm'}^2 - \overline{S'm}^2 = \left(\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2}\right)(a^2 - a'^2) + \left(\frac{\eta^2}{b^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)(b^2 - b'^2) + \left(\frac{\zeta^2}{c^2} - \frac{z^2}{c^2}\right)(c^2 - c'^2)$$

Mais on a

$$a^2 - a'^2 = b^2 - b'^2 = c^2 - c'^2;$$

donc

$$\overline{Sm'}^2 - \overline{S'm}^2 = (a^2 - a'^2)\left[\left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2}\right) - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)\right].$$

Les deux points S et m étant situés sur la surface du premier ellipsoïde, on a

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1,$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Donc

$$\overline{Sm'}^2 - \overline{Sm}^2 = 0,$$

et

$$Sm' = S'm.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Autrement. Les relations entre les coordonnées des quatre points m, m', S et S', donnent

$$x'\xi = x\xi', \quad y'\eta = y\eta', \quad z'\zeta = z\zeta',$$

donc

$$x'\xi + y'\eta + z'\zeta = x\xi' + y\eta' + z\zeta';$$

ou, en appelant O le centre commun des deux ellipsoïdes,

$$OS.Om'.\cos SOm' = OS'.Om.\cos S'Om,$$

ou

$$\frac{Om.\cos mOS'}{Om'.\cos m'OS} = \frac{OS}{OS'}.$$

Le second membre est constant, quels que soient les deux points *correspondants* m, m'. Cette équation exprime donc une propriété générale de deux points correspondants quelconques S, S', sur les deux surfaces.

On a

$$\overline{Om}^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$
$$\overline{Om'}^2 = x^2\frac{a'^2}{a^2} + y^2\frac{b'^2}{b^2} + z^2\frac{c'^2}{c^2};$$

d'où

$$\overline{Om}^2 - \overline{Om'}^2 = \frac{x^2}{a^2}(a^2 - a'^2) + \frac{y^2}{b^2}(b^2 - b'^2) + \frac{z^2}{c^2}(c^2 - c'^2),$$

ou

$$\overline{Om}^2 - \overline{Om'}^2 = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)(a^2 - a'^2) = a^2 - a'^2.$$

C'est-à-dire que : *la différence des carrés de deux demi-diamètres correspondants est constante.*

On a dans les deux triangles SOm', $S'Om$,

$$\overline{Sm'}^2 = \overline{OS}^2 + \overline{Om'}^2 - 2.OS.Om'\cos SOm',$$
$$\overline{S'm}^2 = \overline{OS'}^2 + \overline{Om}^2 - 2.OS'.Om.\cos S'Om;$$

d'où

$$\overline{Sm'}^2 - \overline{S'm}^2 = \left(\overline{OS}^2 - \overline{OS'}^2\right) - \left(\overline{Om}^2 - \overline{Om'}^2\right) - 2\,OS.Om'\cos SOm' - OS'.Om\cos S'Om.$$

Le second membre, d'après les deux propositions qui viennent d'être démontrées, est identiquement nul; on a donc

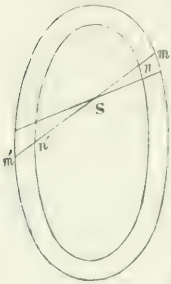
$$Sm' = S'm. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Cette démonstration est peut-être un peu moins directe que la première, mais elle a l'avantage de faire connaître, en passant, deux propriétés générales des ellipsoïdes décrits des mêmes foyers.

NOTE DEUXIÈME.

Voici la démonstration du théorème de Newton :

Concevons un cône d'une ouverture infiniment petite, ayant son sommet au point attiré S. Il interceptera dans la couche ellipsoïdale deux portions de volume v, v', en m et m', où l'une de ses arêtes rencontre la surface externe de la couche. Soient n et n' les points où cette même arête rencontre la surface interne. Concevons deux sphères décrites du point S comme centre avec les rayons Sm, Sn : le volume intercepté en m, par le petit cône, dans la couche formée par ces deux sphères, différera infiniment peu du volume v, et pourra être pris pour celui-ci. Appelons σ la surface que le petit cône intercepterait sur une surface sphérique décrite de son sommet comme centre, avec un rayon égal à l'unité, les surfaces qu'il intercepte sur les deux premières sphères seront égales respectivement à σSm et σSn. Le volume compris dans le cône, entre ces deux surfaces, aura donc pour expression



$$\frac{1}{3}\left(\overline{Sm}^3 - \overline{Sn}^3\right)\sigma = \frac{1}{3}\sigma\left[\overline{Sm}^3 - \overline{Sm - mn}^3\right] = Sm.mn.\sigma,$$

en négligeant les infiniment petits du deuxième et du troisième ordre. Ainsi l'on a

$$v = Sm.mn.\sigma.$$

L'attraction exercée par ce volume sur le point S a donc pour expression

$$\frac{v}{Sm} = mn.\sigma.$$

L'attraction exercée sur le point S par le second volume v' a de même pour expression

$$\frac{v'}{Sm'} = m'n'.\sigma$$

Or les deux ellipsoïdes étant semblables, concentriques et semblablement placés, les deux lignes mn, $m'n'$, comprises sur une même sécante, sont égales. Les attractions exercées sur le point S par les deux volumes v, v', sont donc égales. Mais elles sont dirigées en sens contraire; elles se détruisent donc, c'est-à-dire que les deux volumes compris dans le petit cône n'exercent aucune action sur le point S. D'où l'on conclut que la couche entière comprise entre les deux ellipsoïdes n'exerce aucune attraction sur un point situé dans l'intérieur de sa paroi interne. C'est le théorème de Newton.

NOTE TROISIÈME.

On peut démontrer directement, sans s'appuyer sur le théorème de Newton, que l'expression $\sum \frac{dv}{mS'}$ est constante pour toutes les positions du point S′ dans l'intérieur de la paroi interne de la couche.

Pour cela, concevons le petit cône, comme dans la Note précédente : on aura

$$\frac{dv}{S'm} = \frac{dv'}{S'm'}.$$

Mais si l'on suppose que le point S′ soit déplacé et transporté dans une position infiniment voisine de S′, on aura

$$d.S'm = -d.S'm',$$

parce que chacune de ces deux expressions est la projection orthogonale, sur la corde mm', de l'élément rectiligne décrit par le point S′, cette projection devant être prise avec le signe + dans un cas, et le signe — dans l'autre.

On a donc

$$d.\frac{dv}{S'm} + d.\frac{dv'}{S'm'} = 0,$$

ou

$$d\left(\frac{dv}{S'm} + \frac{dv'}{S'm'}\right) = 0.$$

Et conséquemment

$$d.\sum \frac{dv}{S'm} = 0, \quad \text{et} \quad \sum \frac{dv}{S'm} = \textit{constante}. \quad \text{C. Q. F. D}$$

TABLES DES MATIÈRES

CONTENUES DANS LES TOMES 1, 2, 3, 4 ET 5,

SUIVIES D'UNE TABLE GÉNÉRALE

PAR

NOMS D'AUTEURS.

TOME I (Année 1836).

Pages.

Avertissement 1

Note sur un moyen de tracer des courbes données par des équations différentielles; par M. *Coriolis* 5

Note sur les rapports qui existent entre la théorie des équations algébriques et la théorie des équations linéaires aux différentielles et aux différences; par M. *Libri*. 10

Mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries de sinus et de cosinus; par *J. Liouville* 14

Mémoire sur une question d'analyse aux différences partielles, par *le même* 33

Note sur la chaînette d'égale résistance; par M. *Coriolis* 75

Note sur l'équilibre des températures dans les corps solides de forme cylindrique; par M. *Lamé* 77

Note sur une méthode d'élimination pour certaines classes d'équations différentielles linéaires; par M. *Pierre Bellin* 88

Mémoire sur les rapports et les restes des quantités incommensurables, par M. *Léger* 93

Note sur une manière de généraliser la formule de Fourier; par *J. Liouville* 106

Mémoire sur les équations différentielles linéaires du second ordre, par M. *Sturm* .. 106

Sur les surfaces du second degré qui n'ont pas de foyer, par M. *Chasles* 127

Note sur les rayons de courbure des sections coniques; par M. *Transon* 191

Formule pour la transformation d'une classe d'intégrales définies; par M. *Jacobi* 195

Note sur le calcul des inégalités périodiques du mouvement des planètes, par *J. Liouville* 197

Mémoire sur les équations générales du mouvement; par M. *Ampère* 211

Énumération des courbes du quatrième ordre, d'après la nature différente de leurs branches infinies; par M. *Plucker* 229

Mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre, contenant un paramètre variable; par *J. Liouville* 253

Théorème sur les quantités incommensurables, par M. *Lebesgue* ..... *id.*

Démonstration d'un théorème dû à M. Sturm, et relatif à une classe de fonctions transcendantes, par *J. Liouville* 264

Démonstration d'un théorème de M. Cauchy relatif aux racines imaginaires des équations, par MM. *Sturm* et *J. Liouville* 278

Autres démonstrations du même théorème; par M. *Sturm* ..... 29[illegible]

Théorie nouvelle du mouvement d'un corps solide, autour d'un point fixe; par M. *St. Guilhem* ..... 30[illegible]

Note relative à la détermination des plans principaux, d'une surface du second degré, rapportée à trois axes quelconques; par *le même* ..... 3[illegible]

Géométrie. Analogie entre des propositions de Géométrie plane et de Géométrie [illegible]

Pages.

trois dimensions.—Géométrie de la sphère. — Hyperboloïde à une nappe; par M. *Chasles*. 324

Démonstration du parallélogramme des forces; par M. *Aimé*..... 335

Integration de l'equation

$$\frac{d^{\frac{p}{q}}y}{dx^{\frac{p}{q}}} + P\frac{d^m y}{dx^m} + Q\frac{d^n y}{dx^n} + \text{etc.} = V,$$

dans laquelle on suppose p, q, m, n, etc., des nombres entiers, P, Q, etc., des coefficients constants, et V une fonction quelconque de la variable indépendante x; par M. *Favre-Rollin*..... 339

Note sur la résolution des équations numériques; par M. *Vincent*..... 341

Mémoire sur une classe d'équations à différences partielles; par M. *Sturm* 373

Mémoire sur un nouvel usage des fonctions elliptiques dans les problèmes de Mécanique celeste; par *J. Liouville*..... 445

TOME II (Année 1837).

Pages.

Solution d'un problème d'analyse; par *J. Liouville*..... 1

Solution d'une question qui se présente dans le calcul des probabilités; par M. *Mondésir*..... 3

Note sur les points singuliers des courbes; par M. *Plucker*..... 11

Second Mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujétis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre, contenant un paramètre variable; par *J. Liouville*..... 16

Extrait d'une lettre de M. *Terquem* à M. *J. Liouville*..... 36

Note sur les équations indéterminées du second degré. — Formules d'Euler pour la résolution de l'equation $Cx^2 \pm A = y^2$. — Leur identité avec celles des algébristes indiens et arabes. — Démonstration géométrique de ces formules; par M. *Chasles*. 37

Mémoire sur la classification des transcendantes, et sur l'impossibilité d'exprimer les racines de certaines équations en fonction finie explicite des coefficients; par *J. Liouville*..... 56

Sur le développement de $(1-2xz+z^2)^{-\frac{1}{2}}$; par MM. *Ivory* et *Jacobi*..... 105

Sur la sommation d'une série; par *J. Liouville* 107

Mémoire sur une méthode générale d'évaluer le travail dû au frottement entre les pièces des machines qui se meuvent ensemble en se pressant mutuellement. — Application aux engrenages coniques, cylindriques, et à la vis sans fin; par M. *Combes*..... 109

Note sur une manière simple de calculer la pression produite par les parois d'un canal dans lequel se met un fluide incompressible; par M. *Coriolis*..... 130

Sur la mesure de la surface convexe d'un prisme ou d'un cylindre tronqué; par M. *Paul Breton*..... 133

Note sur le développement de $(1-2xz+z^2)^{-\frac{1}{2}}$. par *J. Liouville*..... 135

Note sur un passage de la seconde partie de la Théorie des Fonctions analytiques; par M. *Poisson*..... 140

Mémoire sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en équilibre de température; par M. *Lamé*..... 147

Note de M. *Poisson* relative au Mémoire precedent..... 184

Addition à la Note de M. *Poisson* insérée dans le numero precédent de ce Journal. par l'auteur..... 189

Mémoire sur l'interpolation; par M. *Cauchy*. 193

Note sur un passage de la *Mécanique céleste* relatif à la théorie de la figure des planètes; par *J. Liouville*..... 206

Extrait d'un Mémoire sur le développement des fonctions en séries dont les différents termes sont assujétis à satisfaire à une même équation différentielle linéaire, contenant un paramètre variable; par MM. *Sturm* et *Liouville*..... 220

Remarques sur les intégrales des fractions rationnelles; par M. *Poisson*..... 224

Mémoire sur le degré d'approximation qu'on

Pages

obtient pour les valeurs numériques d'une variable qui satisfait à une équation différentielle, en employant, pour calculer ces valeurs, diverses équations aux différences plus ou moins approchées; par M. *Cordier*. 229

Sur une lettre de d'Alembert à Lagrange; par J. *Liouville*. 245

Observations sur des théorèmes de Géométrie énoncés, page 160 de ce volume et page 222 du volume précédent, par M. *Binet*. 258

Recherches sur les nombres; par M. *Lebesgue*. 263

Note sur un cas particulier de la construction des tangentes aux projections des courbes, pour lequel les méthodes générales sont en défaut; par M. *Chasles*. 263

Théorèmes sur les contacts des lignes et des surfaces courbes, par M. *Chasles*. 299

Note relative à un passage de la *Mécanique céleste*; par M. *Poisson*. 310

Remarques sur l'intégration des équations différentielles de la Dynamique; par M. *Poisson*. 317

Thèses de Mécanique et d'Astronomie; par M. *Lebesgue*. 337

Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas, par M. *Wantzel*. 366

Solution d'un problème de probabilité; par M. *Poisson*. 373

Mémoire sur les diverses manières de généraliser les propriétés des diamètres conjugués dans les sections coniques. — Nouveaux théorèmes de Perspective pour la transformation des relations métriques des figures. — Principes de Géométrie plane analogues à ceux de la Perspective, démontrés de démontrer, dans le cas où ils existent, les propriétés des foyers des sections coniques; par M. *Chasles*. 388

Note sur la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de Mécanique; par M. *Cauchy*. 406

Sur quelques propriétés générales des surfaces gauches, par M. *Chasles*. 413

Troisième Mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre, contenant un paramètre variable, par J. *Liouville*. 418

Note sur une propriété des sections coniques; par M. *Page*. 43[illegible]

Solution nouvelle d'un problème d'analyse relatif aux phénomènes thermo-mécaniques, par J. *Liouville*. 4[illegible]

Note sur l'intégration d'un système d'équations différentielles du second ordre, entre un nombre quelconque de variables, analogues à celles du mouvement d'un point libre autour d'un centre fixe, sollicité par une force fonction de la distance au centre; par M. *Binet*. 4[illegible]

Solution d'un problème de probabilité relatif au jeu de rencontre, par M. *Catalan*. 4[illegible]

Sur la formule de Taylor; par J. *Liouville*. 483

TOME III (ANNÉE 1838).

Pages

Sur les deux derniers cahiers du journal de M. Crelle; par J. *Liouville*. 1

Note sur les limites de la série de Taylor; par M. *Poisson*. 4

Démonstration géométrique de la formule intégrale

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta\,\sin\theta'\,d\theta\,d\theta'}{b\sqrt{(a^2-c^2\cos^2\theta)(b^2-c^2\cos^2\theta')}} = \frac{\pi}{c}\log\frac{a+b}{a-b},$$

par M. *Chasles*. 10

Sur les lignes conjointes dans les coniques; par M. *Terquem*. 17

Nouvelles recherches sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique; par J. *Liouville*. 21

Solution d'une question relative à la probabilité des jugements rendus à une majorité quelconque, par Ad. *Quetelet*. 2[illegible]

Sur l'intégration d'une classe d'équations différentielles, par J. *Liouville*. [illegible]

Extrait d'une Thèse sur le mouvement des corps flottants de forme quelconque, par M. *Maize*. [illegible]

Sur le calcul des variations et sur la théorie

Pages.

des équations différentielles; par M. *Jacobi* 44

Sur la réduction de l'intégration des équations différentielles du premier ordre entre un nombre quelconque de variables à l'intégration d'un seul système d'équations différentielles ordinaires; par *le même*.... 60

Notes historiques, 1° sur la locution : diviser une droite en moyenne et extrême raison; 2° sur la méthode des polygones réguliers isopérimètres. Et observations sur quelques théorèmes de M. Chasles; par M. *O. Terquem*..... 97

Nouvelle manière d'étudier les coniques dans le cône oblique. — Propriétés générales du cône et des coniques planes et sphériques; par M. *Chasles*..... 102

Note sur un problème de combinaisons; par *E. Catalan*..... 111

Recherches sur les nombres; par M. *Lebesgue* 113

Note de Géométrie. — Sur quelques propriétés de l'ellipsoïde à trois axes inégaux; par M. *Théodore Olivier*..... 145

Suite du Mémoire sur la réduction de l'intégration des équations différentielles partielles du premier ordre entre un nombre quelconque de variables à l'intégration d'un seul système d'équations différentielles ordinaires; par M. *Jacobi*..... 161

Sur quelques questions relatives à la théorie des courbes; par *A. Miquel*..... 202

Sur la théorie des oscillations de l'eau dans les tuyaux de conduite; par *Anatole de Caligny*..... 209

Addition à une précédente Note relative à la résolution des équations numériques; par M. *Vincent*..... 235

Sur une certaine démonstration du principe des vitesses virtuelles, qu'on trouve au chapitre III du livre I de la *Mécanique céleste*. Note de M. *Poinsot*..... 244

Sur une propriété du paraboloïde osculateur par son sommet en un point d'une surface du second degré; par M. *Th. Olivier*..... 249

Note sur la théorie des équations différentielles; par *J. Liouville*..... 255

Mémoire sur les applications du calcul des chances à la statistique judiciaire; par *A.-A. Cournot*..... 257

Addition au Mémoire de M. *Théodore Olivier*, inséré dans le cahier de mai 1838..... 335

Sur la théorie des équations transcendantes; par *J. Liouville*..... 337

Pages.

Note sur la théorie de la variation des constantes arbitraires; par *J. Liouville*..... 342

Observations sur un Mémoire de M. *Libri*, relatif à la théorie de la chaleur; par *J. Liouville*..... 350

Détermination de l'intégrale définie

$$\int_0^\pi \log(1 - 2a\cos x + a^2)\,dx,$$

par *Ch. Delaunay*..... 355

Mémoire sur l'Optique; par *C. Sturm*..... 357

Mémoire sur les lignes conjointes dans les coniques; par M. *Chasles*..... 385

Note sur l'intégration d'une équation aux différentielles partielles qui se présente dans la théorie du son; par *J. Liouville*. 435

Calcul des effets de la machine à élever l'eau, au moyen des oscillations, de l'invention de M. de Caligny; par M. *G. Coriolis*..... 437

Note sur le calcul des effets de la machine précédente et les dispositions essentielles de ses tuyaux d'ascension. — Coup d'œil historique sur quelques machines à élever l'eau; par *Anatole de Caligny*..... 466

Théorèmes sur les polygones réguliers, considérés dans le cercle et l'ellipse; par M. *O. Terquem*..... 477

Note sur la méthode de calcul en usage dans le moyen-âge pour les nombres fractionnaires; par M. *Guérard*..... 483

Théorèmes de géométrie; par *A. Miquel*.... 485

Application d'un principe de mécanique rationnelle à la résolution de quelques problèmes de géométrie; par M. *Paul Breton* 488

Discussion des surfaces du second degré d'après la méthode de M. *Plucker*, par M. *Finck*..... 492

Extrait d'une lettre de M. *Lamé* à M. *Liouville* sur cette question : Un polygone convexe étant donné, de combien de manières peut-on le partager en triangles au moyen de diagonales?..... 505

Note sur une équation aux différences finies; par *E. Catalan*..... 508

Théorèmes sur les intersections des cercles et des sphères; par *A. Miquel*..... 517

Suite du Mémoire sur la classification des transcendantes, et sur l'impossibilité d'exprimer les racines de certaines équations en fonction finie explicite des coefficients; par *J. Liouville*..... 523

Sur le nombre de manières de décomposer un

Pages.

polygone en triangles au moyen de diagonales; par M. *Olindé Rodrigues*..... 547
Sur le nombres de manières d'effectuer un produit de *n* facteurs; par *le même*.... 549
Démonstration élémentaire, et purement algébrique, du développement d'un binome élevé à une puissance négative ou fractionnaire; par *le même*..... 550
Note sur des intégrales définies, déduites de la théorie des surfaces orthogonales, par *G. Lamé*..... 552
Démonstration d'un théorème combinatoire de M. *Stern*, par M. *Terquem*..... 559
Solution d'un problème de combinaison; par *le même*..... 559
Premier Mémoire sur la théorie des équations différentielles linéaires et sur le développement des fonctions en séries, par *J. Liouville*..... 561
Note sur l'intégration des équations linéaires aux différentielles partielles; par M. *Poisson*..... [illegible]
Addition à la note insérée page 460 de ce volume, par *Anatole de Calagny*..... [illegible]

TOME IV (ANNÉE 1839).

Pages.

Sur l'intégration des équations linéaires aux différentielles partielles, par *J. Liouville*. 1
Note sur la théorie des nombres; par *E. Catalan*..... 7
Suite des recherches sur les nombres; par M. *Lebesgue*..... 9
Détermination des centres de gravité des fuseaux et des onglets de révolution, par *le même*..... 60
Note sur les surfaces isothermes dans les corps solides dont la conductibilité n'est pas la même dans tous les sens; par M. *Duhamel*..... [illegible]
Réflexions sur le problème de déterminer le nombre de manières dont une figure rectiligne peut être partagée en triangles au moyen de ses diagonales, par M. *J. Binet*. 79
Solution nouvelle de cette question : Un polygone étant donné, de combien de manières peut-on le partager en triangles au moyen de diagonales; par *E. Catalan*.... 91
Addition à la Note sur une équation aux différences finies, insérée dans le volume précédent, page 58, par *le même*..... [illegible]
Mémoire sur les axes des surfaces isothermes du second degré, considérés comme des fonctions de la température; par *G. Lamé*. 100
Mémoire sur l'équilibre des températures dans un ellipsoïde à trois axes inégaux, par *le même*..... [illegible]
Sur une nouvelle méthode pour la détermination des intégrales multiples, par M. *Lejeune-Dirichlet*..... [illegible]
Observations sur un Mémoire de M. *Ivory*; par *J. Liouville*..... [illegible]
Sur le nombre de normales qu'on peut mener par un point donné à une surface algébrique; par M. *Terquem*..... [illegible]
Sur un symbole combinatoire d'Euler et son utilité dans l'analyse; par *le même*..... 177
Extrait d'une lettre de M. *Wantzel* à M. *Liouville*..... [illegible]
Mémoire de Géométrie descriptive. Théorie de l'osculation des sections coniques, et construction d'un cercle osculateur en un point d'une section conique; par M. *Olivier*..... [illegible]
Nouvelle règle pour la convergence des séries, par M. *Duhamel*..... [illegible]
Intégration d'une équation aux différences; par *le même*..... 222
Note sur quelques intégrales définies, par *J. Liouville*..... [illegible]
Note sur les inversions ou dérangements produits dans les permutations, par M. *Lebesgue*..... [illegible]
Sur une propriété des surfaces du second degré; par M. *Terquem*..... 241
Rapport fait à la Société Philomatique sur une machine à [illegible], par M. [illegible] et par M. [illegible]..... [illegible]
Sur la diffraction de la lumière; par M. *Abria*. 248
Note sur l'origine de nos chiffres et sur l'A[illegible], par M. [illegible]

Pages.

Recherches géométriques sur les engrenages de White; par M. *Olivier*..... 281

Construction géométrique d'un engrenage dans lequel les axes des deux roues dentées ne sont pas situés dans un même plan, et comprennent entre eux un angle plus petit que l'angle droit, les vitesses étant dans un rapport constant et le frottement étant de roulement angulaire; par *le même*... 304

Note sur l'évaluation approchée du produit $1.2.3\ldots x$; par *J. Liouville*... 317

Mémoire sur la réduction d'une classe d'intégrales multiples; par *E. Catalan*..... 323

Note sur le centre de gravité du tronc de prisme; par M. *Brianchon*..... 345

Propriétés nouvelles de l'hyperboloïde à une nappe; par M. *Chasles*..... 348

Second Mémoire sur l'équilibre des températures dans les corps solides homogènes de forme ellipsoïdale, concernant particulièrement les ellipsoïdes de révolution; par *G. Lamé*..... 351

Sur le centre de gravité d'une portion quelconque de surface sphérique et de quelques autres surfaces; par M. *Giulio*..... 386

Sur l'intégration de l'equation $\frac{d^n y}{dx^n} = x^m y$; par M. *Kummer* 390

Pages.

Sur le nombre des polygones déterminés par n points pris pour sommets; par M. *Guibert*. 399

Démonstration de cette proposition : Toute progression arithmétique dont le premier terme et la raison sont des entiers sans diviseur commun contient une infinité de nombres premiers; par M. *Lejeune-Dirichlet*..... ... 393

Mémoire sur l'intégration d'une classe d'équations différentielles du second ordre en quantités finies explicites; par *J. Liouville*. 423

Généralisation de la théorie des foyers dans les sections coniques; par M. *Transon*.... 457

Sur les variations séculaires des angles que forment entre elles les droites résultant des intersections des orbites de Jupiter, Saturne et Uranus; par *J. Liouville*.... . 483

Sur la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique de plusieurs quantités positives; par *le même*..... 493

Note sur quelques points de la théorie de l'électricité; par M. *Bertrand*..... 495

Sur le principe fondamental de la théorie des équations algébriques; par *J. Liouville* 501

Démonstration de la formule générale qui donne les valeurs des inconnues dans les équations du premier degré; par M. *Molins*. 509

TOME V (Année 1840).

Pages.

Mémoire sur la propagation et la polarisation du mouvement dans un milieu élastique indéfini, cristallisé d'une manière quelconque; par M. *Blanchet*..... 1

Addition à la Note sur le principe fondamental de la théorie des équations algébriques; par *J. Liouville* 31

Note sur les transcendantes elliptiques de 1re et de 2me espèce, considérées comme fonctions de leur module; par *le même*... 34

Démonstration de deux propositions de M. Cauchy; par M. *Terquem* 37

Note sur l'engrenage de White; par M. *Delaunay*... 38

Sommation de quelques séries; par M. *Lebesgue*.... 42

Pages.

Extrait d'une lettre de M. Lejeune-Dirichlet à M. Liouville. 72

Note sur la détermination du nombre des racines réelles ou imaginaires d'une équation numérique, comprises entre des limites données. — Théorèmes de Rolle, de Budan ou de Fourier, de Descartes, de Sturm et de Cauchy; par M. *Moigno*... . 75

Mémoire sur les inclinaisons respectives des orbites de Jupiter, Saturne et Uranus; sur les mouvements des intersections de ces orbites; par M. *Le Verrier*. 93

Note sur l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x dx}{(1-x^2)^n}$; par *E. Catalan*. 108

Note sur l'évaluation de l'aire de l'ellip

Page.

soïde à trois axes inégaux; par M. *Lobatto* . . . 115

Mémoire sur les forces centrifuges développées dans le mouvement des corps qui roulent; par M. *Paul Breton* 129

Note sur les engrenages de White, par M. *Olivier* 146

Méthode simple et nouvelle pour la détermination complète des sommes alternées formées avec les racines primitives des équations binomes; par M. *Cauchy* 154

Sur la sommation de certaines puissances d'une racine primitive d'une équation binome, et en particulier des puissances qui offrent pour exposants les résidus cubiques inférieurs au module donné; par *le même* 169

Note sur un théorème de *Fermat*; par M. *Lebesgue* 184

Note sur une formule de M. *Cauchy*; par *le même* 186

Observations sur un Mémoire de M. *Paul Breton*, par M. *Delaunay* 189

Sur l'irrationnalité du nombre $e = 2,718\ldots$, par *J. Liouville* 192

Addition à la Note sur l'irrationnalité du nombre e, par *le même* 193

Mémoire d'analyse indéterminée, démontrant que l'équation $x^{\ldots} + y^{\ldots} = z^{\ldots}$ est impossible en nombres entiers; par M. *Lamé* 195

Rapport sur le Mémoire précédent; par M. *Cauchy* 211

Extrait d'une lettre adressée à M. *Liouville* par M. *Sturm* 216

Sur les variations séculaires des éléments des sept planètes principales : Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter, Saturne et Uranus; par M. *Le Verrier* 220

Note sur un théorème de Mécanique; par M. *Delaunay* 255

Problèmes de combinaisons, par *E. Catalan* . . . . . 2[illegible]4

Note sur une certaine suite de fractions ordinaires, par M. *Stouvenel* . . . . . 2[illegible]5

Démonstration de l'impossibilité de résoudre l'équation $x^{\ldots} + y^{\ldots} + z^{\ldots} = 0$ en nombres entiers, par M. *Lebesgue* . . . . . [illegible]

Sur la limite de $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m}$, m étant un entier positif qui croît indéfiniment; par *J. Liouville* . . . . . [illegible]

Résolution de l'équation du second degré à une inconnue par les fractions continues; par M. *Lebesgue* 281

Sur quelques formules pour le changement de la variable indépendante; par *J. Liouville* . . . . . [illegible]

Mémoire sur les coordonnées curvilignes, par M. *Lamé* . . . . . 3[illegible]3

Addition à la Note sur l'équation $x^{\ldots} + y^{\ldots} + z^{\ldots} = 0$, par M. *Lebesgue* 348

Lettre adressée à M. le Président de l'Académie des Sciences; par M. *Jacobi* 350

Note de l'éditeur à l'occasion de cette lettre. 351

Sur les conditions de convergence d'une classe générale de séries, par *J. Liouville* . . . . . 35[illegible]

Sur l'équation $Z^{2} - Y^{2} = 4X$, par *le même* . . . . . 36[illegible]

Mémoire sur les inégalités séculaires des éléments des planètes; par M. *Binet* 361

Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace, et de la variation des coordonnées provenant de ces déplacements considérés indépendamment des causes qui peuvent les produire; par M. *Rodrigues* 380

Mémoire sur les transcendantes elliptiques de 1re et de 2me espèce, considérées comme fonctions de leur module; par *J. Liouville* . . . . . [illegible]

Solution nouvelle du problème de l'attraction d'un ellipsoïde hétérogène sur un point extérieur; par M. *Chasles* . . . . . [illegible]

TABLE DES MATIÈRES

PAR

NOMS D'AUTEURS.

A

ABRIA. — Sur la diffraction de la lumière; t. IV, p. 248.

AIME. — Démonstration du parallélogramme des forces; t. I, p. 335.

AMPÈRE. — Mémoire sur les équations générales du mouvement; tome I, p. [illegible]

B

BERTRAND. — Note sur quelques points de la théorie de l'électricité; t. IV, p. 495.

BINET (J.). — Observations sur des théorèmes de Géométrie, t. II, p. 248.

— Note sur l'intégration d'un système d'équations différentielles du second ordre, entre un nombre quelconque de variables, analogues à celles du mouvement d'un point libre autour d'un centre fixe; t. II, p. 457.

— Réflexions sur le problème de déterminer le nombre de manières dont une figure rectiligne peut être partagée en triangles au moyen de ses diagonales; t. IV, p. 79.

— Mémoire sur les inégalités séculaires du mouvement des planètes; t. V, p. 361.

BLANCHET. — Mémoire sur la propagation et la polarisation du mouvement dans un milieu élastique indéfini, cristallisé d'une manière quelconque; t. V, p. 1.

BRETON (P.). — Sur la mesure de la surface convexe d'un prisme ou d'un cylindre tronqué; t. II, p. 133.

— Application d'un principe de Mécanique rationnelle à la résolution de quelques problèmes de Géométrie; t. III, p. 488.

— Mémoire sur les forces centrifuges développées dans le mouvement des corps qui roulent, t. V, p. [illegible].

BRIANCHON. — Note sur le centre de gravité du tronc de prisme, t. IV, p. [illegible].

C

CALIGNY. — Sur la théorie des oscillations de l'eau dans les tuyaux de conduite; t. III, p. 409.

— Note sur le calcul des effets de la machine à élever l'eau au moyen des oscillations, et sur les dispositions essentielles des tuyaux d'ascension. — Coup d'œil historique sur quelques machines à élever l'eau; t. III, p. 46. — Addition à cette Note, t. III, p. 624.

CATALAN. — Solution d'un problème de probabilité relatif au jeu de rencontre, t. II, p. 489.

— Note sur un problème de [illegible], t. III, p. 111.

— Note sur une [illegible] aux différences finies, t. III, p. 508. — Addition à cette Note; t. IV, p. 95.

— Note sur la théorie des nombres; t. IV, p. 7.

— Solution nouvelle de cette question [illegible]

polygone étant donné, de combien de manières peut-on le partager en triangles au moyen de diagonales; t. IV, p. 91.

— Mémoire sur la réduction d'une classe d'intégrales multiples; t. IV, p. 323.

— Note sur l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x dx}{(1+x^2)^n}$; t. V, p. 108.

— Problème de combinaisons; t. V, p. 264.

CAUCHY. — Mémoire sur l'interpolation; t. II, p. 193.

— Note sur la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de Mécanique; t. II, p. 406.

— Méthode simple et nouvelle pour la détermination complète des sommes alternées, formées avec les racines primitives des équations binomes; t. V, p. 154.

— Sur la sommation de certaines puissances d'une racine primitive d'une équation binome, et en particulier des puissances qui offrent pour exposants les résidus cubiques inférieurs au module donné; t. V, p. 169.

— Rapport sur un Mémoire de Lamé; t. V, p. 211.

CHASLES. — Sur les surfaces du second degré qui n'ont pas de foyers; t. I, p. 187.

— Géométrie. Analogie entre des propositions de Géométrie plane et de Géométrie à trois dimensions. — Géométrie de la sphère. — Hyperboloïde à une nappe; t. I, p. 324.

— Note sur les équations indéterminées du second degré. — Formules d'Euler pour la résolution de l'équation $Cx^2 \pm A = y^2$. — Leur identité avec celles des algébristes indiens et arabes. — Démonstration géométrique de ces formules; t. II, p. 37.

— Note sur un cas particulier de la construction des tangentes aux projections des courbes, pour lequel les méthodes générales sont en défaut; t. II, p. 293.

— Théorèmes sur les contacts des lignes et des surfaces courbes; t. II, p. 299.

— Mémoires sur les diverses manières de généraliser les propriétés des diamètres conjugués dans les sections coniques. — Nouveaux théorèmes de Perspective pour la transformation des relations métriques des figures. — Principes de Géométrie plane analogues à ceux de la Perspective. — Manière de démontrer dans le cône oblique les propriétés des foyers des sections coniques, t. II, p. 388.

— Sur quelques propriétés générales des surfaces gauches; t. II, p. 413.

— Démonstration géométrique de la formule intégrale

$$\int_0^b \int_b^c \frac{(v^2-t^2)\, dv.dt}{\sqrt{(v^2-b^2)(c^2-v^2)(t^2-b^2)(c^2-t^2)}} = \frac{\pi}{2},$$

t. III, p. 10.

— Nouvelle manière d'étudier les coniques dans le cône oblique. — Propriétés générales du cône et des coniques planes et sphériques; t. III, p. 102.

— Mémoire sur les lignes conjointes dans les coniques; t. III, p. 385.

— Propriétés nouvelles de l'hyperboloïde à une nappe; t. IV, p. 348.

— Nouvelle solution du problème de l'attraction d'un ellipsoïde hétérogène sur un point extérieur; t. V, p. 405.

COMBES. — Mémoire sur une méthode générale d'évaluer le travail dû au frottement entre les pièces des machines qui se meuvent ensemble en se pressant mutuellement. — Application aux engrenages coniques, cylindriques, et à la vis sans fin; t. II, p. 109.

— Rapport fait à la Société Philomatique sur une machine à flotteur oscillant de M. de Caligny; t. IV, p. 243.

CORIOLIS. — Note sur un moyen de tracer des courbes données par des équations différentielles; t. I, p. 5.

— Note sur la chaînette d'égale résistance; t. I, p. 75.

— Note sur une manière simple de calculer la pression produite par les parois d'un canal dans lequel se meut un fluide incompressible; t. II, p. 130.

— Mémoire sur le degré d'approximation qu'on obtient pour les valeurs numériques d'une variable qui satisfait à une équation différentielle, en employant pour calculer ces valeurs, diverses équations aux différences plus ou moins approchées; t. II, p. 229.

— Calcul des effets de la machine à élever l'eau, au moyen des oscillations, de l'invention de M. de Caligny; t. III, p. 437.

COURNOT. — Mémoire sur les applications du calcul des chances à la statistique judiciaire; t. III, p. 257

D

DELAUNAY. — Détermination de l'intégrale définie $\int_0^\pi \log(1-2a\cos x+a^2)\,dx$; t. III, p. 355.
— Note sur la théorie de l'engrenage de White; t. V, p. 38.
— Observations sur un Mémoire de M. Paul Breton; t. V, p. 189.
— Note sur un théorème de Mécanique; t. V, p. 255.

DUHAMEL. — Note sur les surfaces isothermes dans les corps solides dont la conductibilité n'est pas la même dans tous les sens; t. IV, p. 63.
— Nouvelle règle pour la convergence des séries; t. IV, p. 214.
— Intégration d'une équation aux différences; t. IV, p. 222.

F

FAVRE-ROLLIN. — Note sur une méthode d'élimination pour certaines classes d'équations différentielles linéaires; t. I, p. 88.
— Intégration de l'équation

$$\frac{d^p y}{dx^p} + P\frac{d^m y}{dx^m} + Q\frac{d^n y}{dx^n} + \text{etc.} = V,$$

dans laquelle on suppose p, q, m, n, etc., des nombres entiers; P, Q des coefficients constants, et V une fonction quelconque de la variable indépendante x; t. I, p. 339.

FINCK. — Discussion des surfaces du second degré, d'après la méthode de M. Plucker; t. III, p. 405.

G

GIULIO. — Sur le centre de gravité d'une portion quelconque de surface sphérique et de quelques autres surfaces; t. IV, p. 386.
GUÉRARD. — Note sur la méthode de calcul en usage dans le moyen-âge pour les nombres fractionnaires; t. III, p. 483.
GUIBERT. — Solution d'une question relative à la probabilité des jugements rendus à une majorité quelconque; t. III, p. 25.
— Sur le nombre des polygones déterminés par n points pris pour sommets; t. IV, p. 392.
GUILHEM (Saint-). — Théorie nouvelle du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe; t. I, p. 309.
— Note relative à la détermination des plans principaux d'une surface du second degré, rapportée à trois axes quelconques; t. I, p. 315.

I

IVORY. — Sur le développement de $(1-2xz+z^2)^{-\frac{1}{2}}$ (en commun avec M. Jacobi); t. II, p. 105.

J

JACOBI. — Formule pour la transformation d'une classe d'intégrales définies; t. I, p. 195.
— Sur le développement de $(1-2xz+z^2)^{-\frac{1}{2}}$ (en commun avec M. Ivory); t. II, p. 105.
— Nota de erroribus quibusdam quæ in theoriâ functionum leguntur; t. II, p. 114.
— Sur le calcul des variations et sur la théorie des équations différentielles; t. III, p. 44.
— Sur la réduction de l'intégration des équations différentielles du premier ordre entre un nombre quelconque de variables, à l'intégration d'un seul système d'équations différentielles ordinaires; t. III, p. 68 et 184. Lettre adressée à M. le Président de l'Académie des Sciences; t. V, p. 334.

K

KUMMER. — Sur l'intégration de l'équation $\frac{d^n y}{dx^n} = x^m . y$; t. IV, p. 390

L

LAMÉ. — Note sur l'équilibre des températures dans les corps solides de forme cylindrique; t. I, p. 77.
— Mémoire sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en équilibre de température; t. II, p. 147.
— Extrait d'une lettre adressée à M. Liouville, sur cette question : Un polygone convexe étant donné, de combien de manières peut-on le partager en triangles au moyen de diagonales? t. III, p. 505.
— Note sur des intégrales définies déduites de la théorie des surfaces orthogonales; t. III, p. 552.
— Mémoire sur les axes des surfaces isothermes du second degré considérés comme des fonctions de la température; t. IV, p. 100.
— Mémoire sur l'équilibre des températures dans un ellipsoïde à trois axes inégaux; t. IV, p. 126.
— Second Mémoire sur l'équilibre des températures dans les corps solides homogènes de forme ellipsoïdale, concernant particulièrement les ellipsoïdes de révolution; t. IV, p. 351.
— Mémoire d'analyse indéterminée, démontrant que l'équation $x^7 + y^7 = z^7$ est impossible en nombres entiers; t. V, p. 195.
— Mémoire sur les coordonnées curvilignes, t. V, p. 313
LEBESGUE. — Théorème sur les quantités incommensurables; t. I, p. 266.
— Recherches sur les nombres : t. II, p. 253; t. III, p. 113, et t. IV, p. 9.
— Thèses de Mécanique et d'Astronomie, t. II, p. 337.
— Détermination des centres de gravité des fuseaux et des onglets de révolution; t. IV, p. 60.
— Sommation de quelques séries; t. V, p. 42.
— Note sur un théorème de Fermat; t. V, p. 184.
— Note sur une formule de M. Cauchy; t. V, p. 186.
— Démonstration de l'impossibilité de résoudre l'équation $x^7 + y^7 + z^7 = 0$ en nombres entiers; t. V, p. 276.
— Addition à cette Note; t. V, p. 348.
— Résolution de l'équation du second degré à une inconnue par les fractions continues; t. V, p. 281.
LÉGER. — Mémoire sur les rapports et les restes des quantités incommensurables; t. I, p. 93.
LEJEUNE-DIRICHLET. — Sur une nouvelle méthode pour la détermination des intégrales multiples; t. IV, p. 164.
— Démonstration de cette proposition : Toute progression arithmétique dont le premier terme et la raison sont des entiers sans diviseur commun, contient une infinité de nombres premiers; t. IV, p. 393.
— Extrait d'une lettre adressée à M. Liouville; t. V, p. 72.
LE VERRIER. — Mémoire sur les inclinaisons respectives des orbites de Jupiter, Saturne et Uranus; sur les mouvements des intersections de ces orbites; t. V, p. 93.
— Sur les variations séculaires des éléments elliptiques des sept planètes principales : Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter, Saturne et Uranus; t. V, p. 220.
LIBRI. — Note sur les rapports qui existent entre la théorie des équations algébriques et la théorie des équations linéaires aux différentielles et aux différences; t. I, p. 10.
LIOUVILLE (J). — Avertissement; t. I, p. 1.
— Mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries de sinus et cosinus; t. I, p. 14.
— Mémoire sur une question d'analyse aux différences partielles; t. I, p. 33.
— Note sur une manière de généraliser la formule de Fourier; t. I, p. 100.
— Note sur le calcul des inégalités périodiques du mouvement des planètes; t. I, p. 197.
— Mémoires sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les

divers termes sont assujetis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre, contenant un paramètre variable; t. I, p. 253; t. II, p. 16 et 418.

— Démonstration d'un théorème dû à M. Sturm, et relatif à une classe de fonctions transcendantes; t. I, p. 26.

— Démonstration d'un théorème de M. Cauchy, relatif aux racines imaginaires des équations (en commun avec M. Sturm), t. I, p. 278.

— Mémoire sur un nouvel usage des fonctions elliptiques dans les problèmes de Mécanique céleste; t. I, p. 445.

— Solution d'un problème d'analyse, t. II, p. 1.

— Mémoire sur la classification des transcendantes et sur l'impossibilité d'exprimer les racines de certaines équations en fonction finie explicite des coefficients; t. II, p. 56, et t. III, p. 523.

— Sur la sommation d'une série, t. II, p. 107.

— Note sur le développement de $(1-2xz+z^2)^{-\frac{1}{2}}$; t. II, p. 135.

— Note sur un passage de la *Mécanique céleste*, relatif à la théorie de la figure des planètes; t. II, p. 206.

— Extrait d'un Mémoire sur le développement des fonctions en séries dont les différents termes sont assujétis à satisfaire à une même équation différentielle linéaire, contenant un paramètre variable (en commun avec M. Sturm); t. II, p. 220.

— Sur une lettre de d'Alembert à Lagrange; t. II, p. 245.

— Solution nouvelle d'un problème d'analyse relatif aux phénomènes thermo-mécaniques; t. II, p. 439.

— Sur la formule de Taylor; t. II, p. 483.

— Sur des cahiers du Journal de M. Crelle; t. III, p. 1.

— Nouvelles recherches sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique; t. III, p. 29.

— Sur l'intégration d'une classe d'équations différentielles; t. III, p. 31.

— Note sur la théorie des équations différentielles; t. III, p. 255.

Sur la théorie des équations transcendantes; t. III, p. 337.

— Note sur la théorie de la variation des constantes arbitraires; t. III, p. 342.

— Observations sur un Mémoire de M. Libri relatif à la théorie de la chaleur; t. III, p. 350.

— Note sur l'intégration d'une équation aux différentielles partielles qui se présente dans la théorie du son; t. III, p. 435.

— Premier Mémoire sur la théorie des équations différentielles linéaires, et sur le développement des fonctions en séries; t. III, p. 461.

— Sur l'intégration des équations linéaires aux différentielles partielles; t. IV, p. 1.

— Observations sur un Mémoire de M. Ivory; t. IV, p. 169.

— Note sur quelques intégrales définies; t. IV, p. 225.

— Note sur l'évaluation approchée du produit $1.2.3.\ldots.x$; t. IV, p. 317.

— Mémoire sur l'intégration d'une classe d'équations différentielles du second ordre en quantités finies explicites; t. IV, p. 423.

— Sur les variations séculaires des angles que forment entre elles les droites résultant des intersections des orbites de Jupiter, Saturne et Uranus; t. IV, p. 483.

— Sur la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique de plusieurs quantités positives; t. IV, p. 493.

— Note sur le principe fondamental de la théorie des équations algébriques; t. IV, p. 501.

— Addition à cette Note; t. V, p. 31.

— Sur les transcendantes elliptiques de première et de seconde espèce, considérées comme fonctions de leur module; t. V, p. 34 et p. 441.

— Note sur l'irrationnalité du nombre e; t. V, p. 192. — Addition à cette Note, t. V, p. 193.

— Sur la limite de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, t. V, p. 28[illegible].

— Sur quelques formules pour le changement de la variable indépendante; t. V, p. 311.

— Note à l'occasion d'une Lettre de M. Jacobi; t. V, p. 351.

— Sur la convergence d'une classe générale de séries; t. V, p. 356.

— Sur l'équation [illegible], t. V, p. [illegible].

LOBATTO. — Note sur l'évaluation de la surface totale de l'ellipsoïde à trois axes inégaux; t. V, p. 115.

M

MIQUEL. — Sur quelques questions relatives à la théorie des courbes, t. III, p. 202.
— Théorèmes de Géométrie; t. III, p. 485.
— Théorèmes sur les intersections des cercles et des sphères; t. III, p. 517.
MOIGNO. — Note sur la détermination du nombre des racines réelles ou imaginaires d'une équation numérique, comprises entre des limites données; t. V, p. 25.
MOLINS. — Extrait d'une thèse sur le mouvement des corps flottants de forme quelconque; t. III, p. 33.
— Démonstration de la formule générale qui donne les valeurs des inconnues dans les équations du premier degré; t. IV, p. 509.
MONDÉSIR. — Solution d'une question qui se présente dans le calcul des probabilités; t. II, p. 3.

O

OLIVIER (Th.). — Note de Géométrie. — Sur quelques propriétés de l'ellipsoïde à trois axes inégaux; t. III, p. 145.
— Sur une propriété du paraboloïde osculateur par son sommet en un point d'une surface du second degré; t. III, p. 249. — Addition à cette Note; t. III, p. 335.
— Mémoire de Géométrie descriptive. Théorie de l'osculation des sections coniques, et construction d'un cercle osculateur en un point d'une section conique; t. IV, p. 189.
— Recherches géométriques sur les engrenages de White; t. IV, p. 281.
— Construction géométrique d'un engrenage dans lequel les axes des deux roues dentées ne sont pas situés dans un même plan, et comprennent entre eux un angle plus petit que l'angle droit, les vitesses étant dans un rapport constant et le frottement étant de roulement angulaire; t. IV, p. 304.
— Note sur les engrenages de White; t. V, p. 146.

P

PAGÈS. — Note sur une propriété des sections coniques; t. II, p. 437.
PLUCKER. — Énumération des courbes du quatrième ordre, d'après la nature différente de leurs branches infinies; t. I, p. 229.
— Note sur les points singuliers des courbes; t. II, p. 11.
POINSOT. — Sur une certaine démonstration du principe des vitesses virtuelles, qu'on trouve au chapitre III du livre Ier de la *Mécanique céleste*; t. III, p. 244.
POISSON. — Note sur un passage de la seconde partie de la Théorie des Fonctions analytiques; t. II, p. 140.
— Note relative à un Mémoire de M. Lame, t. II, p. 184.
— Addition à cette Note; t. II, p. 189.
— Remarques sur les intégrales des fractions rationnelles; t. II, p. 224.
— Note relative à un passage de la *Mécanique céleste*; t. II, p. 312.
— Remarques sur l'intégration des équations différentielles de la Dynamique; t. II, p. 317.
— Solution d'un problème de probabilité; t. II, p. 373.
— Note sur les limites de la série de Taylor, t. III, p. 4.
— Note sur l'intégration des équations linéaires aux différentielles partielles; t. III, p. 615.

R

RODRIGUES (O). — Sur le nombre de manières de décomposer un polygone en triangles au moyen de diagonales; t. III, p. 547.
— Sur le nombre de manières d'effectuer un produit de n facteurs; t. III, p. 549.
— Démonstration élémentaire et purement algébrique du développement d'un binome élevé à une puissance négative ou fractionnaire; t. III, p. 550.
— Note sur les inversions ou dérangements pro-

duits dans les permutations, tome IV, p. 236.
— Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace, et de la variation des coordonnées provenant de ces déplacements considérés indépendamment des causes qui peuvent les produire; t. V, p. 380.

S

STERN. — Extrait d'une Lettre adressée à M. Liouville; t. V, p. 216.
STOUVENEL. — Note sur une certaine suite de fractions ordinaires: t. V, p. 265.
STURM. — Mémoire sur les équations différentielles linéaires du second ordre; t. I, p. 106.
— Démonstration d'un théorème de M. Cauchy, relatif aux racines imaginaires des équations (en commun avec M. Liouville); tome I, p. 278.
— Autres démonstrations du même théorème: t. I, p. 290.
— Mémoire sur une classe d'équations à différences partielles; t. I, p. 373.
— Extrait d'un Mémoire sur le développement des fonctions en séries dont les différents termes sont assujétis à satisfaire à une même équation différentielle linéaire, contenant un paramètre variable (en commun avec M. Liouville); t. II, p. 220.
— Mémoire sur l'Optique; t. III, p. 357.

T

TERQUEM. — Extrait d'une Lettre adressée à M. Liouville; t. II, p. 36.
— Sur les lignes conjointes dans les coniques; t. III, p. 17.
— Notes historiques, 1° sur la locution : diviser une droite en moyenne et extrême raison; 2° sur la méthode des polygones réguliers isopérimètres; et observations sur quelques théorèmes de M. Chasles; t. III, p. 97.
— Théorèmes sur les polygones réguliers considérés dans le cercle et dans l'ellipse; t. III, p. 477.
— Démonstration d'un théorème combinatoire de M. Stern; t. III, p. 566.
— Solution d'un problème de combinaison; t. III, p. 559.
— Sur le nombre de normales qu'on peut mener par un point donné à une surface algébrique; t. IV, p. 175.
— Sur un symbole combinatoire d'Euler et son utilité en analyse; t. IV, p. 177.
— Sur une propriété des surfaces du second degré; t. IV, p. 241.
— Démonstration de deux propositions de M. Cauchy; t. V, p. 37.
TRANSON. — Note sur les rayons de courbure des sections coniques; t. I, p. 191.
— Généralisation de la théorie des foyers dans les sections coniques; t. IV, p. 132.

V

VINCENT. — Note sur la résolution des équations numériques, t. I, p. 341.
— Addition à cette Note; t. III, p. 235.
— Note sur l'origine de nos chiffres et sur l'abacus des Pythagoriciens; t. IV, p. 361.

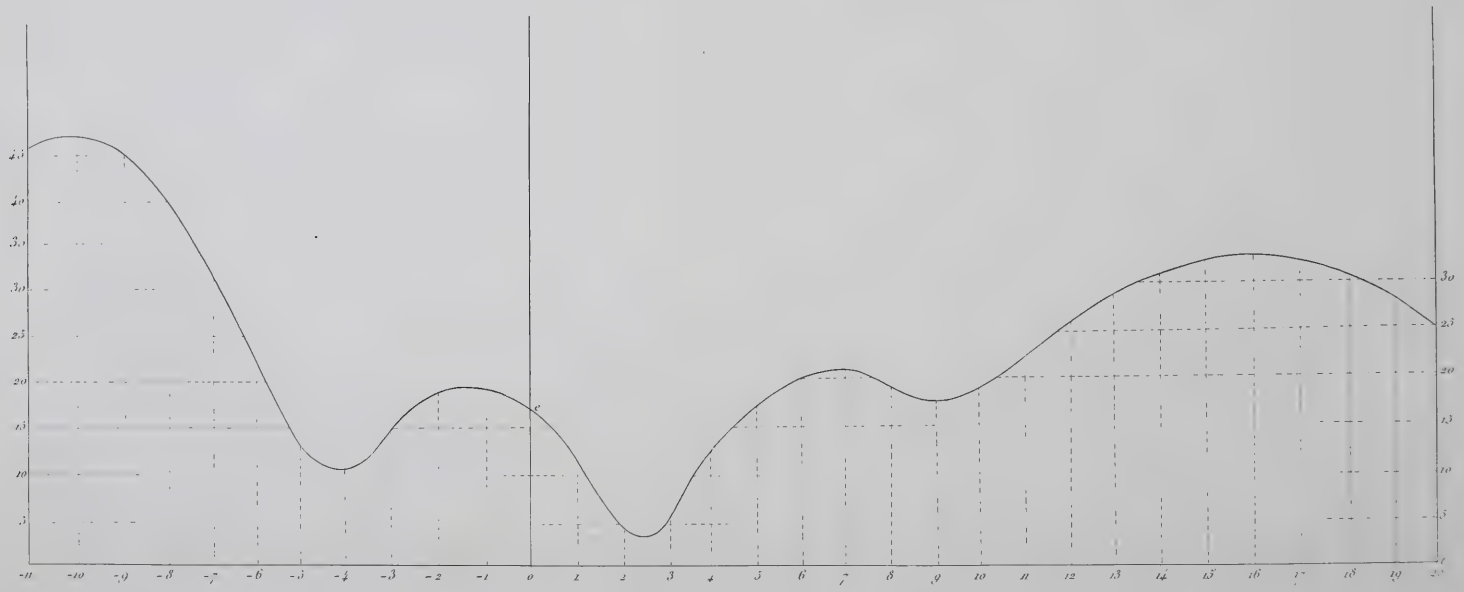
W

WANTZEL. — Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas; t. II, p. 366.
— Extrait d'une Lettre adressée à M. Liouville; t. IV, p. 185.

Courbe

représentant la marche de l'excentricité de la Terre.

(L'unité de l'abscisse équivaut à 10,000 ans comptés à partir du premier Janvier 1800.
L'unité de l'ordonnée équivaut à 0,001.)



QA
1
J684
t. 5
Physical &
Applied Sci.
Serials

Math

Journal de mathématiques
pures et appliquées

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY